Дж. Ф. Белл

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

часть I

МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Перевод с английского
Л. Е. ИОФИНА, В. Л. КАНА, С. К. КАНАУНА, В. М. ЛЕВИНА, А. Г. МОРДВИНЦЕВА, Л. И. ФИЛИНОЙ

Под редакцией А. П. ФИЛИНА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.25
Б 43
УДК 593.3

ENCYCLOPEDIA OF PHYSICS

Chief Editor
S. FLÜGGE

volume VIa/1

MECHANICS OF SOLIDS I

Editor
C. TRUESDELL

WITH 481 FIGURES

SPRINGER-VERLAG
BERLIN — HEIDELBERG — NEW YORK
1973

Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел, Б е л л Ф. Дж. В 2-х частях. Часть I. **Малые деформации:** Пер. с англ./Под ред. А. П. Филина.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 600 с.

Книга представляет собой перевод трех первых разделов одиого из томов (VIa/1) «Физической энциклопедии», выпущенной издательством «Шпрингер». В первой части содержатся разделы: введение, нелинейность при малых деформациях и линейная аппроксимация. Эта монография беспрецедентна по широте охвата и глубине анализа основополагающих результатов экспериментальной механики твердого деформируемого тела. Особо тщательно обсуждаются эксперименты, явившиеся истоком или поворотным пунктом в построении теорин.

Для специалистов, работающих как в области экспериментальной механики, так и в области теории, и будет полезна также преподавателям, аспирантам и студентам втузов.

Табл. 111, илл. 228, библ. 559.

© by Springer-Verlag Berlin — Heidelberg 1973 All Rights Reserved

Authorized translation from English language edition published by Springer-Verlag Berlin — Heidelberg — New York

Б $\frac{1703040000-110}{053\ (02)-84}$ 66-84

© Перевод на русский язык. Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1984

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 7

I. Введение 21

II. Нелинейность при малых деформациях 35
2.1. Введение 35
2.2. Нелинейная упругость против линейной в XVIII веке 39
2.3. Нелинейность зависимости между напряжением и деформацией для дерева при малых деформациях: Дюпен (1815) 41
2.4. Предшественники Дюпена в XVIII веке: Бюффон (1741), Дюамель (1742) и Готэ (1774) 43
2.5. Детали экспериментов Дюпена с деревянными балками (1815) 46
2.6. Эксперименты по нелинейному поведению дерева, железа и камня и введение понятия микропластичности: Ходкинсон (1824—1844) 51
2.7. «Закон Герстнера» для стальной фортепианной струны (1824) . 62
2.8. Открытие ползучести металлов: Кориолис и Вика (1830—1834) 64
2.9. Открытие микродеформации: Л. Вика (1831) 65
2.10. Эксперименты по устойчивости остаточной деформации в железной проволоке: Леблан (1839) 70
2.11. О явлении, открытом Саваром (1837) и Массоном (1841) и известном в наше время под названием эффекта Портвена—Ле Шателье (1923) 73
2.12. Первые экспериментты, связанные с термоупругостью: опыты Гафа (1805) и Вильгельма Вебера (1830); открытие Вебером упругого последействия (1835) 77
2.13. Большая деформация струн из кетгута: Кармарш (1841) . . . 87
2.14. Эксперименты по упругости и прочности осиовых тканей человеческого тела: Вертгейм (1846—1847) 92
2.15. Дальнейшие экспернмеитальиые исследования по упругости органических тканей: сравнение функций отклика для живых и мертвых образцов. Вундт (1858), Фолькман (1859) 101
2.16. «Отмена» закона Гука Британской Королевской комиссией по железу в 1849 г. 109
2.17. Эксперименты по релаксацин напряжений в стекле и латуни: исток нелинейной вязкоупругости. Кольрауш (1863) 114
2.18. Об изменении объема при пластических деформациях: опыты Баушингера (1879) 124
2.19. Исследования нелинейного кручения, включающие изучение влияния на намагничивание, проводившнеся с 1857 по 1881 г. 131
2.20. Уменьшение модулей с увеличением остаточной деформацин: эксперименты Вертгейма (1844—1848), Кельвина (1865), Томлинсона (1881) и Фишера (1882) с металлами 137
2.21. Циклическое нагружение шелка-сырца: Мюллер (1882) 144

2.22. Первое точное инструментальное наблюдение нелинейности металлов при инфинитезимальных деформациях: Джозеф Томпсон (1891) 147
2.23. Нелинейный закон Хартига: общая функция отклика в случае малых деформаций твердых тел (1893) 153
2.24. Закон Баха — Шюле (1897): переоткрытие параболической функции отклика Якова Бернулли (1695) и Ходкинсона (1824) 159
2.25. Эксперименты Грюнайзена (1906) с использованием интерферометра, установившие закон Хартига для инфинитезимальных деформаций металлов 166
2.26. О некоторых примерах независимого переоткрытия в XX веке нелинейных явлений, впервые наблюдавшихся в XIX веке. . . 176
2.26а. Закон для красок и лаков: Нельсон (1921) 178
2.26б. Нелинейный закон Сэйра для малых деформаций стали (1930) 180
2.26в. Нелинейность, обнаруженная в экспериментах по растяжению сплавов меди: Смит (1940—1948) 183
2.26г. Исчерпывающее изучение одного из твердых тел в опытах с образцами, подвержеными элементарным деформациям: анализ малых деформаций бериллиевой меди, выполненный Ричардсом (1952) 185
2.26д. Парабола Ходкинсона и дефект «упругости»: эксперименты Томаса и Авербаха (1959) и Билелло и Метцгера (1969) по микропластичности 194
2.26е. Сравнение функции отклика для волокна мышцы и всей мышцы: эксперименты Зихеля (1935) 195
2.26ж. Нелинейная функция отклика для искусственного камня: эксперименты Пауэрса (1938) 197
2.26з. «Эффект последействия» в монокристаллах свинца: Чалмерс (1935) 199
2.26и. Уменьшение значения E с увеличением микроостаточной деформации: эксперименты Лауриента и Поида с кристаллами алюминия (1956) 200
2.27. Некоторые современные исследования по нелинейности при инфинитезимальной деформации в кристаллических твердых телах 203
2.28. Новые проблемы, подлежащие критике при обзоре экспериментов, описанных в литературе за последнее десятилетие . 208
2.29. Резюме 211

III. Малые деформации: линейная аппроксимация 214
3.1. Пионеры XVII века: Гук и Мариотт 214
3.2. Эксперименты до 1780 г.: Риккати, Мусшенбрук, Гравесанд, Кулон; введение Эйлером концепции модуля упругости . . . 219
3.3. Начало экспериментальной механики твердого тела как науки: изучение Кулоном кручения в 80-х гг. XVIII века 227
3.4. Первое определение значения модуля упругости, выполненное Кулоном, и его эксперименты по вязкости и пластичности (1784) 233
3.5. Об определении значений констант упругости 241
3.6. Эксперименты Хладни по продольным колебаниям стержней (1787) 245
3.7. Оценка фактов и мифов о модулях в лекциях Юнга по натуральной философии (1807) 249
3.8. Использование Жаном Био труб нового парижского водопровода для первого непосредственного измерения скорости звука в твердом теле (1809) 258
3.9. Введение Альфонсом Дюло квазистатических измерений при изучении линейной упругости (1813) 264

3.10. Исследование модулей упругости в течение трех десятилетий (1811—1841) до Вертгейма 278
3.11. Гийом Вертгейм: Фарадей без Максвелла 290
3.12. Мемуар Вертгейма 1842 г.: значения E для 15 элементов и первое изучение эффектов температуры окружающей среды, предварительной истории обработки образцов, уровня нагружения и межатомного расстояния 293
3.13. Мемуар Вертгейма 1843 г.: первые эксперименты с двух- и трехкомпонентными сплавами, включающие изучение влияния на модуль E химического состава и скорости нагружения для 64 сплавов 307
3.14. Мемуар Вертгейма 1844 г.: первое изучение зависимости значения модуля E от напряженности электрического и магнитного полей 312
3.15. Мемуары Вертгейма 1845—1846 гг. по упругости стекла, древесины и тканей человеческого тела 318
3.16. Первые эксперименты Вертгейма по определению коэффициента Пуассона, доказавшие неприменимость атомистической теории Пуассона — Коши для описания напряженно-деформированного состояния кристаллических тел (1848) 325
3.17. Успех Вертгейма в первом определении частоты стоячих волн в столбах жидкости (1848) 334
3.18. Вертгейм о колебаниях пластин и «глубоком тоне» колеблющихся стержней 337
3.19. Полемика Вертгейма с точки зрения XX века 341
3.20. Эксперименты Кирхгофа по непосредственному определению коэффициента Пуассона (1859) 344
3.21. Эксперимент Корню (1869), в котором использовалась оптико-интерференционная техника для определения коэффициента Пуассона 349
3.22. Эксперименты Фохта по изучению изотропности стекла и определению для него значений модулей упругости (1882) 356
3.23. Определение отношения значений постоянных упругости по первой и второй частотам свободных колебаний пластины, выполненное Меркадье (1888) 360
3.24. Эксперименты Амага с использованием пьезометра (1884—1889) 362
3.25. Эксперименты Бока по изучению зависимости значения коэффициента Пуассона от уровня температуры (1894) 368
3.26. Исчерпывающее изучение Штраубелем эксперимента Корню по непосредственному определению коэффициента Пуассона (1899) 373
3.27. Эксперименты Грюнайзена по проверке теоретической зависимости между постоянными упругости для изотропного тела посредством независимого определения значений E, μ и ν . . 380
3.28. Повторение эксперимента Кирхгофа по определению значения коэффициента Пуассона, выполненное в середине XX века 386
3.29. Путаница, вызванная экспериментами Купфера (1848—1863) . 391
3.30. Метод Мэллока для квазистатического определения модуля объемной упругости 399
3.31. Использование Грюнайзеном метода Мэллока для сравнения постоянных упругости изотропных твердых тел (1910) 400
3.32. Линейная аппроксимация и одномерное распространение волн: Вертгейм и Бреге (1851) 403
3.33. Эксперименты Экснера по распространению волн в ре не (1874) 406
3.34. Осевое соударение стержней в предположении линейности функции отклика: эксперименты Больцмана (1881 и последую-

щие годы) и сопоставление их результатов с теорией Сен-Венана (1867) 411
3.35. Использование Хаузманнигером (1884) методики Пуйе (1844) измерения продолжительности контакта при ударе в эксперименте Больцмаиа и в аналогичных экспериментах, выполнявшихся иа протяжении полустолетия (1884—1936) 414
3.36. Первое использование электротензометрических датчиков сопротивления для изучения профилей волн в эксперименте Больцмана: Фаннинг и Бассетт (1940) 428
3.37. Использование Дэвисом (1948) техники электрической емкости при определении перемещений во впервые выполненном сравнении профиля волны в стержне с предсказываемым на основе трехмерной теории Поххаммера для цилиндрических брусьев (1876) 431
3.38. Эксперименты по распространению волн малой амплитуды в металлических цилиндрах, выполнявшиеся в течение последних двух десятилетий: последовательность изменений в технике экспериментов и в интерпретации результатов 437
3.39. Ультразвуковые методы определения постоянных упругости 452
3.40. Историн кратковременных нагружений 458
3.41. О зависимости постоянных упругости от температуры (1843—1910) 461
3.42. Сравнение значений температурных коэффициентов, полученных на основе квазистатических экспериментов и экспериментов с использованием ультразвуковых волн. 482
3.43. Об исследованиях температурной зависимости постоянных упругости и декремента колебаний, выполненных после 1910 г. 487
3.44. Квантованное распределение значений модуля упругости при сдвиге при нулевой температуре по Кельвину для упругих изотропных тел и мультимодульность для даиного изотропного твердого тела: Белл (1964—1968) 505
3.45. Анизотропия 518
3.46. Термоупругость 525
3.47. Вязкоупругость 528
3.48. Резюме 534

Литература 537

О переводе некоторых терминов: комментарии редактора перевода 565
Примечания редактора перевода 567
Именной указатель 579
Предметный указатель 587

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга, предлагаемая вниманию читателя, представляет собой перевод на русский язык одного из томов физической энциклопедии, издаваемой издательством «Шпрингер» (Encyclopedia of Physics. Chief Editor S. Flügge, Volume VIa/1, Mechanics of Solids I, Editor C. Truesdell, Springer-Verlag. Berlin — Heidelberg — New York, 1973. Подробнее о всей физической энциклопедии см. примечание [1] редактора перевода на стр. 567). Этот том написан Джеймсом Фредериком Беллом—профессором Университета Джона Гопкинса (Балтимора, Мериленд, США). Внутреннее название книги, не помещенное на титульном листе оригинала,— «Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел»; именно оно принято для русского издания книги.

Книга представляет собой капитальный исторический обзор. К сожалению, в труде Дж. Белла практически не отражены достижения советской и дореволюционной отечественной школы механики деформируемых тел, что в значительной мере умаляет его ценность и не позволяет считать обзор достаточно полным. Тем не менее книга и в настоящем виде представляет значительный интерес и принесет несомненную пользу.

На русском языке книга издается в двух частях (книгах). В первой книге помещены первые три главы: «Введение», «Нелинейность при малых деформациях» и «Малые деформации (линейная аппроксимация)». Вторая книга содержит в себе последнюю — четвертую главу «Конечные деформации». Список литературных источников, именной и предметный указатели даются в каждой книге отдельно.

Вся книга посвящена экспериментам, проводившимся исследователями для изучения физической (главным образом в механическом аспекте) природы твердых тел и фактически создавшим фундамент для построения определяющих уравнений во всех ветвях механики твердых деформируемых тел, обладающих свойствами упругости, или пластичности, или вязкости, или, наконец, любой комбинацией этих свойств. При этом затронуты и вопросы взаимодействия полей механической природы (деформаций, напряжений) с температурным и электромагнитным полями.

Хорошо известно, что механика твердого деформируемого тела имеет в своей основе три системы уравнений, позволяющие решать

ее проблемы — уравнения равновесия (движения — в динамической задаче), уравнения совместности деформаций и физические, или, как их называют иначе, определяющие уравнения.

Если уравнения совместности деформаций, имеющие чисто геометрический характер, могут быть составлены с любой степенью точности чисто аналитически, минуя эксперимент, а уравнения равновесия, опирающиеся на общие для всех тел и хорошо известные давно установленные экспериментальные факты, не нуждаются в опытной проверке, то последняя система — система определяющих уравнений — может быть составлена лишь на основании эксперимента, выясняющего характер сопротивления каждого тела внешним воздействиям. Поэтому мера достоверности теории полностью зависит от идейной полноценности и точности эксперимента, положенного в ее основу, и от адекватного отображения результатов этого эксперимента в математическом аппарате теории через определяющие уравнения. Отмеченным фактом обусловлено фундаментальное значение для всей механики твердого деформируемого тела тех экспериментов, которым посвящена настоящая книга.

В книге описаны и критически проанализированы с позиций начала семидесятых годов нашего века все экспериментальные исследования, в которых были обнаружены ранее неизвестные явления, установлены новые качественные и количественные зависимости параметров, определяющих напряженно-деформированное состояние тел, в общем случае изменяющееся во времени, от различных факторов (температура окружающей среды, скорость нагружения, тип силового воздействия, напряженность электрического поля и т. п.) с учетом термомеханической предыстории испытываемого образца. Иными словами, в книге рассмотрены экспериментальные исследования, явившиеся истоком создания той или иной ветви теории в механике твердого деформируемого тела или поворотным пунктом в ее истории. В этом автор справедливо усматривает основную цель экспериментальной механики как науки. По-видимому, никогда не возникнет такая ситуация, при которой в эксперименте не будет нужды по той причине, что все необходимое для построения теории станет известно. Появляются новые материалы, новые способы механической, термической и химической их обработки, возникают новые режимы их работы, возникают принципиально новые средства для более глубокого проникновения в природу материи и явлений, происходящих в ней. Теории, будучи созданы на основе эксперимента, в свою очередь ставят новые задачи перед экспериментальной наукой. Все эти факторы увеличивают потребность в дальнейших экспериментальных исследованиях материалов в образцах.

Другая цель экспериментальной механики, состоящая в определении полей деформаций (напряжений) в деталях и конструкциях сложной формы, когда теория зачастую может дать лишь качественные результаты, в книге не обсуждается.

Книга Дж. Белла утверждает представления об экспериментальной механике как о ветви науки, вполне равноправной с ветвью, использующей теоретический метод. Экспериментальная механика имеет даже приоритет, поскольку именно в эксперименте исследователь осуществляет непосредственный контакт с природой, позволяющий и создать фундамент для построения теории, и произвести оценку достоверности результатов, получаемых на ее основе.

Автор убедительно показал, что экспериментальная механика — это не придаток к механике, изучающей объект средствами теории, а один из важнейших самостоятельных разделов науки, имеющий свои цели, свои задачи, свои предмет и метод; раздел, исследующий свойства тел и явления, происходящие в них, в непосредственном контакте с объективным миром, отрыв от которого выхолащивает теорию и делает недостоверными результаты.

В книге отчетливо показана связь экспериментальной механики с физикой в широком смысле слова, с химией и технологией материалов.

Книга Дж. Белла помогает экспериментатору создать мировоззрение в той области науки, в которой он работает, и воспитать на ярких примерах правильное понимание роли истории науки, имеющей большое значение в современных исследованиях, поскольку она позволяет избежать ошибок прошлого, дает возможность не потерять результаты, полученные ранее, и на основе сопоставления фактов в исторической последовательности их открытия производить экстраполяцию, т. е. осуществлять прогнозирование.

Содержание книги охватывает трехсотлетний период, начинающийся со времени практически самых ранних зафиксированных в научной литературе экспериментальных исследований материалов (имеются в виду опыты Р. Гука и первая — посвященная им — его работа 1678 г.) и кончающийся 1972 годом, т. е. годом завершения работы автора над книгой.

При этом дается обстоятельный анализ всех наиболее существенных исследований, выполненных за этот период.

В области механики твердого деформируемого тела настоящую книгу по широте охвата материала и по глубине анализа можно сравнить лишь со знаменитым критическим обзором И. Тодхантера и К. Пирсона (A History of the Theory of Elasticity and of the Strength fo Materials from Galilei to present Time by the late Isaac Todhunter D. Sc.F.R.S. edited and completed for the syndics of the University Press by Karl Pearson M. A. professor of Applied Mathematics, University College, London, Vol. I. Galilei to Saint-Venant (1639—1850). Cambridge: At the University Press, 1886 (XVI, 924+12) стр. Vol. II. Saint-Venant to lord Kelvin, Part I (XVI, 762) стр., Part II, 1893 (546+12) стр. Подробнее см. примечание [2] редактора перевода). Однако если произведение этих авторов было посвящено главным образом теоретическим работам и лишь в небольшой мере — экспериментальным, то в книге Белла анализируются лишь эксперимен-

тальные исследования, а некоторые из теоретических только упоминаются в тех случаях, когда результаты эксперимента так или иначе могли быть сопоставлены с теоретическими.

Сочинение Тодхантера и Пирсона посвящено по сути дела лишь работам, выполненным в XIX веке, и то не охватывает самого его конца, а периоду до XIX века отведена одна I глава, содержащая всего лишь 79 страниц из более чем 2000 страниц, составляющих весь обзор. При этом во всем обзоре обсуждены работы практически лишь по теории упругости.

В книге Дж. Белла значительное место отведено результатам, полученным самим автором. Настоящая книга существенно отличается от труда Тодхантера и Пирсона и по этому признаку. Более того, во многих случаях автор сопоставляет результаты, полученные экспериментально другими исследователями, с предсказываемыми на основе его собственных работ. В некоторых случаях автор переводит табличную информацию, полученную другими исследователями, в графическую форму или выполняет иную дополнительную работу, делающую обзор более выпуклым.

Существенно отличается книга Дж. Белла и от известной книги С. П. Тимошенко (История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений/Пер. с англ. В. И. Контовта/Под. ред. А. Н. Митинского.— М.: Гостехиздат, 1957), которая, будучи значительно меньшего объема, практически в равной мере касается и теоретических, и экспериментальных исследований, уделяя значительное внимание биографиям ученых. В целом же все три труда И. Тодхантера и К. Пирсона, С. П. Тимошенко и Дж. Белла в совокупности создают картину развития и современного состояния механики твердого деформируемого тела, в особенности, если к ним присоединить упомянутые выше[1] тома VI, VIa/2, VIa/3 и VIa/4 физической энциклопедии, издаваемой под редакцией Флюгге. Приходится только сожалеть, что не все из отмеченных книг изданы в переводе на русский язык[3].

Время, затраченное Беллом на ознакомление с огромным количеством литературных источников, критически проанализированных в его книге, позволяет читателю ознакомиться с весьма важной для механика информацией, разумеется, при несопоставимо меньшей затрате труда и времени.

Автор практически во всех случаях лично знакомился с оригиналами обсуждаемых работ. Когда же ему не удавалось найти необходимый источник, он специально отмечает этот факт. Указанное заслуживает внимание потому, что довольно часто в научной литературе делаются ссылки и даже описание работ без прочтения оригиналов, и ошибка, допущенная в оценке работы кем-то из прочитавших ее, переходит из одной публикации в другую.

В книге дается подробное описание экспериментов, создающее достаточно полную картину развития экспериментальной механики и ее современного состояния.

Лейтмотивом всей книги является тезис о том, что экспериментатор, выполняя опыт, должен иметь полную информацию о химическом составе испытываемого образца и обо всей его термомеханической предыстории, поскольку в противном случае получаемые результаты, существенно зависящие от этих факторов, имеют весьма ограниченную практическую и научную ценность.

Уместно отметить в связи с этим взгляд автора на способ представления в публикациях результатов экспериментальных исследований. Он сводится к тому, что в описании должна содержаться вся та информация, которая необходима для повторения эксперимента во всех его деталях и подробностях, причем это относится и к аппаратуре, и к условиям ее использования, и к образцам с учетом их химического состава и всей их термомеханической предыстории.

Нередко экономия бумаги, влекущая за собой жесткое ограничение объема публикаций, вскоре оборачивается огромными убытками вследствие практической невозможности воспользоваться проделанной ранее работой.

Из содержания книги со всей очевидностью вытекает необходимость для дальнейшего усовершенствования теории использовать новые экспериментальные факты, получение которых может быть достигнуто на основе крупномасштабного целенаправленного эксперимента, в принципе отличающегося от суммы огромного количества несвязанных или малосвязанных между собой экспериментов, ставящихся с различными целями с разными материалами, работающими в разных условиях, что нередко является предметом деятельности даже крупномасштабных исследовательских институтов (пример исследований Бриджмена во время второй мировой войны). История на примерах деятельности Бюффона и некоторых других исследователей показывает, что даже выполнение тысяч опытов без подчинения их общему научному замыслу не может дать существенных научных результатов, имеющих общее значение.

Книга убедительно показывает принципиальную роль отдельных ученых как генераторов идей и организаторов эффективных серий экспериментов для их проверки и уточнения в развитии науки.

Большое внимание в книге уделено испытательной технике, в частности испытательным машинам. Со всей определенностью автор высказывается в пользу так называемых машин с мягким нагружением, т. е. с нагружением мертвым грузом, позволяющим получать режим деформирования как выходную информацию, в противовес стандартным испытательным машинам с жестким нагружением, в которых режим деформирования предписан. Этого же мнения придерживаются и многие другие экспериментаторы, даже те, кто вследствие необходимости принужден пользоваться машинами с жестким нагружением.

Обращено внимание на важность независимого возбуждения воздействий на образец, находящийся в неодноосном напряженном состоянии при сложном нагружении.

Нельзя согласиться лишь с высказыванием автора о якобы происходящем затуманивании всего экспериментального процесса при использовании испытательных машин, объединенных с ЭВМ. У таких машин, кроме автоматизации обработки информации существенным достоинством является возможность получения синхронной информации для всего изучаемого поля деформаций; при наличии временны́х процессов в изучаемом объекте это весьма существенно. Разумеется, усложнение техники влечет за собой требование повышения квалификации использующих ее.

К тому же совершенно ясно, что и обсуждаемый тип машин продолжает подвергаться усовершенствованию, и возможности их увеличиваются вместе с простотой по́льзования ими.

Автор повсеместно подчеркивает большое значение достижения высокой точности в эксперименте и умения правильно оценивать ее уровень. При этом он считает важными и такие экспериментальные исследования, в которых не наблюдаются новые явления, но существенно повышается точность измерений, что способствует более глубокому пониманию явления и более правильной оценке его практического значения. В качестве примера экспериментаторов, значение работ которых состояло в основном в повышении точности результатов, автор книги приводит Герберта Томлинсона. Интересно отметить, что значительную роль в повышении точности измерения деформаций сыграли многочисленные эксперименты по определению значения коэффициента Пуассона для разных материалов, которые в обилии ставились в связи с дискуссией по поводу числа независимых постоянных упругости у изотропного тела. Хотя исследования Грина давали исчерпывающий ответ на этот вопрос, многие ученые в XIX веке не считали его решенным. С позиций XX века дискуссия была излишней, однако она явилась причиной постановки тончайших опытов, представляющих самостоятельный интерес в части достижения высокой точности измерения деформаций.

Автор показывает, что иногда даже небольшое расхождение в значениях экспериментально найденных величин может служить основанием для заключений, имеющих принципиальное значение. Так, Корню получил значение коэффициента Пуассона для стекла, равное 0,237, но, будучи во власти представлений атомистической теории упругости, согласно которой этот коэффициент должен быть равен 0,25, счел полученное им значение неточным, хотя позднее оно было подтверждено.

В книге во многих случаях подчеркивается необходимость не проходить мимо обнаруженных в эксперименте таких фактов, которые, казалось бы, можно было отнести на счет всякого рода случайностей.

Так, например, Герстнер не придал значения явлению, позднее названному явлением Портвена—Ле Шателье, хотя и наблюдал его.

В книге обращается внимание на большое значение способа представления экспериментальных данных. Так, значительным ша-

гом вперед было графическое изображение зависимости между напряжением и деформацией при осевой деформации, введенное Понселе, наряду с табличным представлением той же информации. Другим еще более ярким примером является переход от использования системы координат σ—ε к системе σ^2—ε, позволившей в отчетливой форме обнаружить переходы второго порядка, состоящие в разрыве в значениях первой производной от функции отклика.

Структура книги характеризуется двумя генеральными признаками — предметным и временным. Вследствие этого автор неоднократно в разных местах, посвященных различным предметам, возвращается к одним и тем же периодам времени, а в ряде случаев и к одним и тем же работам, рассматривая их всякий раз с новой точки зрения. Поэтому фрагментарное ознакомление с книгой намного менее эффективно, чем последовательное ее прочтение.

Одной из существенных особенностей книги является то, что в ней уделено большое внимание нелинейности зависимости между напряжениями и деформациями, наблюдаемой при очень высокой точности измерения деформаций, практически начиная от нулевого напряжения. В настоящее время общепринятой является такая точка зрения, что и предел пропорциональности и предел упругости являются величинами, значения которых условны и зависят от точности средств, фиксирующих характер упомянутой выше зависимости.

Однако несмотря на это, для ряда практически важных конструкционных материалов степень отклонения этой зависимости от линейной в достаточно большом и именно рабочем диапазоне значений напряжений столь невелика, что при построении инженерной теории вполне может быть принят закон Гука. Линейная зависимость с этой точки зрения рассматривается как аппроксимация экспериментально обнаруживаемой зависимости, но аппроксимация, практическое значение которой трудно переоценить.

Сам автор книги в разделе 3.1 отмечает, что для успеха науки и техники было весьма важным обнаружение в первую очередь линейности зависимости между напряжением и деформацией (на том уровне точности измерительной аппаратуры, который имел место в конце XVII века), принесшее огромную практическую пользу прогрессу техники.

Несмотря на это четкое утверждение, сделанное автором книги, в разных местах главы второй проскальзывают сетования по поводу якобы имеющей место переоценки значения линейных соотношений и основанных на них теорий. В конце раздела 2.6 автор даже называет линейную теорию упругости «модной». С этим, конечно, нельзя согласиться. Другое дело, что линейная теория упругости, если говорить о пространственной задаче, дает приемлемые результаты для каждого материала лишь до определенных комбинаций значений компонентов напряжений. Но это, разумеется, не мода.

Заметим, кстати, что влияние меры отклонения зависимости σ—ε

от линейной на напряженное состояние тем меньше, чем меньше неоднородность поля напряжений.

В XVIII веке количество исследований, посвященных нелинейности зависимости σ—ε, превосходило утилитарные потребности того времени, поскольку исследователи еще не отчетливо представляли, что использование этой зависимости в теории намного сложнее, чем линейной зависимости. С конца первой четверти XIX века это стало очевидным.

Конечно, если бы было такое парадоксальное положение, что нелинейная зависимость σ—ε и лучше отражала бы природу явления, и позволяла бы построить более простую теорию, чем линейная, то было бы совершенно неразумно принимать в качестве основы для построения теории линейную зависимость.

Если же отрешиться от утилитарного значения линейной аппроксимации и пытаться находить зависимость σ—ε на основе как можно более точных измерений с целью выявления физической природы деформации, то конечно обнаружение этой нелинейности является важным.

Настоящая книга полезна не только специалистам, занимающимся экспериментальными проблемами механики, но и теоретикам, поскольку она позволяет еще раз обратить внимание на тот фундамент, на котором возводится здание теории.

Книга содержит много поучительных примеров, которыми богата история науки.

Автор подчеркивает, что, несмотря на необходимость уважать авторитеты, все же не следует быть в плену их взглядов на вещи. Так, например, если бы Кулон не высказал мнение на основе своих экспериментов, что сталь как в закаленном, так и в отпущенном состоянии обладает одинаковыми свойствами, то мультимодульность была бы открыта значительно раньше, поскольку различие в значениях модуля упругости обнаруживалось в сталях с разной термомеханической предысторией задолго до того, как этот факт нашел научное объяснение, но вера в непогрешимость Кулона приводила к тому, что экспериментаторы с недоверием относились к своим собственным достоверным наблюдениям.

Если бы не авторитет Хладни, то обнаружение различия в значениях скорости прохождения звука в железе в его опытах и опытах Био не было бы отнесено на счет ошибочности последних. Прошло много времени прежде, чем было найдено правильное объяснение этому факту, состоящее в отсутствии одной из мод колебаний в коротком образце: т. е. оба результата были достоверными.

В книге приводятся поучительные примеры отрицательного влияния на прогресс науки необоснованных амбиций ученых. В частности, если бы экспериментаторы больше уважали своих коллег, признавали получаемые ими результаты в тех случаях, когда последние отличаются от их собственных, многие явления были бы обнаружены раньше, чем это происходило на самом деле, поскольку

нередко это отличие являлось не случайным (т. е. были верны оба результата), а сам факт их неединственности представляет собой неоткрытое до того явление природы.

Поскольку автор книги лично непосредственно ознакомился с огромным количеством литературных источников, ему легко было проследить за развитием идей в историческом аспекте. Поэтому автор книги выполняет и благородную роль «седого почтенного энциклопедиста», восстанавливающего истину в вопросе приоритета в очень многих случаях, что само по себе является актом, заслуживающим всяческого одобрения.

Вместе с тем автор убедительно на ряде примеров показал, что «идеи витают в воздухе». Всем ходом развития науки и накопления информации о тех или иных фактах подтверждается то, что происходит объективный процесс подготовки почвы для нового открытия, и оно реализуется независимо и почти одновременно несколькими учеными. В этом отношении поучительна история с открытием так называемого эффекта Баушингера и сопутствующих ему и связанных с ним эффектов.

Способ изложения материала, использованный в книге, отличается той особенностью, что при всем эпическом скрупулезном и объективном освещении научной стороны вопроса автор не оставляет без внимания оценки личностного аспекта ученых-исследователей, и здесь проявляется яркая эмоциональность в подаче материала, главным образом в связи с проблемой этики в науке.

Хотя автор дает лишь в некоторых случаях, да и то не исчерпывающую информацию, относящуюся к биографиям ученых, тем не менее, обсуждая лишь научные результаты исследователей, он воссоздает в определенной мере образы этих людей. Так, героями книги, пользующимися несомненной симпатией автора, стали Шарль Кулон и Гийом Вертгейм. Последнего Дж. Белл в заголовке одного из разделов книги назвал Фарадеем без Максвелла, подчеркнув этим, во-первых, большую весомость полученных Вертгеймом экспериментальных результатов и, во-вторых, то, что после Вертгейма в ближайшие после его смерти десятилетия не нашлось ученого, который на основе этих результатов смог бы создать адекватную теорию. Дж. Белл аргументировано показал, что поставленный им в настоящей книге памятник Г. Вертгейму вполне заслужен последним. И Тодхантер и К. Пирсон посвятили Вертгейму тоже не мало, 30 страниц (стр. 698—728 в I томе), но во всем изложенном материале они явно недооценили значение его работ для теории, впрочем как и многих работ других экспериментаторов. У С. П. Тимошенко в его «Истории...» Вертгейму посвящены две страницы и при этом без каких-либо особо положительных оценок.

Напротив, автору явно не нравятся Барлоу-отец и сын, и в особенности последний в связи с недобросовестностью его отношения к Киркальди. Весьма критически подходит автор и к фигуре Томаса Юнга, несмотря на всю его многогранность и гениальность, в связи

с путаницей, внесенной им в простое и ясное понятие модуля продольной упругости, а также в связи с неточностями и нестрогостями, допущенными им в его труде «Курс лекций по натуральной философии и механическим искусствам».

Явно критически настроен автор и по отношению к А. Т. Купферу. Иногда даже возникает сомнение — так ли уж справедлив упрек в адрес А. Т. Купфера в том, что он не сделал в экспериментальной механике ничего существенного и внес в нее только путаницу. Ведь сам же автор книги признает хотя бы тот факт, что Фохт, взявшись за изучение анизотропности, прибегал к экспериментам, в определенной мере аналогичным купферовским.

Воссоздание образов исследователей в книге тесно связано с этическим аспектом науки. Акценты, расставленные автором, относятся к типичным ситуациям в историческом разрезе. Здесь и примеры огульного отрицания достижений выдающихся исследователей теми экспериментаторами, которые сами имели очень посредственные результаты, здесь и охаивание некоторыми людьми чужих достижений и наряду с этим использование их, на чем и кончался собственный вклад этих людей в науку. Здесь и недозволенные способы ведения научной дискуссии, порой заканчивавшиеся самоубийством одного из ее участников, как это произошло с Вертгеймом. Здесь и нетерпимое отношение к научной конкуренции, проявляемое порой даже весьма авторитетными учеными, такими, например, как Баушингер. Наряду с этим автор приводит и примеры, достойные подражания, например высокую этичность, проявленную Био в дискуссии по поводу результатов Хладни.

Большое значение книга имеет не только в связи с тем, что она является концентратом фактов и идей, составляющих предмет экспериментальной механики, но и потому, что, прослеживая развитие науки в историческом аспекте, автор многократно и убедительно на ярких примерах показывает, как незнание работ предшественников тормозит развитие науки, приводя к повторению ошибок прошлого или к неоправданной затрате времени на повторение уже пройденного в науке пути, порой не лучшим образом. Если бы Т. Юнг был знаком с тем, как трактовал Ш. Кулон такое важное понятие, как модуль упругости, не возникла бы та неуклюжесть в трактовке этой величины, которая была внесена Юнгом и которая использовалась довольно многими и продолжительное время.

Если бы Хладни и Био были знакомы с работами Дюло, то у них не возникла бы дискуссия по поводу численного значения модуля упругости. Но особенно поразительной является забывчивость исследователей XX века, как правило плохо осведомленных о результатах, полученных в XIX веке.

Ученые много теряют вследствие того, что до них не доходят глубокие мысли, явившиеся плодом длительных размышлений и большого практического опыта выдающихся людей, только потому, что эти мысли не были зафиксированы; тем более обидно, когда такие

мысли были зафиксированы, но утонули в океане информации и вследствие этого также оказались практически недоступными. Заслуга автора состоит в том, что он извлек порой из забытых кладов драгоценности, которые несомненно сыграют положительную роль.

Так, например, весьма ценным является высказывание Био (см. раздел 3.9) о взаимосвязи теории и опыта, т. е. высказывание по вопросу, имеющему в целом для науки первостепенное значение.

Список литературы дается в хронологической последовательности опубликования. Внутри каждого года источники расположены в алфавитном порядке фамилий авторов, в случае же наличия нескольких работ у одного автора в данном году работам присвоены последовательные номера. Отличительной особенностью списка литературы является то, что на некоторые работы ссылка дана не в тексте, а в самом этом списке в комментарии к библиографическому описанию. В тексте ссылки даются указанием на фамилию автора (в русской и в иностранной (в скобках) транскрипции с указанием года публикации и номера работы). Поскольку оригинал книги был издан в 1973 г., источники, отмеченные в списке литературы как находящиеся в печати, разумеется, давно опубликованы. Поиск же мест и дат опубликования при издании настоящего перевода книги произведен не был.

По-видимому, заслуживает быть отмеченным и следующий факт. В книге большое внимание уделено результатам исследований ее автора, относящимся главным образом к феноменам мультимодульности, переходов второго и третьего порядка и т. п., т. е. к квантованию значений параметров, определяющих функции отклика как в упругой, так и пластической областях работы материала. Представляется, что при всей значимости отмеченных фактов в поведении твердых кристаллических тел и даже желательности чистого физического их объяснения на атомном уровне, автор все же отвел в книге их рассмотрению несколько большее место, чем то требовало соблюдение пропорций, являющихся одной из основных черт энциклопедий, в отличие от монографий. Пожалуй аналогичный упрек можно сделать и в отношении расстановки некоторых акцентов при сопоставлении научных результатов очень большого числа исследователей с результатами автора книги.

Автор всюду в упомянутых выше собственных исследованиях отдает предпочтение использованию тензоров условных напряжений и деформаций, считая, что именно при этом условии отчетливо обнаруживаются установленные им закономерности. В тех местах, где автор книги использует для подтверждения своих выводов результаты экспериментов других исследователей, представленные через тензор напряжений Коши и логарифмические деформации, он производит переход к тензору условных напряжений и условным деформациям. Отмеченный факт вызывает некоторое удивление. Казалось бы, что в терминах истинных напряжений и деформаций, лучше отражающих природу напряженно-деформированного сос-

тояния тела, все свойства, присущие ему, должны обнаруживаться четче, чем в терминах условных.

Подписи к рисункам в оригинале книги разнообразны по стилю. В ряде случаев они имеют повествовательный характер, при этом иногда информация, помещенная в подрисуночные подписи, повторяет приведенную в тексте. В настоящем издании на русском языке этот стиль сохранен. Однако подрисуночные подписи в переводе несколько расширены по сравнению с оригиналом за счет перенесения некоторой информации с самих рисунков.

В оригинале книги обозначения величин, в том числе встречающиеся на рисунках, часто не упорядочены. Все эти особенности обозначений пришлось оставить без изменения в переводе. Графическая часть рисунков воспроизведена без каких-либо изменений по сравнению с оригиналом.

В переводе полностью сохранен характер упоминания автором фамилий и имен, встречающихся в тексте книги. В именном указателе кроме русской транскрипции приводится фамилия и имя на языке национальности автора. Ссылки на литературные источники, даваемые в оригинале книги в подстрочных примечаниях, внесены в текст. При этом указывается фамилия автора в русской транскрипции, а далее в круглых скобках — на языке публикации; в квадратных скобках, помещенных внутри круглых, указывается год издания и порядковый номер работы автора, опубликованной в данном году; иногда вслед за этой информацией (вне квадратных скобок) даются дополнительные сведения: номера страниц и т. п.

Перевод некоторых терминов и стандартных сочетаний слов, включающих термины, нуждается в комментариях, поскольку они относятся к необщеизвестным понятиям, но используются в книге задолго до того, как эти понятия поясняются в тексте. Поэтому для облегчения чтения книги рекомендуется познакомиться с комментариями редактора перевода «О переводе некоторых терминов», помещенными в конце книги (стр. 565).

О том, как переведены другие более редко используемые в книге термины, можно судить по предметному указателю, в котором термины даны с переводом на английский и немецкий языки.

В оригинале книги, как правило, автор сохраняет обозначения величин и единицы их измерения, использовавшиеся в обсуждаемых им первоисточниках. Поскольку все эти обозначения пояснены, это не затрудняет чтения книги. Для наиболее же «экзотических» единиц измерения, в частности использовавшихся в первой половине прошлого века в отдельных небольших немецких государствах, автор указывает эквивалент при помощи широко распространенных единиц измерения. Этот способ представления информации полностью сохранен и в переводе книги. Производить такой переход от различных систем единиц к единой во всех случаях было бы очень трудоемкой задачей, поскольку возникла бы необходимость перестройки шкал в большом числе графически представленных зависи-

мостей и пересчета большого объема числовой информации, помещенной в многочисленные таблицы. Это не было сделано ни автором, ни при издании настоящего перевода книги.

Чаще других в книге встречаются английские единицы измерения, например фунт/дюйм^2 (в английском оригинале psi — pound on square inch), единицы измерения системы МКГСС (при этом в настоящем переводе килограмм-сила обозначен кгс). В связи с этим после настоящего предисловия приводится таблица сопоставления английских единиц измерения длин, сил и давлений с соответствующими единицами измерения в системе МКГСС.

Примечания редактора перевода к тексту помещены в конце книги. Ссылки на них в тексте даются полужирными цифрами в верхнем индексе. Наряду с примечаниями иногда в самом тексте в скобках даются введенные редактором перевода пояснения; они отмечены инициалами *А. Ф.*

Предложение издать перевод настоящей книги поступило от Г. С. Шапиро после его личного контакта с автором. Читатели должны быть благодарны ему за эту инициативу, получив интересную и полезную книгу.

Распределение материала между переводчиками было следующее.

Глава I и разделы 2.1—2.15 переведены Л. И. Филиной, разделы 2.16—2.22 и 3.44—3.48 — Л. Е. Иофиным, разделы 2.23—2.29 — В. Л. Каном, разделы 3.1—3.21— В. М. Левиным, разделы 3.22—3.35— А. Г. Мордвинцевым, разделы 3.36—3.43— С. К. Канауном, разделы 4.1—4.7 и 4.28, 4.29 — А. М. Линьковым, разделы 4.8—4.22 — И. М. Черневой, разделы 4.23—4.27— Б. С. Турсуновым и разделы 4.30—4.40 — Э. А. Шраером.

Подписи под рисунками, включая информацию, перенесенную в них с самих рисунков, текст в таблицах, именной и предметный указатели переведены Л. И. Филиной. Она же выполнила обработку списка литературы.

Таблица соответствия единиц измерения длии, сил и давления в английской системе измереиия величин и в системе МКГСС

Единицы длины		Единицы силы	
Английская система	МКГСС	Английская система	МКГСС
1 дюйм	25,3995 мм	1 унция	28,35 гс
1 фут = 12 дюймов	30,479 см	1 фуит = 16 унций	0,454 кгс
1 ярд = 30 футов	0,9144 м	1 короткая тонна = 200 фунтов	0,9071 тс
1 миля	1,6093 км	1 длинная тонна = 224 фунтов	1,01604 тс

Единицы давления	
Английская система	МКГСС
1 фунт/дюйм^2 (psi)	0,0703729 кгс/см^2

Формулы соответствия температурных шкал Цельсия, Фаренгейта и Кельвина

$$C=\frac{5}{9}F-32,\quad F=\frac{9}{5}(C+32),\quad C=K+273{,}16,\quad K=C-273{,}16.$$

I. ВВЕДЕНИЕ

Как и уникальные творения великих теоретиков, открытия талантливых экспериментаторов также не подвластны времени. Ни одна книга по экспериментальным основам такого старого и такого важного раздела физики, каким является механика, не может без ущерба для истины ограничиться освещением важнейших исследований лишь одного-двух последних десятилетий. Даже беглый обзор важных экспериментов в механике твердого тела, выполненных за последние триста лет, отчетливо выявляет присущие каждому десятилетию свои проблемы, свои методы исследования, свои критерии качества, выдвигаемые со своих собственных исторических позиций. Всякий огульный подход к объяснению какого-либо явления, в котором не учтены все заслуживающие внимания суждения прошлого, является недолговечным. Замечательные эксперименты Кулона и Хладни в восьмидесятых годах XVIII века, Дюпена и Дюло в конце первого десятилетия XIX века, Вильгельма Вебера и Вика в тридцатых годах, Вертгейма, Треска и Кольрауша в середине XIX века, Штраубеля и Грюнайзена в начале XX века не уступают по своей значимости лучшим современным исследованиям.

История механики твердого тела вплоть до настоящего времени богата примерами, таящими в себе ошибки экспериментов, появившихся в свое время в целях «проверки» некоторых популярных тогда теорий и вызывавших путаницу, длившуюся в исключительных случаях до полустолетия. Так, Каньяр де Латур в 1827 г. объявил, что ему удалось измерить изменение объема растягиваемой проволоки с помощью метода, который, как легко было показано позднее, вообще не годится для получения какого-либо вывода, а Пуассон в том же 1827 г. заявил, что работа Каньяра де Латура находится в согласии с его только что развитой атомистической теорией упругости. Значительно позднее экспериментов Вертгейма 40-х и 50-х гг. XIX века, которые к удовлетворению Коши опровергли это предполагаемое соответствие, Сен-Венан и многие другие исследователи в 60-х и 70-х гг. все еще ссылались на результаты Каньяра де Латура, в подтверждение применимости одноконстантной линейной теории

упругости Пуассона — Коши, и это невзирая на множество экспериментальных фактов, противоречащих такому утверждению. Точно так же эксперименты Купфера в 50-х гг. XIX века, ставившие целью определение значений констант упругости, установление их зависимости от температуры и вязкости и соотношений между ними, т. е. эксперименты, ошибочность которых стала известной уже в 60-е годы, все еще решающим образом влияли на представления Пирсона, когда он в 80-х и 90-х гг. XIX века писал свою часть знаменитой истории теории упругости.

Во многих случаях интересным наблюдениям какого-либо экспериментатора в некоторой области давалась совершенно неадекватная интерпретация; основываясь на последней, уже вовсе без прочтения оригинальной работы, в течение десятков лет приводились цитаты в подтверждение предложенного толкования, которое фактически вовсе не основывалось на эксперименте. Интересными примерами такой ситуации могут служить некоторые аспекты классической работы Треска 60-х гг. XIX века по квазистатической пластичности или работ Джона Гопкинсона 1872 г. и Людвика 1909 г. по динамической пластичности и вязкопластичности.

Часто говорят, что в то время как всякая теория, чья цель состоит в интерпретации физических наблюдений, рано или поздно будет вытеснена другой более совершенной теорией, результаты выдающегося эксперимента остаются как ценность навсегда. Хотя существуют некоторые области, в которых, с целью ставшего доступным повышения точности, возникает потребность со временем в повторном эксперименте, но правда и то, что за прошедшие триста лет в механике твердого тела накопилось немало экспериментов, которые остаются классическими благодаря полученным в них качественным открытиям и сохраняют свое значение независимо от постоянного стремления повысить уже достигнутый уровень точности эксперимента до следующего десятичного знака.

Как экспериментатор, интересующийся динамической теорией пластичности, я убедился несколько лет назад, что для понимания эксперимента существенно, чтобы я, или мои студенты и я, повторили в моей лаборатории все важные эксперименты, выполненные в этой области за прошедшее столетие. Приобретенный таким образом опыт оказал большое влияние на написание настоящей книги. Моим желанием было произвести такую критическую оценку экспериментов, даваемую экспериментатором (by an experimentist [1]), как я, иссле-

[1]) Термин «испытатель» (experimenter), т. е. лицо, производящее опыты, предпочитается многими термину «экспериментатор» (experimentalist), переживающему ныне тяжелые времена. Последний широко используется применительно к самым разным людям; начиная от тех, кто что-то измеряет с какой-то целью, и кончая некоторыми представителями математизированных наук, которые, как та индианка из поговорки, с готовностью шагают по следам своих мужей-теоретиков. Я решил вернуться к термину experimentist («экспериментатор»), который, как объяснил мне мой научный редактор, с почтением используется уже с 70-х гг. XVII века. В дополнение к производству экспериментов экспериментатор (expe-

довавшим экспериментальные основы механики твердого деформируемого тела, чтобы как теоретик, так и экспериментатор могли прийти к некоторому пониманию того, что же на самом деле представляют собой эти основы.

Поскольку при написании работы я все время не забывал о теоретике, я понимал, что экспериментатор может принести теоретику лишь один подлинный дар: систему взаимосвязанных надежных физических фактов, лишенных ошибочных предпосылок и скрытых вспомогательных эмпирических допущений. Гипотезы, необходимые для такого упрощения математической формулировки, при котором может быть получено приемлемое аналитическое решение, к несчастью, слишком часто не соответствуют той физической ситуации, которую приходится использовать для упрощения постановки опыта, позволяющего получить содержательное экспериментальное решение. Роль экспериментатора окажется крайне ограниченной, если он будет довольствоваться рассмотрением лишь тех кусочков и обрывков данных, которые соответствуют принятой теории и только потому, что она позволяет получать аналитическое решение. Физики XIX столетия хорошо понимали, что функция экспериментатора состоит в установлении системы надежных экспериментальных фактов в ранее неисследованных и необъясненных областях, чтобы тем самым стимулировать теоретические исследования. Я считаю, что это обстоятельство было немаловажным фактором научной жизни большинства теоретиков того времени. Однако многие экспериментаторы XIX века, в особенности Вика в 30-х гг. и Вертгейм в 50-х гг., обращались к геометрам [2] того времени с просьбой рассмотреть теоретически тот или иной неожиданный экспериментально обнаруженный факт. Некоторые из таких явлений, например открытые Вертгеймом в 1850 г. зачатки того, что сейчас называют эффектом Пойнтинга, должны были ждать почти столетие, прежде чем компетентные геометры вняли этому призыву; первоначальные эксперименты к этому времени были уже давно забыты и заменены другими наблюдениями тех же явлений.

Существенно рассматривать роль экспериментатора несколько иначе, чем это обычно делается. Он может значительно углубиться в области, которые остаются необслуженными аналитическими методами из-за больших трудностей, или в области, интерес к которым уже утрачен из-за того, что все относящиеся к ним задачи объявлены решенными. Поскольку в пределах некоторого уровня точности один и тот же эксперимент может находиться в соответствии с несколькими теориями, основанными на разных предпосылках, и так как в любой данной ситуации может случиться, что в наличии имеется

---

rimentist), как я его понимаю, это человек, занимающийся независимым и систематическим использованием экспериментов для раскрытия и объяснения явлений природы, которые либо могут, либо не могут быть успешно рассмотрены теоретиком [1].

лишь одна такая теория из числа родственных теорий, которые еще только будут созданы, очевидно, что экспериментатор не «проверяет» теории. Более того, так как конкурирующие теории основаны на различных системах начальных предпосылок, было бы ошибкой предполагать, что соответствие между опытными данными и предсказаниями теории утверждает справедливость какой-либо системы таких предпосылок. Произвольность выбора этой системы предпосылок, которая, как это часто бывает на практике, вместе с тем ведет к аналитическому успеху, в конечном счете может (и почти неизбежно должна) скорее затуманивать, чем вскрывать физические зависимости. Разница невелика — небольшое ли число людей в пределах ограниченного промежутка времени или большинство людей в течение жизни целого поколения приходят к согласию в выборе частного направления посредством игнорирования некоторых наблюдений в пользу других, окончательный результат оказывается одним и тем же, а именно,— возникает необходимость проследить процесс развития идей вплоть до некоторого уровня, находясь на котором не обратили внимания на наличие абсурдности. Ввиду того, что рано или поздно экспериментальные данные некоторого вида можно заставить совпасть с той или иной правдоподобной гипотезой, позволившей добиться успеха в аналитическом решении, для сохранения контакта с Матерью-Природой необходимы независимые экспериментальные исследования. Ряд видных экспериментаторов один за другим, включая такие заметные фигуры XVIII и XIX веков, как Кулон, Био, Дюпен и Вертгейм, недвусмысленно заявляли, что на цели их экспериментальных исследований тогдашние теории не оказывают влияния, хотя эта точка зрения, как показала история, мешает новым открытиям легко получать признание.

Истинный экспериментатор последовательно использует взаимосвязь теории с экспериментом, сознавая, что в данное время есть объекты, которые невозможно исследовать с помощью хорошего эксперимента (как и с помощью хорошей теории), и старается оценить исследуемые величины с разных точек зрения, а также провести перекрестную проверку всех необходимых эмпирических предпосылок перед публикацией результатов. В этой книге я стремился сделать указанные критерии основой для отбора и последующей критики различных экспериментов, обсуждение которых в нее включено.

Перед экспериментатором в области механики твердого тела стоят две основные проблемы. Первая, и наиболее важная, состоит в установлении содержания и формы определяющих уравнений для широкого разнообразия тел, встречающихся в природе. Эти уравнения отражают физические свойства материала и их можно составить только на основе эксперимента. Вторая проблема, которую можно было бы озаглавить проблемой размерности, состоит в экспериментальной проверке того, вызовут ли заданные частного вида распределения сил и (илн) перемещений, имеющих место на поверхности тела конечных размеров и определенной формы, в действительности

те распределения напряжений, деформаций, перемещений, скоростей частиц, поворотов, а также те магнитные, электрические и температурные поля, которые соответствуют заданной системе определяющих соотношений.

Фактически эти два аспекта экспериментального исследования почти всегда неразделимы. Эксперименты выполняются с образцами ограниченных размеров, к которым прикладываются нагрузки и перемещения. Изучение распределений напряжений и деформаций, возникающих в результате таких воздействий, позволяет получить определяющее уравнение. Вероятно, ни один другой отдельный фактор в экспериментальной механике не приводил к бóльшим ошибкам в установлении характера определяющих уравнений в некоторой неизбежно сильно ограниченной области, чем неверная интерпретация зависимостей между напряжениями и деформациями, которая возникала вследствие того, что предполагаемые их распределения фактически не реализовывались. Поскольку приходится иметь дело с шестью компонентами как напряжения, так и деформации, и только в наиболее совершенных экспериментах удается измерить одновременно два или, самое большее, три из них, необходимо искать способы такого приложения нагрузок и такого выбора геометрических характеристик, которые придают нулевые значения нескольким компонентам напряжений, деформаций, перемещений и поворотов во всем объеме тела.

Более столетия было обычным (даже среди ученых) отбрасывать нежелательные экспериментальные результаты на основании произвольной аргументации наподобие такой, что образцы должно быть были неоднородными или анизотропными (если предполагались однородность и изотропность) или неверно ориентированными (если предполагалась некоторая частная форма анизотропии). Такой огульный неучет фактов может вызвать подозрение, но вместе с тем и на самом деле изготовление образцов, с учетом их температурной и механической истории, представляет для экспериментатора одну из самых фундаментальных трудностей. Если не считать нескольких известных исключений, производить измерения удавалось только на поверхности твердого тела, и если не иметь в виду отмеченные исключения, то для интерпретации опытных данных требовалось выполнение интерполирования по объему тела. В каждом эксперименте всегда первостепенно важен вопрос: действительно ли образец таков, каким его себе представляет экспериментатор?

Вследствие этого, если исключить тех, кто проводит многочисленные опыты по установлению зависимости между нагрузкой и деформацией без малейшего в них личного участия, а возможно, даже не имея представления о методах изготовления образцов, об их химическом составе, структуре, не говоря уже о температурной и механической историях, очевидно, что серьезный экспериментатор сталкивается с труднейшей задачей установления, для своего собственного удовлетворения, того факта, действительно ли получаемые им

в опыте значения именно те, которые его интересуют. Как будет весьма подробно показано далее, первым экспериментатором, понявшим это до конца, был один из величайших экспериментаторов в этой области науки — Гийом Вертгейм, который в 40-х гг. прошлого века сам изготовлял образцы, определял плотность и чистоту их материала и весьма подробно описывал способы изготовления образцов. Не случайно, что именно он стал фактически основоположником современной науки об экспериментальных методах в механике твердого тела.

В 1787 г., когда Хладни обнаружил замечательные рисунки из песка, которые могут быть получены при поперечных колебаниях пластинок различных форм, размерность задачи стала сама по себе предметом экспериментального исследования. Эксперименты Хладни восхищали два поколения ученых и безусловно стимулировали широкое экспериментальное и теоретическое изучение колебаний пластинок и оболочек, результаты которого составляли значительную часть статей по экспериментальным исследованиям с конца XVIII века до настоящего времени. Многие работы, например работы Савара в 20-х и 30-х гг. XIX века, Кирхгофа в 50-х гг., лорда Рэлея в конце XIX века и Миндлина в нашем веке были предприняты для того, чтобы исследовать разнообразные краевые задачи, возникающие в результате моделирования поведения материала при помощи линейной теории упругости.

Начиная с экспериментальных работ Мусшенбрука по устойчивости сжатых стержней, выполненных в начале XVIII века, и классических теоретических работ Эйлера по тому же вопросу, публикуется огромное все возрастающее число экспериментальных работ, в которых описываются сложные случаи потери устойчивости тел всевозможных геометрических форм. Однако, в отличие от краевых задач теории колебаний, для которых многочисленные эксперименты XIX и XX веков дали поистине поразительную согласованность их результатов с предсказаниями теории, экспериментальные данные в задачах устойчивости упругих тел, начиная с первых опытов в области малых деформаций, выполненных Альфонсом Дюло в 1812 г., и до наших дней, в самой своей основе сопряжены с фундаментальными трудностями. Значительный разброс экспериментальных результатов обусловлен тем фактом, что поведение конструкции при потере устойчивости весьма чувствительно к мельчайшим подробностям характера приложения нагрузки, к малейшим отклонениям от идеальной формы и к локальным отклонениям от однородности образца.

Третьим вопросом, связанным с размерностью проблемы, который впервые широко исследовал экспериментально Итон Ходкинсон в 30-х гг. прошлого века, был вопрос о соударении тел одинаковой или различной формы. Помимо экспериментаторов, которые использовали удар, чтобы изучить волны, порождаемые им в твердом теле, было много исследователей после Ходкинсона, пытав-

шихся упростить проблему удара, главным образом ради технологических приложений. Хотя такие приближенные подходы не представляли большой ценности для науки, они продемонстрировали важность формы образца при исследовании динамики твердых тел.

Существует много примеров того, как исследование размерности задачи, выполняемое для чисто технологических целей непосредственно приводило к увеличению фундаментальных знаний в области механики твердого тела или стимулировало его. Опыты с образцами конечных размеров независимо от преследуемых ими целей уже самим обилием своих результатов проливали свет на ограниченность возможностей испытательной аппаратуры, которую следовало учитывать при проектировании новых ее образцов. К счастью, для техники, в целях проектирования, достаточно тех надежных цифр, которые дают результаты эксперимента: «коэффициент запаса» или пропорциональная ему величина «фактор незнания» перебрасывают мост между успехом промышленности и шатким научным основанием его.

Однако из числа экспериментальных результатов такого типа и, в частности, огромного количества статей, посвященных краевым задачам линейной теории упругости, лишь немногие представляют глубокий научный интерес. В этой книге я не ставил перед собой непосильной задачи проследить во всех подробностях развитие и современное состояние исследования краевых задач со всеми его успехами и неудачами, не говоря уже об оценке их значения для развития техники. Кроме того, в самом начале работы я решил исключить из рассмотрения бóльшую часть обширной литературы по разрушению, прежде всего потому, что трехсотлетний опыт разрушения образцов из материалов всех видов, начиная от костей кита и кончая сталью, при почти всех возможных комбинациях условий проведения испытаний, не вскрыл пока каких-либо общих черт поведения твердых тел. Главная часть этой книги связана, таким образом, с основной проблемой экспериментальной механики твердого тела: установлением определяющих соотношений.

По идее эта экспериментальная задача проста. На поверхности образца или внутри его создаются усилия и перемещения с точно известной пространственно-временной историей и наблюдаются распределения напряжений, деформаций, перемещений и поворотов по всему образцу в течение достаточно длительного промежутка времени. Произвольное изменение историй нагружения и кинематических воздействий, которое происходит в многомерном пространстве компонентов и в интервалах от долей микросекунды до года, сопровождается известными историями окружающей температуры, а также магнитных и электрических полей. Химия окружающей атмосферы, предшествующие температурная, механическая и химическая истории образца, воздействие радиации и тому подобное создают бесконечное число ситуаций, в которых можно испытывать образцы бесчисленных твердых тел, имеющихся в природе.

Мастерство экспериментатора, так же как и теоретика, в немалой степени характеризуется проницательностью и вкусом в отборе подлежащих исследованию объектов и ситуаций. Важная задача, исчерпывающе исследованная крупным экспериментатором, способна открыть общие закономерности и модели в понимании новых явлений, присущих широкому классу тел, и в то же время продемонстрировать замечательные особенности, имеющие место в частных случаях. В значительной части исследований по механике сплошных твердых тел, с начала XIX века, выбор задачи диктовался практическими запросами техники и находился под их влиянием. Такая попытка служить двум господам приводила к компромиссу, при котором избирались для широкого изучения, повторного изучения и подробнейшего освещения в литературе сугубо индивидуальные неизвестной природы стальные образцы, образцы из сложных металлических сплавов, не содержащих железа, или крайне чувствительные к способу изготовления образцы из неметаллических веществ. Обилие различающихся результатов сильно повлияло на общее отношение к предмету, породив широко распространенное предубеждение, будто результаты эксперимента с твердыми телами существенно зависят от индивидуальных особенностей каждого образца. Но время и независимо мыслившие экспериментаторы, стремившиеся к простоте и вместе с тем учитывавшие как текущее состояние тела, так и его предшествующую историю, продемонстрировали, что точность и порядок в экспериментальных методах механики твердого тела все же существуют.

Значения величин, подлежащих измерению, включая напряжения, деформации, перемещения, скорости частиц, параметры, определяющие ориентацию кристаллографических плоскостей и направлений относительно поверхности тела, жесткие повороты, температурные, электрические и магнитные поля, как внешние, так и порожденные деформациями, могут быть найдены, что хорошо известно, при помощи весьма разнообразных методов, каждый из которых применим в тех или иных конкретных ситуациях. Многие экспериментаторы, приверженные некоторому конкретному способу измерений, пригодному для измерения конкретной величины, отбирают исследуемые задачи исключительно по этому признаку (по признакам удобства использования определенного способа измерения величин) и, таким образом, тратят все свое время на изучение некоторого узкого ограниченного круга вопросов. Еще ни одна лаборатория не преуспела в освоении всех существующих методов испытаний и не приобрела той гибкости, которой достигают многие теоретики в применении орудий своего ремесла. Само собой разумеется, что подразумевается овладение некоторыми разнообразными системами методик, хотя большинство великих экспериментаторов для своего собственного спокойствия мало интересовались этим аспектом предмета. Тем не менее, как это ни удивительно, именно им принадлежит бóльшая часть новшеств в области экспериментальных методов.

Экспериментатор может сделать за конечный промежуток времени лишь некоторое количество дел. Я нахожу обязательным, чтобы в лаборатории было готово к применению достаточное число методов измерения основных величин с тем, чтобы экспериментатор был, насколько это возможно, независим от техники в выборе направления исследований. Каждое десятилетие, начиная, конечно, с середины XIX столетия, характеризовалось чрезмерным использованием какого-то одного из известных в то время методов измерений, ограниченность которого много раз подсознательно предполагалась при попытках извлечь из него новые возможности. Одним из многих недавних примеров служат ультразвуковые методы; были проделаны десятки тысяч измерений скорости волны в буквально сотнях типов конструкций и элементов в широком диапазоне температур при различных внешних давлениях и т. д., в результате этого за последние пятнадцать лет образовалась столь обширная литература, что трудно даже перечислить названия работ, не говоря уже о том, чтобы критически рассмотреть их. Вместе с тем лишь относительно немногие исследования по применению ультразвука касались различных аспектов общей механики твердого тела и в еще меньшем числе работ ставился вопрос об использовании для интерпретации результатов линейной теории упругости.

Другим примером является метод фотоупругости: большинство исследователей, использующих этот метод, сконцентрировали свое внимание на анализе моделей конструктивных форм объектов. В относительно небольшой части из огромного количества статей в этой области обнаруживается какой-то интерес к исследованию свойств материалов или к обобщениям, которые могут быть связаны в первую очередь с образцами из материала с двойным лучепреломлением.

При написании этой книги, когда я отбирал эксперименты, которые, как мне казалось, действительно лучше всего отражают итог и существо того, что известно, или служат примерами слабости теории и практики эксперимента, я тщательно, критически подходил к рассмотрению этой стороны методов, а также к оценке отношения каждого экспериментатора к сделанному им самим: последнее выявлялось как через содержание опубликованных статей, так и посредством моего собственного детального изучения полученных им результатов. При написании этой книги я постарался подвести итог моим изысканиям и отослать заинтересовавшегося читателя к оригинальным статьям. В то же время при обсуждении работы каждого экспериментатора я считал существенным обсудить непосредственно в рамках настоящей книги результаты каждого эксперимента, упомянутого в ней, и тех, которые оказались важными, и тех, которые иллюстрируют экспериментальные ошибки. Я считаю потерей времени приводить один за другим потоки ценных суждений о добившихся успеха экспериментаторах без подробного одновременного представления сущности тех основных идей и выводов, которая содержится в его данных. Опускать такие подробности было бы рав-

носильно тому, как писать историю математики, или точнее историю выдающихся математиков, без использования математики как таковой.

Следуя правилам и принципам, описанным мною выше, я обнаружил сразу же при составлении плана книги, что все же потребуется ознакомление с очень обширной литературой. Мне стало также ясно, что большинство важных исследований даже теперь, после трехсот лет развития экспериментальных методов, все еще связано с телами простейших геометрических форм из простейших твердых веществ. Чаще всего в экспериментах рассматривается задача, которую впервые исследовал Роберт Гук [1]) в 1678 г., а именно одноосное нагружение цилиндрического образца, который считается однородным и изотропным телом. К 1820 г. или даже к 1830 г. этот простейший из всех в механике твердого деформируемого тела эксперимент раскрыл такое множество природных явлений, что они исследуются вплоть до настоящего времени.

Точность, достаточная для того, чтобы установить зависимости между нагрузкой и деформацией при малых и больших деформациях, была достигнута в 30-х и 40-х гг. прошлого века. Открытие таких явлений, как ползучесть, эффект Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье), обнаружение и изучение зависимости упругих постоянных от температуры, зависимость вида кривой напряжение—деформация от наличия электрических и магнитных полей, упругое последействие, термоупругое поведение и др.— все это появилось в период интенсивного развития обсуждаемой области науки до середины XIX века. Стало ясно, что понадобится очень длительное время, прежде чем будет изучено поведение твердых тел даже в условиях одномерного напряженного состояния; такая точка зрения сохранилась до сих пор.

Имелось много экспериментальных исследований на кручение стержней, начатых работами Кулона в 80-х гг. XVIII века и продолженных Дюло в 1813 г., в которых к середине XIX столетия упор делался на изучение полых образцов различных поперечных сечений. В течение всего прошлого века получило широкое развитие сравнение данных экспериментов на одноосное нагружение и кручение, проведенных в квазистатических условиях и в условиях колебаний. Проводились также многочисленные попытки рассмотреть одновременно задачу распространения одномерной волны при одноосном нагружении в условиях линейной упругости.

Третьим типом напряженного состояния, исследование которого также началось в середине прошлого века, было состояние, возникающее при гидростатическом давлении. Измерения деформаций

[1]) Идея удлинения образца под действием сил тяжести еще до Гука появилась в одном из рисунков Леонардо да Винчи [см. Труселл (Truesdell [1960, 1], стр. 19, 20). Однако предложение Леонардо да Винчи касалось определения значения разрушающей нагрузки. Как отметил Труселл, нет никаких указаний на то, были ли соответствующие опыты когда-либо осуществлены в действительности.

всесторонне сжатых твердых тел, которые начали Рено и Вертгейм, привели в конце концов, как известно, к исчерпывающим исследованиям Бриджмена, выполнявшимся на протяжении более пятидесяти лет нашего столетия.

Эксперименты, посвященные более сложной ситуации при изгибе, в которой определялись как деформации [3], так и нагрузки, начались в самом начале прошлого века с рассмотрения квазистатических условий. Последние были хорошо изучены уже в конце XVIII века в процессе динамических исследований.

В наше время поучительно проследить за той дискуссией, которая велась между экспериментаторами в течение XIX и XX столетий относительно существенных расхождений, которые были обнаружены между предсказаниями элементарной теории и экспериментальными наблюдениями. Еще в 1811 г. стало известно из хорошо поставленных экспериментов, что прогибы деревянных балок растут нелинейно и что упругая линия лучше аппроксимируется гиперболой, чем теоретической кривой, получаемой на основе линейной теории балок. В течение всех остальных десятилетий XIX века один экспериментатор за другим демонстрировали на образцах из различных материалов, что при кручении, изгибе, одноосном нагружении как на сжатие, так и на растяжение тщательные измерения показывают существенную и (к концу прошлого века неизменно обнаруживаемую (воспроизводимую)) нелинейность, которая проявляется при малых деформациях многих твердых тел, включая обычные металлы, и которая может быть обобщена и представлена аналитически. Измерения деформаций при одновременном изгибе и кручении образца проводил Кирхгоф в 50-х гг. прошлого века, а Карман в 1911 г. изучал одноосную деформацию при одновременном воздействии гидростатического давления. Исследование деформационных свойств человеческих тканей — костей, мышц, нервов и т. д.— началось в 40-х гг. прошлого века и в следующие три десятилетия породило широкие и стимулировавшие дальнейшее изучение вопроса исследования деформационных свойств живых и мертвых органических веществ при растяжении. В 60-х гг. XIX века в классических работах Треска по течению твердых тел впервые был введен предмет экспериментирования, который уже столетие подвергается спорам и объяснениям. Оригинальные эксперименты Треска по сей день остаются уникальными по своему значению.

Двадцатое столетие, которое прочно покоится на фундаменте девятнадцатого, до известной степени просто перепроверяло со все возрастающей точностью многое из того, что было исследовано ранее. Усовершенствование методов эксперимента, которое в XIX столетии позволяло физикам-экспериментаторам в каждом новом десятилетии исследовать новые задачи, разумеется, сильно повлияло на XX столетие, особенно в области динамических опытов. Исследования волн высокой частоты позволили рассматривать напряженные состояния более общего вида. Исследование конечных деформаций

монокристаллов и поликристаллов в условиях нагружений, в которых создаются скорости деформации со значениями, изменяющимися в диапазоне 13 десятичных порядков, включая квазистатические истории напряжений, продолжающиеся дни, месяцы или годы, или истории напряжений, вызывающие большие деформации за доли микросекунды и все же поддающиеся измерению,— все это расширило экспериментальные горизонты и в значительной степени явилось следствием развития новых оптических и электронных методов измерений.

Вслед за Бриджменом, впервые исследовавшим поведение твердых тел при очень медленном сжатии под высоким давлением, другие экспериментаторы позднее использовали взрывные нагрузки, чтобы получить поля еще более высокого уровня в микросекундные интервалы времени. Если окажется возможным определять, что́ представляют собой на самом деле такие пространственно-временные распределения напряжений, то это может открыть новую область исследований, не ограниченную лишь изучением одно-, двух- и даже трехмерных напряженных состояний как таковых.

Эксперименты Ривлина по изучению упругости резины при конечных деформациях, проведенные в 50-х гг. нашего века, представляют собой классический образец исследования; они убедительно показывают, какого успеха может добиться механика твердого тела, если исключительная проницательность исследователя одновременно фокусируется и на теории, и на эксперименте.

За прошедшие полтора десятилетия мои собственные экспериментальные исследования позволили вскрыть незамеченную до тех пор упорядоченность поведения отожженных кристаллических твердых тел при больших деформациях, которая подчиняется описанию посредством обобщенных, линейно зависящих от температуры определяющих соотношений при простом и сложном нагружениях. Те же самые экспериментальные исследования обнаружили существование устойчивости структуры материала в кристаллических телах в виде дискретного распределения типов деформаций и переходов второго порядка, которые происходят при фиксированных предсказуемых деформациях, существоваиие соответствующей квантованной структуры для совокупности значений постоянных упругости элементов.

Таким образом, к настоящему моменту XX столетия мы обнаруживаем, что экспериментальные основы механики твердого тела состоят из большого объема знаний, относящихся к определяющим соотношениям для классов твердых тел, включающих несколько упомянутых выше и многие другие, причем успех неизменно достигался при рассмотрении тел простейших форм, выполненных из простейших материалов.

Во многих областях, в рамках известных представлений, современная теория, по-видимому, удовлетворительно объясняет все достойные доверия экспериментально наблюденные факты. Установ-

лено, что во многих случаях некоторые частные теории согласуются с частными в той же мере данными, известными из экспериментов. Однако в поразительно большом числе случаев, известных исследователям, надежных знаний, соответствующих правдоподобным теориям, которыми можно было бы объяснить уже выполненные экспериментальные наблюдения в этой области, до сих пор нет.

Тот факт, что этот раздел физики до конца третьей четверти XX века остается жизненно важным и стимулирующим развитие науки предметом фундаментальных исследований, является одним из уроков, которые следует извлечь из внимательного изучения трехсотлетней истории развития экспериментальных методов в механике твердого тела, начиная с пионерных опытов Роберта Гука в XVII столетии.

Замечания об источниках. При написании этой книги по работам XVII и XVIII веков до времени Кулона мне представился бесценным классический труд К. Трусделла *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies*, 1638—1788. Что касается периода, начиная с 1780 г. и до настоящего времени, то мне очень скоро стало ясно, что я должен систематически изучить один за другим все тома научных и технических журналов, относящихся к предмету книги.

Я убедился, что составить свою собственную библиографию источников XIX века по экспериментальным методам в механике твердого деформируемого тела мне существенно помогла книга *Royal Society of London Catalogue of Scientific Papers (1800—1900)*. Эта книга позволила мне заполнить допущенные мною пропуски и дала несколько новых тем. Карл Пирсон, который написал раздел, посвященный эксперименту в книге Тодхантера и Пирсона *A History of the Theory of Elasticity*, включил большое количество экспериментальных исследований, не имевших серьезного значения. Часто на его суждения влияют факторы, не относящиеся к оценке эксперимента. Большое число важных исследований обходится Пирсоном по теоретическим соображениям, в то же время по тем же соображениям делается акцент на многие работы меньшей важности. Два тома Тодхантера и Пирсона, быть может, очень ценны как исторический источник по теории упругости, но в той части, которая касается экспериментов, к ним следует подходить с осторожностью.

О. Д. Хвольсон в своем «*Курсе физики*» (Traité de Physique) в 1908 г. описал и привел детали многих экспериментальных исследований XIX века, которые рассматриваются в настоящей книге. Подход Хвольсона был скорее описательным, чем критическим, и я нахожу, что многие из работ, на которые он ссылается, лишь косвенно относятся к обсуждаемому им предмету. Тем не менее указанная книга позволила провести дополнительную проверку источников, относящихся к XIX веку. Подобным образом третий том Джеймса Р. Партингтона *An Advanced Treatise on Physical Chemistry*, опубликованный в 1952 г., который скорее ставил целью дать широ-

кий обзор экспериментальных результатов, чем проверить их источники, позволил обратить внимание на несколько более ранних источников. Книга С. П. Тимошенко «История науки о сопротивлении материалов» (S. P. Timoshenko. *History of Strength of Materials*, 1953) [4], давая неэкспериментальную основу прикладной механики для некоторых из изложенных в настоящей книге проблем, содержит очень мало информации собственно по экспериментам.

Я смог включить сюда лишь малую часть той обширной литературы по экспериментальной механике твердого тела, которая накопилась за прошедшие три столетия. Я отбирал почти исключительно те исследования, которые казались мне главными источниками для описания основ этого раздела физики твердого тела.

Благодарности. Редкому автору так повезло на редактора, как мне. Моя благодарность Клиффорду Трусделлу за его мудрую критику и его труд по удалению неудачных слов и неуклюжих фраз из моей книги уступает лишь моему восхищению его ученостью. И если в этой книге найдутся прегрешения против безупречной прозы, которой добивался мой редактор, то это остатки моих собственных погрешностей.

Фейт Форчайн П. Мёккель оказала исключительную помощь, избавляя книгу от недостаточно четких ссылок и от в еще большей мере малоизвестных единиц измерения, занимаясь переводами с французского и временами с немецкого; ее чертежи отличались артистизмом и одновременно точностью, она перечерчивала и сверяла рисунки и делала много других скучных дел и при всем при том сохраняла бодрое настроение.

Анне-Марии Элбо я благодарен искренне за ее переводы статей, написанных по-немецки, и исполнение многочисленных иных поручений, которые она старательно и охотно выполняла. Я благодарен также Катрин Келлер, Пегги Брухэм и Руфи Стайнхарт из университета Джона Гопкинса за печатание многих из этих страниц. Библиотекари, которые помогали мне, подтвердили репутацию профессионально компетентных лиц; я особенно благодарен Люси Гекклер, Аделаиде Эйзенхарт и Марте Хаббард из университета Джона Гопкинса.

Я хочу также выразить благодарность Джералду Эриксену, который со своей обычной щедростью нашел время прочесть главы этой книги, Уильяму Хартману и Ахтару Хану, любезно согласившимся прочитать рукопись.

Особую благодарность я приберег для своей дочери Джейн, чья жизнерадостность вселяла бодрость в уставшего автора. И еще я хотел бы, хотя и неуклюже и в неполной мере, но выразить благодарность моей жене Перри, которая в буквальном смысле слова была рядом со мной, помогая мне бесчисленными способами в течение тех тысяч часов, в которые я писал и переписывал эту книгу.

II. НЕЛИНЕЙНОСТЬ ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

2.1. Введение

Явная форма функциональной зависимости в виде определяющих соотношений в механике сплошного твердого тела, как утверждал Готтфрид Вильгельм Лейбниц почти три века назад [1],— это единственное, что требуется определять экспериментально. Чтобы решить эту задачу для конкретного тела в некотором диапазоне деформаций, требуется убедиться с помощью эксперимента, что соответствующие величины, описывающие деформацию, действительно распределены в объеме тела так, как предполагалось в течение всего того времени, когда проводился опыт. В идеале это требует, чтобы для некоторого произвольного напряженного состояния, вызванного заданными поверхностными силами, поверхностными перемещениями и объемными силами, была в точности известна полная совместная система историй напряжений, деформаций, температурных, электрических и магнитных полей во всем теле, включая все компоненты напряжений и все компоненты деформации в каждой точке. В лабораторных условиях приближение к этому идеалу осуществляется путем рассмотрения таких случаев, в которых многие из параметров на протяжении эксперимента остаются постоянными.

По отношению к каждому заданному телу следует рассматривать обратимость, воспроизводимость и тип измерений и проверять все дополнительные эмпирические предположения посредством отдельных, независимых экспериментов. В равной мере важно подробное знание о предшествовавших механической, температурной, физической, химической или металлургической историях конкретного образца. При изучении как малых, так и больших деформаций экспериментатор должен систематически рассматривать функциональную зависимость определяющих соотношений от анизотропности, вяз-

---

[1]) Лейбниц (Leibniz [1690, 1]). Письмо, написанное Лейбницем Якову Бернулли (старшему) 24 сентября 1690 г. См. Трусделл (Truesdell [1960, 1], стр. 63), который пишет: «. . . он (Лейбниц) фактически утверждает, что *зависимость между удлинением и растягивающей силой должна определяться путем эксперимента...*»

костных, температурных, электрических и магнитных параметров, учитывая возможность существования критических точек, связанных с фазовой устойчивостью материала, устойчивостью геометрической формы равновесия и переходом от одного диапазона деформаций к другому.

Вместо отыскания определяющих уравнений в идеальном смысле экспериментатор прибегает к использованию существенно упрощенных, справедливых, разумеется, для более ограниченных ситуаций. Твердое тело, чьи предшествующая термомеханическая история, тип анизотропии и степень неоднородности считаются хорошо известными [1]), подвергается воздействию некоторых таких распределенных поверхностных сил, поверхностных перемещений и массовых сил, при которых можно ожидать простого известного распределения напряжений и деформаций. Измеряя такие поверхностные силы и перемещения и одновременно с ними измеряя деформации или перемещения на поверхности тела, можно сравнить наблюдаемые истории изменения напряжений и деформаций и получить, таким образом, зависимость между напряжением и деформацией.

Как в прошлом, так и в настоящее время все самые обычные неудачи в установлении того, что действительно имеет место простое распределение напряжений, приводят к ошибкам и противоречиям. В особенности это справедливо в отношении экспериментов при динамических режимах.

В XVII и XVIII столетиях экспериментаторы в области механики твердого тела чаще всего ограничивали свои исследования проблемой разрушения, для которого, начиная с XVII века и до наших дней, не удается построить не только удовлетворительной, но и даже просто правдоподобной теории. Среди ученых, работавших на заре механики твердого тела, наибольшим воображением обладали Марин Мерсенне [Marin Mersenne (1588—1648)], Эдме Мариотт [Edmé Mariotte (1620—1684)], Антуан Парен [(Antoine Parent) (1666—1716)] и Питер ван Мусшенбрук (Pieter van Musschenbrock (1693—1761)].

Комбинации значений напряжений и деформаций, при которых в хорошо охарактеризованной ситуации происходит разрушение,

---

[1]) Джон Т. Ричардс (Richards [1952, 1]; стр. 99, 100), представляя важную статью Симпозиуму по определению постоянных упругости, сделал по этому поводу следующее замечание: «К несчастью, большинство опубликованных данных по постоянным упругости не является достаточно полным в отношении химического состава и температурной обработки, экспериментального оборудования, точности, скорости деформирования и т. д. Физики часто виновны в опускании данных о химическом составе, термической обработке, в то время как металлурги повинны в пренебрежении подробностями, касающимися точности и деталей экспериментального оборудования. Например, если рассмотреть опубликованные данные по определению модуля E для меди с 1828 по 1949 гг., то 40% из 45 рассмотренных источников не содержат данных о термообработке испытанных образцов меди».

характеризуют, разумеется, границу области, представляющей некоторый интерес для определяющих соотношений, составленных так, что в них включены все соответствующие переменные и что в терминах последних эксперимент может быть воспроизведен. Литература по разрушающим нагрузкам весьма обширна и составляет значительную часть всех статей, опубликованных по механике твердого тела за последние триста лет. В работах XVIII века можно найти длинный список значений разрушающих нагрузок для различных видов камня, дерева, стекла, картона, бумаги, костей кита, слоновой кости, моржовых клыков, кожи, металлов и других материалов, обычно без указания размеров образца и очень часто без указания способа, которым проводился эксперимент [1]). Побудительной причиной к этим измерениям была надежда раскрыть тайну прочности твердых тел.

В литературе первой половины XIX века снова можно найти списки предельных нагрузок для широкого разнообразия твердых тел. Но при этом, однако, уже обычно приводятся размеры образцов, так что эти данные могут быть или были выражены через разрушающие напряжения. Эти данные начинают привлекать внимание инженера-практика, интересы которого связаны с проектированием и разрушением конструкций. За последние сто пятьдесят лет в технической литературе приведены данные о тысячах экспериментов по установлению предела прочности, которые, очень мало дав науке, принесли неоценимую пользу практике инженерного дела. Уже триста лет многочисленные исследователи, которые измеряют разрушающие нагрузки, пытаются установить эмпирические соотношения, группируя части опытных данных. За исключением случаев с весьма ограничительными условиями (и даже тут успехи более чем скромны), не появилось никакой правдоподобной общей теории разрушения.

В XIX веке, когда экспериментаторы начали проявлять интерес к явлениям в твердых телах, возникающим перед разрушением, считалось общепринятым, что для металлов, не говоря уже о камне, штукатурке, коже, резине, дереве, стекле, шелке, кошачьих кишках, мышцах языка лягушки, костях и тканях тела человека (все они изучались), линейный закон Гука из теории упругости при инфинитезимальных деформациях (Hooke [1678, 1]; переиздано в 1931 г.) является всего лишь аппроксимацией. Вместо того чтобы удостовериться, обладают ли твердые тела, включая металлы, нелинейной зависимостью между напряжением и деформацией при малых деформациях, экспериментаторы решили, что главным вопросом (этот вопрос еще оставался предметом противоречий и в начале XX века) является форма, которую принимает обобщенный нели-

[1]) Исключение составляют изящные рисунки Мусшенбрука (Musschenbrock [1739, 1]), которые изображают испытательные машины для экспернментов на растяжение и сжатие, а также его данные о поперечных сечениях образцов.

нейный закон упругости при инфинитезимальных деформациях для металлов и других твердых тел [1]).

Во второй половине XX века стало модным утверждать, что теоретическая механика твердого деформируемого тела построена при минимуме обращений к эксперименту, и что бурное развитие линейной теории упругости в первой половине XIX века с ее динамическим аналогом в электромагнетизме и главные успехи нелинейной механики в нашем столетии достигнуты специалистами, многие из которых мало уделяли внимания эксперименту, в особенности тогда, когда дело касалось определяющих уравнений. Можно, однако, указать и на то, что состояние механики твердого деформируемого тела обычно характеризуется степенью успеха, достигаемого за счет того, что теоретические предпосылки поддаются аналитическому описанию в публикациях, имеющих общий или частный характер, т. е. скорее характеризуется логической математической представимостью, нежели представимостью в терминах разумного экспериментального наблюдения, которое во многих случаях далеко уходит за пределы ограничений, обусловленных уровнем компетентности современных теоретиков.

В равной мере справедливо и то, что в конце XVIII и начале XIX века важные экспериментальные исследования появлялись редко. Главные статьи, опубликованные в 80-х гг. XVIII века Шарлем Огюстеном Кулоном (Coulomb [1784, 1]) и Эрнстом Флоренсом Фридрихом Хладни (Chladni [1787, 1]), были написаны с проницательностью и строгостью, присущими лишь лучшим работам экспериментаторов нашего времени. В последующие сорок лет были только две работы такого ранга, а именно работы Пьера Шарля Франсуа Дюпена [2]) 1811 г. о дереве и Альфонса Клода Буржиньона

[1]) Приведем два интересных примера этого. Первым служит случайное замечание референта Британского института металлов с инициалами «С. Н. D» [Cecil H. Desch], который в реферате работы Г. Колоннетти по упругости медной проволоки, обнаруживаемой при действии растягивающей нагрузки, писал: «Получен вывод, что поведение меди, которое обычно считалось сильно отличающимся от поведения модели тела общепринятой теории упругости, достаточно близко к нему, когда цикл нагружения характеризуется тем, что размах значений напряжений мал (между экстремальными значениями напряжений разница невелика). Скорость, с которой происходит изменение напряжений, очень мало влияет на общий характер цикла, хотя и отражается на некоторых численных значениях»; см. Деш (Desch [1914, 1], стр. 273).

Вторым примером служит замечание Джорджа Фредерика Чарлза Сирла (Searle [1900, 1]), чья репутация по части точности экспериментов является почти легендарной и который, доводя точность определения деформации в длинной проволоке до уровня порядка 10^{-6} и исключая в то же время влияние температурных эффектов, заявил: «С этой аппаратурой студенты Кавендишской лаборатории легко исследуют отклонения от закона Гука для медной проволоки». В книге Эгона Ларсена *The Cavendish Laboratory* (Larsen [1962, 1], стр. 48) Сирл представлен как «... лектор, обладающий большим энтузиазмом в обучении, и гений в производстве экспериментов ...»

[2]) Дюпен не публиковал эти эксперименты до 1815 г., см. (Dupin [1815, 1]). Дюпен родился в 1784 г., т. е. в том году, когда Кулон опубликовал свой знаменитый пионерный мемуар о кручении металлической проволоки.

Дюло [1]) 1813 г. о железе, выполнившими обширные серии экспериментов по малым деформациям образцов при нагрузках, намного меньших разрушающих. Между концом 20-х гг. и серединой XIX века экспериментальные исследования твердых тел заложили те основы, многие из которых доминировали в области механики твердого тела, как теоретической, так и экспериментальной, спустя более ста лет, во второй половине нашего века.

Вдобавок к открытию существенной нелинейности при малых деформациях дерева, цементного раствора, штукатурки, кишок, тканей человеческого тела, мышц лягушки, костей, камня разных типов, резины, кожи, шелка, пробки и глины она была обнаружена при инфинитезимальных деформациях всех рассмотренных металлов. Явление упругого последействия при разгрузке в шелке, человеческих мышцах и металлах; температурное последействие в металлах; появление остаточной микродеформации в металлах при очень малых полных деформациях; явление кратковременной и длительной ползучести в металлах; изменение значений модулей упругости при различных значениях остаточной деформации; связь между намагничиванием, остаточной деформацией, электрическим сопротивлением, температурой и постоянными упругости; влияние на деформационное поведение анизотропии, неоднородности и предшествующей истории температур; факторы, влияющие на внутреннее трение и характеристики затухания колебаний твердого тела; явление деформационной неустойчивости, известное сейчас, после работы 1923 г., как эффект Портвена — Ле Шателье, и, наконец, существенные особенности пластических свойств металлов, обнаруженные в экспериментах, в том числе явление при кратковременном нагружении,— все эти свойства, отраженные в определяющих соотношениях, были предметом широкого и часто результативного экспериментирования, имевшего место до 1850 г.

2.2. Нелиинейная упругость против линейной в XVIII веке

Первый нелинейный закон упругости, основанный на эксперименте, был сформулирован в письме Лейбница (Leibniz [1690, 1]), написанном в 1690 г. Лейбниц утверждал, что экспериментальные данные, которые Яков Бернулли (J. Bernoulli [1687, 1]) послал ему в декабре 1687 г. и которые были взяты из опытов со струной длиной в три фута, изготовленной из кишки животного, описываются, повидимому, гиперболой, в отличие от других экспериментов, например Гука (Hooke [1678, 1]) и Мариотта (Mariotte [1700, 1]), говоривших в пользу линейного закона. В 1695 г. Бернулли (J.Ber-

[1]) (Duleau [1820, 1]). Первое издание мемуара, относящееся к 1813 г., быстро стало недоступным; фактически в конце 30-х гг. XIX века получить его было уже невозможно. Многочисленные ученые, ссылавшиеся на работу Дюло в последующие пятьдесят лет, пользовались, как и я, повторным изданием работы осуществлеиным в 1820 г.

noulli [1694, 1]) сам предложил параболический закон

$$t = kx^m, \tag{2.1}$$

где t — удлинение, а x — продольное усилие. Как отметил Клиффорд Амброз Трусделл (Truesdell [1960, 1]), поскольку величина x пропорциональна растягивающей внешней силе, Бернулли на самом деле предполагал, что деформация пропорциональна этой силе в степени m. Георг Бернгард Бюльфингер (Bülfinger [1729, 1]), которому многие более поздние авторы ошибочно приписывали параболический закон Я. Бернулли [1]), сопоставил данные Я. Бернулли по струне из кишки кошки с зависимостью (2.1) при значении показателя степени $m=3/2$. Эти данные получены для усилий 2, 4, 6 и 8 фунтов, вызвавших удлинения, равные соответственно 9, 17, 23 и 27 линиям.

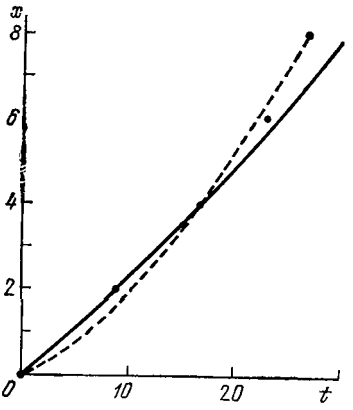


Рис. 2.1. Результаты экспериментов Я. Бернулли (1687) для струн (длиной 3 фута) из кишок. x — растягивающая сила в фунтах, t — удлинение в линиях. Кружки — экспериментальные точки, сплошная линия — гипербола, предложенная Г. Лейбницем (1690), штриховая — график параболической зависимости Я. Бернулли (1695) (при $m=3/2$ — Бюльфингер; 1724).

Сопоставление, показанное на рис. 2.1 и выполненное Лейбницем (Leibniz [1690, 1]), очень интересно с точки зрения того, какое соответствие эмпирической кривой опытным данным считалось приемлемым в начале XVIII века. Экспериментальные точки Я. Бернулли сравнивались с гиперболой Лейбница [2]) и с кривой, соответствующей (2.1) при значении $m=3/2$, предложенном Бюльфингером.

Отсутствие согласованности между линейным законом Гука и Мариотта и этими опытными данными вызвала у Лейбница интерес [3]). Стоит напомнить, что классические эксперименты Гука включали не только хорошо известные опыты с винтовыми и спиральны-

---

[1]) См. например, статью Рудольфа Мемке (Mehmke [1897, 2]) и С. П. Тимошенко [1957, 3].

[2]) Опытные данные Я. Бернулли стали известными с большим запозданием после его публикации (J. Bernoulli, [1705, 1], комментарий после леммы III), где он указал, что силы измерялись в фунтах, а удлинения в линиях. (Линия равна 1/12 дюйма≈2,1 мм.— *А. Ф.*)

[3]) Эти опыты Якова Бернулли со струнами из кишок повторил в 1721 г. Джакопо Риккати (J. Riccati [1721, 1]), следующие слова которого приводит Трусделл (Truesdell [1960, 1]);

«Я повторял опыт Якова Бернулли много раз со струнами из различных материалов; часто утверждение знаменитого автора я находил верным, но нередко эксперимент показывал противоположное... По мере того как я добавлял равные грузы вплоть до разрушения струны, до определенной точки приращения удлинений увеличивались, но затем начинали уменьшаться».

ми пружинами и менее известные опыты на изгиб сухой древесины, но и представляющиеся мне наиболее важными опыты на растяжение вертикально расположенных металлических проволок длиной от 30 до 40 футов. В той же манере, в какой многие экспериментаторы и теоретики поспешно обобщают важное открытие, Гук несколько экстравагантно заявлял относительно линейной зависимости между силой и удлинением: «Ее можно наблюдать не только в этих телах, но и в любых других упругих (springy) материалах, будь то металл, дерево, камни, спекшаяся глина, волос, шелк, кость, сухожилия, стекло и тому подобное» (Hooke [1678, 1]).

Экспериментаторам XIX века предоставлялось продемонстрировать, что для каждого из этих материалов закон Гука является всего лишь приближенным. Хотя к девяностым годам XIX века было много дискуссий относительно вида нелинейной зависимости между напряжением и деформацией для различных тел, включая металлы, однако было уже немало экспериментальных доказательств того, что нелинейность при малых деформациях является воспроизводимым фактом.

2.3. Нелинейность зависимости между напряжением и деформацией для дерева при малых деформациях: Дюпен (1815)

Первым из экспериментаторов XIX века, попытавшимся связать измерения малых деформаций с нелинейным законом упругости, был Дюпен (Dupin [1815, 1]). После окончания Политехнической школы в 1803 г., он отправился на остров Иониана (Корфу), где заинтересовался изменением формы деревянных судов после спуска их на воду. В 1811 г., в самых примитивных условиях Дюпен [1]) выполнил серию экспериментов, в которых он измерял прогибы посередине и устанавливал вид упругих кривых свободно опертых двухметровых призматических балок, выполненных из кипариса, березы, дуба и сосны. Для каждой балки, которая в поперечном сечении представляла собой квадрат со стороной в 3 см, был определен удельный вес. Сравнивались два типа внешних нагрузок: сосредоточенная сила посередине пролета и равномерно распределенная нагрузка. Нагрузка посередине пролета прикладывалась порциями по 4 кгс до максимального значения в 28 кгс. Измерение прогибов посередине пролета производилось с помощью угольника с делениями [2]), допускающего точность в 0,2 мм. Дюпен писал, объ-

[1]) Dupin [1815, 1] стр. 148. Дюпен писал: «Следует всегда помнить, что я находился в порту, где отсутствовало все необходимое, чтобы проделать работу с предельной точностью, даже точные гири, но легко видеть, что ни одно из полученных небольших расхождений между наблюденными в опыте и вычисленными величинами не выходит за рамки погрешностей допустимых для таких операций».

[2]) Тщательность, с которой Дюпен изготавливал свои балки и проводил эксперименты, отражается в следующем подстрочном примечании из его *Мемуара*,

ясняя причины, побудившие его выполнить такую серию необычных экспериментов, которые явно не служили продолжением традиции его предшественников (Dupin [1815, 1], стр. 138, 139):

«До настоящего времени пытались в основном найти сопротивление, на которое способна древесина в момент разрушения ее силами, действующими поперек волокон или в направлении волокон.

Без сомнения, эту предельную точку — предел прочности дерева — надлежит знать, чтобы использовать материалы, прочность которых выше тех напряжений, которым они подвергаются в конструкциях и машинах, будучи их частями; однако следует всегда держаться на расстоянии от этого предела, причем когда требуется создать долговечные конструкции, нужно уходить от него еще дальше, так как время непрерывно снижает прочность древесины и еще тысячи разных причин способствуют нарушению ее первоначальных свойств.

Существует другой тип исследования, не менее, а возможно, и более полезный, которым, как мне кажется, меньше всего занимались. Он состоит в сравнительном определении сопротивления древесины, когда она подвергается силам, способным лишь очень незначительно изменить ее форму, и найти, если я могу так назвать, *виртуальное сопротивление*» (Dupin [1815.1], стр. 138—139).

Дюпен обнаружил, что при очень малых действующих нагрузках прогибы пропорциональны им. Однако по мере роста нагрузки картина меняется — приращения перемещений, которые соответствуют равным приращениям нагрузки, не остаются постоянными. Из таблицы численных результатов первой серии экспериментов трудно понять, как Дюпен пришел к этому выводу, поскольку приращения прогибов различались значительно с самого начала и видна только тенденция к их увеличению с ростом нагрузки.

После обсуждения источников нескольких аномалий в опытных данных и изучения всей экспериментальной информации Дюпен, на основе исследования вторых разностей, предложил параболический закон

$$\delta = bF + cF^2, \tag{2.2}$$

где δ — прогиб посередине пролета, F — действующая посередине

которое следует принять во внимание всякому экспериментатору, относящемуся серьезно к своим результатам: «В военно-морском арсенале на Корфу, где я проводил свои эксперименты, я отобрал из бригады рабочих двух особенно искусных, одного — столяра, другого — слесаря. Почему бы не привести здесь их имена, если они были мне так полезны? Их звали Шорле и Раймон. Каждый день они готовили все, что требовалось для экспериментов на следующий день. И затем я проводил с ними от шести до семи часов. Эти молодые мастеровые, обладавшие природным талантом, пытались понять мою работу и проследить за ней. Я с удовольствием наблюдал, как они размышляют над своей собственной работой и, так сказать, сражаются со мной. Я заставлял их на реальных объектах заниматься геометрией и механикой, в то время как они обучили меня тысяче разных практических вещей, с помощью которых я смог увидеть, как много тонких и верных наблюдений вносится в дело людьми, которые ничему до этого не учились. Я думаю, что молодые инженеры должны быть как можно ближе к своим хорошим рабочим: таким образом они усовершенствуют последних и получат из этого много пользы для себя — тот опыт, который они не могут добыть сами, который рождается только ручным физическим трудом» (*там же*, стр. 140, 141).

балки сосредоточенная сила, а b и c — постоянные, которые для каждого вида древесины определялись из рассмотрения первой и второй разностей прогибов.

Дюпен в значительной степени отразил важность наблюдаемой им нелинейности, которую он исследовал с помощью вторых разностей, для конструкций деревянных судов. Он обнаружил экспериментально, что для свободно опертых балок одних и тех же размеров и с одинаковыми историями нагружения сопротивление прогибу возрастает с увеличением плотности древесины, что делает его (П. Дюпена) опыты выдающимся вкладом в механику твердого тела [1]) и что заставило Адемара Жана Клода Барре де Сен-Венана (Saint-Venant [1856, 1]) спустя сорок пять лет назвать их прекрасным экспериментом («des belles expériences»), поскольку Дюпен был первым, кто точно определил величину прогиба посередине свободно опертой призматической балки в начальной стадии нагружения при малых деформациях как функцию длины пролета, ширины и высоты поперечного сечения при заданной нагрузке, а также точную форму нагруженной балки.

2.4. Предшественники Дюпена в XVIII веке: Бюффон (1741), Дюамель (1742) и Готэ (1774)

Прежде чем дать краткий обзор сведений, соответствующих названию настоящего раздела, интересно взглянуть на состояние науки об экспериментах при медленном нагружении в течение столетия, которое предшествовало работе Дюпена. В 1742 г., отметив, что по наблюдениям Мариотта и Лейбница «всякий материал, в том числе стекло, перед разрушением слегка деформируется» и, далее, что «это принцип, принимаемый Пьером Вариньоном и Парeном», Анри Луи Дюамель дю Монсо в своей работе (Duhamel [1742, 1], стр. 456) обсуждает и изучает в самом общем аспекте положение линии неизменяющейся длины (нейтральной линии) и примыкающих к ней областей продольного растяжения и сжатия в призматической балке непосредственно перед разрушением. Как и Итон Ходкинсон (Hodgkinson [1824, 1]) восемьдесят лет спустя, Дюамель пытался исследовать это экспериментально, механически изменяя положение нейтральной линии и наблюдая, как влияет это изменение на разрушающую нагрузку. В поперечном сечении посередине пролета в балке из ивы он пропиливал щели на различную глубину, после чего вставлял в эти щели дубовые клинья; он исследовал 24 образца

---

[1]) В книге Тодхантера и Пирсона (Todhunter and Pearson, *History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, том I, стр. 162) Карл Пирсон, чьи похвалы экспериментальным работам во многих случаях не отличаются глубиной, отзывается об этом классическом мемуаре Дюпена лишь следующим кратким замечанием без всякого обсуждения:

«В этой статье нет ничего, что бы представляло математическую ценность» [1886, 1].

свободно опертых балок длиной в 3 фута и с квадратным поперечным сечением $1^1/_2 \times 1^1/_2$ дюйма. Подробности этих опытов не представляют особого интереса, за исключением того, что Дюамель считал парадоксом. Свободно опертые ивовые балки одинаковых размеров с дубовыми клиньями, вставленными в щель, пропиленную на три четверти высоты, оказались более прочными (характеризовались большей разрушающей силой, действующей посередине пролета, чем такие же ивовые балки, не имевшие разрезов [1]).

В соответствующей серии экспериментов с дубовыми балками, о которых было доложено в Королевской Академии наук в 1741 г., на год раньше Дюамеля, Жорж Луи Леклерк граф де Бюффон [2]) описал не только силу, требующуюся для разрушения свободно опертой деревянной балки, но и (важное новшество!) величину прогиба посередине пролета балки непосредственно перед разрушением. Он тщательно описал во всех подробностях состояние, вероятный возраст и дату порубки приблизительно девяноста дубовых деревьев, из которых он изготавливал балки круглого и квадратного поперечных сечений. Балки брались из сердцевины ствола, из периферии и из заболони на разной высоте свежесрубленных живых и сухостойных деревьев, возраст которых оценивался от 33 до 110 лет. Затем Бюффон перешел к длительной серии экспериментов, описанных им в подробностях, которые кажутся бесконечными. В одном месте он писал:

«Несмотря на все предосторожности и всю тщательность, с которой я делал свою работу, я часто не был ею удовлетворен. Иногда я замечал неправильности и отклонения, противоречившие выводам, которые я собирался сделать из моих экспериментов, и в моем списке содержится свыше тысячи отчетов о различных случаях, из которых я не способен был сделать никакого заключения и которые оставляли меня в очевидной неуверенности со многих точек зрения. Поскольку все эксперименты проводились с образцами квадратного поперечного сечения со стороной 1, $1^1/_2$ и 2 дюйма, большое внимание уделялось выбору древесины, чтобы она была почти одинаковой по удельному весу, чтобы образцы имели одинаковое количество слоев (годовых колец) и, кроме того, возникала почти неизбежная проблема угла, составляемого слоями дерева с гранями образца, а следовательно, и с действующей силой, при некоторых значениях которого значительно уменьшалась прочность древесины; я уж не упоминаю сучков, дефектов и чересчур косых слоев, поскольку такие образцы автоматически исключались и с ними я даже не пытался экспериментировать. Таким образом, из результатов, полученных на основании огромного числа опытов с малыми образцами, я могу с уверенностью привести лишь те, которые даны выше, а они недостаточны для составления таблиц, описывающих прочность древесины в общем случае.

Эти соображения, а также глубокое сожаление о пустых хлопотах и о потерянном времени, побуждали меня к проведению экспериментов в значительно

[1]) Дюамель (Duhamel [1742, 1] стр. 468) пишет: «Было бы весьма парадоксальным утверждать, что кусок дерева намного упрочнится, что он будет способен выдержать намного больший вес, если от него отпилить половину или четверть его толщины, однако мои эксперименты показали именно это».

[2]) (Buffon [1741, 1]), Бюффон срубил свое первое дерево для дела науки 31 марта 1734 г. Бюффон отметил, что Дюамель проводил свои эксперименты с деревянными балками до публикации его (Бюффона) *Мемуара* в 1741 г.

большем масштабе. Я ясно видел все трудности, но не мог убедить себя бросить дело, и, к счастью, результаты оказались намного более удовлетворительными, чем я ожидал» [1]).

Более удовлетворительные результаты, о которых писал Бюффон, состояли в сравнении разрушающих нагрузок с получаемыми по правилу Галилея, которое гласит: «Сопротивление обратно пропорционально длине, прямо пропорционально ширине и квадрату высоты». Сопоставляя результаты экспериментов с вычислениями по правилу Галилея, Бюффон обнаружил, что для балок квадратного сечения со стороной в 5 дюймов и длиной от 7 до 12 парижских футов [2]) это правило применимо лишь приближенно; отклонения от правила Галилея увеличиваются с увеличением длины пролета [3]).

Возможно, что наибольшую важность с точки зрения более поздних экспериментов Дюпена имели, во-первых, составленные Бюффоном обширные таблицы прогибов посередине свободно опертых деревянных балок непосредственно перед образованием трещин и непосредственно перед разрушением и, во-вторых, экспериментальное исследование влияния числа слоев (годовых колец), плотности древесины, а также расположения слоев (вертикального или горизонтального) на разрушающую нагрузку и на максимальный прогиб посередине пролета балки [4]).

В 1774 г. Эмилан Мари Готэ (Gauthey, [1774, 1]) был, как он сам отмечает, осведомлен, что предшествующие экспериментаторы, например Мариотт, утверждали, будто все тела перед разрушением слегка деформируются, однако сам он не обнаружил никаких следов такого поведения, когда сравнивал пределы прочности для свободно опертых балок из «мягкого» и «твердого» камня. Он нашел, что правило Галилея выполняется нечетко и между результатами экспериментов и предсказаниями теории нет достаточной корреляции для того, чтобы можно было высказывать суждения. Помимо того, что работа Готэ характерна для проводимых в XVIII веке экспериментов по медленному нагружению, предшествующих работам Дюпена,

---

[1]) Бюффон (Buffon [1741, 1], стр. 303, 304) утверждал, что общее число проведенных им экспериментов превышало тысячу. Поскольку каждый опыт проводился до разрушения, можно предположить, что в распоряжении Бюффона был целый лес деревьев. Интересно, что через 96 лет Питер Барлоу (Barlow [1837, 1], стр. 100—103), не внесший никакого реального вклада в эту проблему и математическая ограниченность которого сделалась предметом публичных обсуждений, объяснил неудачу Бюффона в решении проблемы разрушения отсутствием заранее продуманной теории и слабым знанием математики.

[2]) Один парижский фут равен 30,4794416 см.

[3]) Бюффон (Buffon [1741, 1]). Это, возможно, первый случай использования в технике «фактора неупорядоченности» (fudge factor).

[4]) Это, вероятно, первое указание в научной литературе на то, что в дальнейшем получило название «анизотропии». Разумеется, факт, на который обратил внимание Бюффон, был известен плотникам с незапамятных времен. Однако теоретики XVIII столетия не рассматривали анизотропии, по крайней мере в механике. Коши и Пуассону в XIX столетии только предстояло ввести это понятие в теорию упругости.

я особенно подчеркиваю тот факт, что Готэ понимал всю сложность задачи, которую он решал и что как экспериментатор он не желал соглашаться с простыми допущениями, не ставя их под сомнение.

Возможно, главный вклад Готэ в механику деформируемого твердого тела носил косвенный характер. Будучи дядей Клода Луи Мари Анри Навье, он эффективно повлиял как на процесс обучения, так и на карьеру человека, который много лет спустя сыграл самую важную роль в начальном развитии линейной теории упругости. Когда умер его отец, четырнадцатилетний Навье был взят в дом дяди. После смерти Готэ, последовавшей в 1807 г., Навье редактировал трехтомный труд своего дяди по мостам и каналам. В 1804 г. К. Навье стал студентом школы мостов и дорог (Ecóle des Ponts et Chaussées), позже он поступил туда на работу, повторяя карьеру своего дяди, который также учился и затем преподавал математику в этом учебном заведении (см. С. П. Тимошенко [1953, 1], стр. 92, 93). Влияние дяди на карьеру племянника нельзя не учитывать, если мы говорим об экспериментаторах-предшественниках начального периода развития линейной теории упругости, относящегося к 1821—1822 гг.[1]).

2.5. Детали экспериментов Дюпена с деревянными балками (1815)

Возвращаясь к экспериментам Дюпена, отметим, что его исследование прогибов посередине пролета свободно опертой балки как функции длины пролета, высоты и ширины поперечного сечения в начальной стадии малых прогибов, создало ту меру точности эксперимента, которая нужна для установления нелинейной зависимости между силой и прогибом посередине пролета. П. Дюпен, получивший математическое образование в Политехнической школе (École Polytechnique), отмечает в своем мемуаре знакомство с существовавшими до того теоретическими предложениями относительно значения прогиба посередине пролета балки как функции длины пролета, высоты и ширины (прямоугольного.— *А. Ф.)* поперечного сечения. Тем не менее он предложил «находить упругие свойства древесины строго на основе более простых экспериментальных результатов» (Dupin [1815, 1], стр. 167). На рис. 2.2 показаны результаты его измерений прогиба посередине пролета дубовых балок прямоугольных поперечных сечений 2 см×3 см и балок из северной пихты сечением 2 см×5 см при девяти различных значениях длин

[1]) Интересно отметить, что, наряду с Навье, двумя другими участниками развития теории упругости в 20-х гг. прошлого века были О. Коши и С. Пуассон, которые вместе с П. Жираром в 1819 г. написали итоговый отчет Академии об экспериментальных работах Дюло 1813 г. (Duleau [1819, 1]). Подобно экспериментальной работе Дюпена по древесине, проводившиеся примерно в то же самое время исследования Дюло примечательны тем, что содержали первые серьезные эксперименты по малым деформациям сжатия, растяжения, изгиба и кручения элементов, выполненных из железа. Эти данные Дюло сделались вехой в области изучения малых деформаций металлов в течение последующей трети столетия.

пролета от 1 м до 2 м. В каждом случае приложенная посередине пролета нагрузка составляла 10 кгс. Прогиб посередине пролета изображен на графике в зависимости от длины пролета в третьей степени. Для случая свободно опертых балок с длиной пролета 2 м и с прямоугольными поперечными сечениями различных размеров он установил экспериментально, что прогиб посередине пролета обратно пропорционален ширине и кубу высоты поперечного сечения.

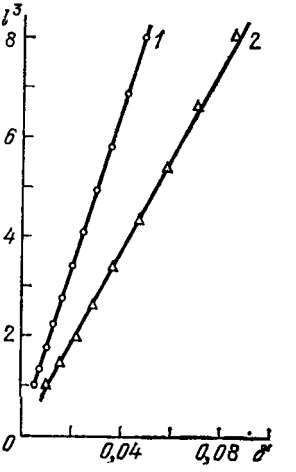


Рис. 2.2. Экспериментальные результаты Дюпена (1811) для деревянных однопролетных свободно опертых по концам балок в сравнении с элементарной теорией изгиба. l — расстояние между опорами в метрах, δ — прогиб посередине пролета в метрах. *1* — балка из дуба (2 см × 3 см), *2* — балка из северной пихты (2 см × 5 см). Как видно из графиков, прогибы δ примерно пропорциональны l^3.

Чтобы еще раз проверить этот вывод, Дюпен испытал одну и ту же балку прямоугольного поперечного сечения в двух положениях «на ребро» и «плашмя» и обнаружил, что отношение прогибов посередине пролета в этих случаях при одной и той же нагрузке равно отношению квадратов размеров поперечного сечения. Простые выкладки показывают, что указанное отношение прогибов обратно пропорционально отношению моментов инерции площади поперечного сечения балки относительно двух главных осей инерции.

В таблице 1 представлены результаты опытов П. Дюпена для четырех балок из северной пихты с длиной пролета 2 м при указанных в таблице нагрузках.

Прямолинейный характер экспериментального графика на рис. 2.2 и соответствие теории с экспериментом, представленное в табл. 1, не только устанавливают связь между прогибом посередине пролета балки, длиной пролета, высотой и шириной прямоугольного поперечного сечения для свободно опертых призматических балок и показывают, что экспериментальные данные согласуются с теорией Бернулли — Эйлера, но также свидетельствуют и о тщательности, с которой Дюпен проводил свои эксперименты.

Дюпен представил результат своего исследования в виде следующей формулы:

$$y = H + (m-1)\,\delta' + \left(\frac{m-1}{1}\right)\left(\frac{m-2}{2}\right)\delta'', \qquad (2.3)$$

где y — прогиб посередине пролета балки. Во всех его экспериментах первоначальная нагрузка составляла 4 кгс и затем, с шагом 4 кгс, росла до максимального значения, равного 28 кгс.

Таким образом, m в формуле (2.3) представляет собой численный коэффициент при начальной нагрузке, равной 4 кгс, которая вызывает начальный прогиб посередине пролета, равный H; через δ'

Таблица 1

Дюпеи (1811). Свободно опертые деревянные балки пролетом 2 м

Номер опыта	Поперечное сечение балки (см)	Нагрузка посередине пролета (кгс)	Отношение прогибов в двух ортогональных положениях балки (на ребро и плашмя)	Отношение квадратов размеров прямоугольного поперечного сечения
1	2×1	0,5	4,19	4,0
2	3×1	1,0	11,14	9,0
3	3×2	2,0	2,36	2,25
		4,0	2,28	2,25
		6,0	2,25	2,25
		8,0	2,25	2,25
		10,0	2,13	2,25
		Среднее значение	2,25	2,25
4	5×2	10,0	от 6 до 6,2	6,25

обозначена первая разность, т. е. $\delta' = H$, а через δ'' — вторая разность.

В таблице 2 представлены результаты экспериментов для четырех рассмотренных типов деревянных балок: дубовых, кипарисовых, березовых и из северной пихты. Максимальные прогибы посередине пролета при нагрузке в 28 кгс изменяются от 0,04 м до 0,06 м. Формула П. Дюпена (2.3) подтверждает замеченную им линейность вплоть до значений $m=2$, т. е. до нагрузки 8 кгс, после чего вторые разности перестают равняться нулю.

Раздел V мемуара Дюпена «О кривых, получающихся при изгибе деревянных балок на двух опорах» не только представляет собой

Таблица 2

Дюпен (1811). Сравнительные данные экспериментов по изгибу балок из древесины

Порода дерева	H (м)	δ' (м)	δ'' (м)
Дуб	0,0056	0,0056	0,0001
Кипарис	0,0071	0,0071	0,00008666...
Береза	0,0084	0,0084	0,00031
Северная пихта	0,0130	0,0132	0,0002

первое точное экспериментальное исследование этого важного вопроса, но также еще демонстрирует высокое качество его общего подхода к вопросам изгиба древесины, в том числе к учету нелинейности. П. Дюпен пишет (Dupin [1815, 1], стр. 175):

«После тщательного исследования формы кривых, полученных в результате первых экспериментов, стараясь отнести их к одной из форм, известных мне, я решил, что это может быть гипербола; таково было мое предположение, и здесь я описываю, каким образом я его проверил».

Выбирая в качестве балок самые гибкие из призматических кусков древесины прямоугольного поперечного сечения с шириной 10 см и высотой 1 см при длине 2 м, равной пролету, он получил с помощью нагрузки, приложенной посередине пролета, прогиб 13 см. С упомянутой выше точностью 0,2 мм Дюпен определял прогибы в 21 точках, отстоящих друг от друга на равных расстояниях. Если обозначить через y расстояние вдоль балки от середины ее длины до текущего сечения, через x — прогиб, а через a и b — действительную и мнимую полуоси гиперболы (начало координат системы xy находится в точке максимального прогиба; это начало координат выбрано довольно неудачно), получается выведенное Дюпеном эмпирическое соотношение [1]

$$\frac{a^2}{b^2}y^2 = x^2 + 2ax. \tag{2.4}$$

Относительно пригодности своей кривой П. Дюпен (Dupin [1815, 1], стр. 179) делает следующий вывод [1]):

«...какова бы ни была упругая кривая, при изгибе призматических образцов, опертых в двух точках, позволительно не отличать ее от гиперболы, не опасаясь заметных ошибок на практике и даже в тех расчетах, в которых аппроксимация используется в очень сложных ситуациях».

В таблице 3 экспериментальные данные Дюпена и ординаты точек его гиперболы сравниваются с результатами, полученными на основе теории Бернулли — Эйлера, для балок, изготовленных из северной пихты, размеры которых указаны выше. Второй и третий столбцы позволяют оценить близость значений экспериментально найденных прогибов в поперечных сечениях балки, расположенных симметрично относительно середины ее пролета, а в четвертый столбец помещены их усредненные значения. Расстояния от середины пролета измеряются в метрах, начало координат принято в центре среднего сечения балки в изогнутом ее положении. Используя точку, соответствующую прогибу посередине пролета, точки опирания и точку изогнутой оси в одной четверти расстояния от середины, Дю-

[1]) В связи с этим интересно обратиться к докторской диссертации Макса Борна 1906 г. (Born [1906, 1]). Проведенный Борном анализ различных форм упругой линии при больших прогибах сопровождался иллюстрациями, отчетливо показывающими, что металлическая полоса действительно принимает при изгибе формы, согласующиеся с предсказанными Дюпеном кривыми.

пен нашел эмпирическую упругую кривую в виде гиперболы, координаты которой помещены в пятом столбце таблицы. Я добавил в таблицу шестой столбец с результатами вычислений по теории Бернулли — Эйлера, данные которого позволяют, хотя это, может

Таблица 3

Расстояние от середины пролета балки (м)	Ординаты точек левой части упругой линии балки (м)	Ординаты точек правой части упругой линии балки (м)	Среднее экспериментальное значение ординаты упругой линии балки (м)	Ординаты точек гиперболы Дюпена (м)	Ординаты точек упругой линии балки, найденные согласно элементарной линейной теории изгиба (м)
0	0	0	0	0	0
0,2	0,007	0,007	0,007	0,00699	0,0074
0,3	0,0152	0,0156	0,0154	0,0154	0,0155
0,4	0,0267	0,0265	0,0266	0,0265	0,0270
0,5	0,0400	0,040	0,040	0,040	0,0406
0,6	0,055	0,055	0,055	0,0554	0,0562
0,7	0,0725	0,0725	0,0725	0,07238	0,0731
0,8	0,0910	0,0912	0,0911	0,0906	0,0910
1,0	0,1300	0,1300	0,1300	0,1300	0,1300

Ординаты изогнутой оси отсчитываются от уровня центра среднего сечения в балке, испытавшей изгиб.

быть, и недопустимо в принципе, «спутать» их с данными для гиперболы.

Ввиду очевидной нелинейности связи между нагрузкой и прогибом тот факт, что упругая кривая, определенная по линейной теории балок, не способна настолько приблизиться к опытным данным, насколько этого достигает гипербола Дюпена, не является неожиданным.

Такую же явную близость экспериментальной упругой линии к соответствующей ей гиперболе Дюпен получил и для других видов древесины и при других значениях прогиба посередине пролета, придав таким образом своей гиперболической упругой линии некоторую универсальность для описания любых экспериментальных упругих линий *(в случае загружения балки нагрузкой, симметричной относительно середины пролета.— А. Ф.)* при очень малых несовпадениях. Принимая в качестве упругой линии гиперболу, Дюпен исследовал максимальную кривизну как функцию значения нагрузки. В числе других проблем, освещенных в его пространном мемуаре, были проблемы разрушения, максимальной кривизны при разрушении и принудительного изгиба балок по кривым с заданными кривизнами.

Очевидная тщательность и точность Дюпена в его экспериментах, проявленные в описанных выше исследованиях изгиба балок,

не оставляют сомнений в справедливости его вывода о том, что при малых деформациях древесины имеет место нелинейная функциональная зависимость между напряжениями и деформациями [1]). Это открытие было особенно важным в силу того, что экспериментаторы, теоретики и появившиеся специалисты технологи все более и более приходили к убеждению, будто линейный закон Гука служит единственной основой для описания малых деформаций твердых тел.

Сейчас, спустя 160 лет, можно задать вопрос, не была ли наблюдаемая нелинейность связана с растущей кривизной балки? (т. е. не была ли она геометрической природы? — *А. Ф.*) Однако значения перемещений, при которых наблюдалась нелинейность, показывают, что кривизна не была слишком большой. Существенно то, что в 1811 г. точные эксперименты обнаружили для тела, считавшегося подчиняющимся линейной зависимости между напряжениями и деформациями, *отсутствие* таковой. Более поздним исследователям осталось убедиться в том, что небольшая нелинейность при малых деформациях, наблюдавшаяся Дюпеном в 1811 г., безусловно присуща всем твердым телам.

2.6. Эксперименты по нелинейному поведению дерева, железа и камня и введение понятия микропластичности: Ходкинсон (1824—1844)

В истории техники с благодарностью вспоминают английских инженеров начала XIX века Питера Барлоу, Уильяма Фейрбейрна, Итона Ходкинсона, У. Дж. Маккуорна Рэнкина, Джорджа Ренни и Томаса Третголда за их прикладное искусство в проектировании и возведении конструкций из только что введенных элементов прокатного железа, применение которых быстро расширялось. Существует большая литература, содержащая описания проектов железных мостов и других конструкций, за которой слишком часто следуют более поздние мемуары, пытающиеся объяснить причины разрушения этих конструкций [2]). Успех упомянутых выше и многих дру-

---

[1]) Этот *Мемуар* 1815 г. по изгибу древесины и статья по геометрии, написанная Дюпеном, когда он был еще студентом Политехнической школы, статья, в которой он ввел понятия, ставшие позднее известными как «циклоида» Дюпена и «индикатриса» Дюпена, и составляют весь оригинальный вклад Дюпена в науку, на основании которого он был в 1817 г. в возрасте 33 лет избран во Французскую Академию. Дюпен стал ведущим ученым-политиком, каким он оставался до своей смерти в возрасте 88 лет. В течение своей карьеры он написал шеститомную историю Англии в 1825 г., опубликовал свои конспекты лекций по геометрии, читаемых в Метце, а в последние годы проявлял активность в правительственной политике, см. Joseph Louis François Bertrand, Éloge historique de Pierre-Charles-François Dupin, *Éloge. Académiques*, Paris, 1890, pp. 221—246.

[2]) Пример такого рода можно найти в томе V *Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester* за 1831 г. Статье Ходкинсона о деформации железа (Hodgkinson [1831, 1]), которая обсуждается ниже, предшествует на стр. 384 статья того же автора под названием «Цепной мост в Браутоне» о цепном мосте через реку Ируэлл вблизи Манчестера (Hodgkinson [1831, 2]). Ходкинсон описывает

гих инженеров в разрешении практических трудностей в значительной степени основывался на большом числе экспериментов, в которых измерялись предельные нагрузки для балок в зависимости от их форм (и размеров), а также измерялись характеристики ползучести и разрушения железной проволоки, которая начала использоваться в висячих мостах. Этих инженеров XIX века обычно упоминают в истории теории упругости, чтобы подчеркнуть или ограниченность их знания предмета, или упорство в сохранении ошибок линейной теории упругости, в частности ошибки относительно расположения нейтральной оси балки.

Явным исключением среди этих инженеров (помимо Рэнкина, признанного видного теоретика в области линейной теории упругости, термодинамики и гидродинамики) выдающейся фигурой в экспериментальной механике твердого деформируемого тела был Ходкинсон, изучавший математику у Джона Дальтона [1]), который познакомил его с трудами Бернулли, Эйлера и Лагранжа. Ходкин-

---

с интересными подробностями проектирование моста и в последнем разделе приводит профессиональное обсуждение возможных форм разрушения. В приложении к тому́ же то́му тот же самый автор так описывает разрушение Браутонского моста:

«Авария произошла в результате колебаний конструкции, которые вызвал маршировавший по мосту отряд солдат. Они шли по четыре человека в шеренге и на мосту их было около 60 человек. Передние находились посередине моста, когда услышали страшный треск, похожий на непрерывную ружейную пальбу, и в тот же момент половина моста упала в реку, увлекая за собой главный пилон, который они прошли, в сторону пролета вместе с каменной облицовкой, и все, кто был на мосту, оказались в реке или среди цепей. Некоторые избежали повреждений, несколько человек было ранено, но, к счастью, никто не погиб».

Авария произошла в результате ошибки в проектировании одного единственного болта. Ходкинсон продолжает:

«Мы видим здесь абсурдное следствие теории Г. Галилея: если оценивать прочность болта по этой теории, то болт должен был быть так же прочен, как и другие части цепи. Следовательно, разрушение моста вызвано, возможно, применением ошибочной теории».

Тот факт, что правило, отвергнутое большинством теоретиков сразу же после его опубликования и ошибочность которого была экспериментально показана еще 100 лет тому назад, может вызвать аварию через два столетия после того, как оно было сформулировано, должен прозвучать соответствующим предупреждением для создателей правил, живущих в наше время, наделенных фантазией или интересом к проектированию, о возможных технологических фиаско в XXI или XXII столетиях.

Для того чтобы читатель не думал, что я слишком суров в оценке серьезности заблуждений некоторых ученых в 1830 г., я предлагаю ему обратиться к работе Джона Лесли (Leslie [1823, 1]), профессора натуральной философии Эдинбургского университета, в которой он принимает правило Галилея как доказанный факт. В подтверждение, Лесли ссылается на эксперименты Бюффона, которому, как мы только что видели, для получения предполагаемого соответствия пришлось ввести «коэффициент» неупорядоченности; на Барлоу, чьи эксперименты по когезии дали науке меньше, чем ничего; на Дюпена, который, как мы знаем, и как он сам специально отмечал, больше интересовался малыми деформациями, чем разрушением. Очевидно, что Лесли, подобно проектировщику Браутонского моста провозглашая правило Галилея, опирался исключительно на престиж этого автора XVII века.

[1]) См. С. П. Тимошенко ([1953, 1], стр. 127).

сон, который был избран членом Королевского общества в 1841 г. и стал профессором Механических основ техники в Университетском колледже в Лондоне в 1847 г., выполнил важную и интересную серию исследований, в частности по изгибу, удару и устойчивости в течение тридцати лет, последовавших за написанием им в 1822 г. его первого экспериментального трактата по древесине [1]).

В истории сопротивления материалов в Англии Ходкинсону отводится заслуга, состоящая в том, что в 1824 г. он исправил ошибку, которую внес в английскую литературу Джон Робизон в конце XVIII столетия в своей статье о сопротивлении материалов в 4-м издании *Британской энциклопедии (Encyclopaedia Britannica)* [2]), неправильно указав положение нейтральной оси при изгибе балок прямоугольного сечения. Питер Барлоу, один из необъяснимо многочисленных почитателей Робизона начала XIX века, включил ошибочные воззрения Робизона по поводу деформации балок в свою книгу 1817 г., озаглавленную «*Очерк о прочности и о напряжениях в древесине*» («Essay on the Strength and Stress of Timber») [3]). Эта нормативная техническая книга, к сожалению, выдержала несколько изданий и служила одним из самых распространенных инженерных руководств в начале и середине XIX века [4]) среди

---

[1]) Он был опубликован в 1824 г. (Hodgkinson [1824, 1]).

[2]) Последующие издания статьи Робизона (Robison [1822, 1]) в Британской энциклопедии редактировал Давид Брюстер.

[3]) Barlow [1817, 1]. К моменту издания 1837 г. название этого труда приняло следующий вид: «*Трактат о прочности дерева, ковкого железа и других материалов с правилами их применения в архитектуре, строительстве висячих мостов, железных дорог и др.*».

[4]) Популярность книги Барлоу среди английских инженеров была так велика, что два его сына в 1867 г., спустя пять лет после смерти отца и пятьдесят лет после первого издания, представили новое переработанное, шестое по счету, издание книги. О господствующем авторитете этого учебника средн инженеров можно судить по жалобам Давида Киркальди, который первым создал в Англии большую коммерческую компанию по испытаниям материалов и управлял ею с 1860 по 1890 г. прошлого века. В этой фирме различные производители железа публично испытывали качество своей продукции. Предприятие Киркальди, поначалу успешное, едва не завершилось крахом, когда он подвергся нападкам сына Барлоу из-за того, что некоторые из чисел, полученных Киркальди, ие согласовывались с числами в раннем издании книги Барлоу-старшего. В 1891 г., описывая заслуги Дэвида Киркальди в коммерческих испытаниях материалов, Уильям Дж. Киркальдн упоминает об этих нападках и отмечает, что в последнем изданни книги Барлоу помещены эти спорные числовые данные без всякого упоминания о почти трагической полемике. Уильям Киркальдн пишет (Kirkaldy [1891, 1], стр. 272, 273):

«Когда материал был подвергнут испытанию, мистер Барлоу зашел в тупик, предъявляя некоторые опубликованные результаты экспериментов с очень мягкой сталью, выполненных вскоре после открытня завода компании Барлоу Гематитная Сталь, и продолжая утверждать, что эти данные ошибочны, поскольку удлинения были больше, чем у некоторых железиых стержней, которые его, мистера Барлоу, отец испытывал много лет тому назад. Это был его единственный довод, и он не привел ни числовых данных своего отца, ни чисел, против которых возражал. Такое действие не являлось нн доброжелательным, ни джентльменским по отношению к человеку, который вложил все свои средства в машину, дающую

английских инженеров. Хотя еще в 1822 г. Ходкинсон указал на ошибку Робизона — Барлоу и подчеркнул как ее природу, так и серьезность, лишь в четвертом издании книги в 1837 г. Барлоу, наконец, явно неохотно, уступил в этом вопросе и внес исправления в свою книгу [1]).

Ходкинсон строго придерживался того мнения, что поведение балок из любого материала при изгибе является предметом для эксперимента, чтобы выявить истину и что в рассмотрении такого предмета экспериментатор должен свести к минимуму или вовсе исключить априорные концепции. В силу этого при проведении своей первой широкой серии испытаний для трех видов древесины он в 1822 г. не делал предположения, что к ним непременно применима линейная зависимость между напряжениями и деформациями или что зависимость между напряжениями и деформациями, линейная или нелинейная, обязательно одинакова для сжатия и растяжения; как следствие этого он полагал, что точное положение нейт-

---

бесспорные свидетельства того, что ее изобретатель и владелец стремился сделать ее возможно более точной. Давид Киркальди принял эту критику вполне дружелюбно и прямодушно пригласил м-ра Барлоу прийти с любыми испытательными инструментами, какие он пожелает, и в любое удобное для него время, с тем, чтобы они смогли спокойно разобраться в этом вопросе, поскольку он озабочен лишь тем, чтобы установить истину и в силу этого готов использовать любой инструмент, который будет более точным и надежным, чем его собственные. Как ни странно, м-р Барлоу так никогда и не воспользовался этим прямым и вежливым предложением, но по-прежнему продолжал настаивать на своем абсурдном утверждении и, что еще хуже, старательно распространял мнение, будто измерительные приборы Киркальди допускают ошибки, без всякого упоминания о сделанном ему приглашении принести любые инструменты для проверки (см. главную часть замечаний м-ра Джона Фаулера, относящихся к м-ру Барлоу, в верхней части стр. XViii Приложения)».

(Это Приложение содержит очень подробное и в большой мере касающееся личности мнение о визите м-ра Барлоу. Его стоит прочесть как содержащую интимные подробности картину, поясняющую вопрос о том, в какой мере личность может влиять на прогресс в развитии техники (Дж. Белл).)

«Прежде чем завершить рассмотрение вопроса об обвинении, выдвинутом Барлоу по поводу якобы имеющихся в экспериментах Киркальди ошибок, наличие которых он никогда не смог доказать и от утверждения существования коих так и не отказался и распространял о них информацию, предостерегая заводчиков и инженеров от посылки заказов в фирму Киркальди, стоит упомянуть, что м-р Барлоу вместе с тем допустил публикацию всех отчетов об экспериментах, проделанных этой фирмой для компании Барлоу — Гематитная Сталь (а также об экспериментах со шведским железом), занявшую десять страниц в новом издании книги его отца, вышедшем в августе 1867 г. Требуется суровый комментарий: он явно считал эти результаты точными и полагал, что они помогут сделать книгу отца более современной ибо нельзя представить, что он разрешил бы обнародование этих результатов, не веря в их точность».

[1]) Сен-Венан (Saint-Venant [1856, 1]) упомянул об этом споре между Ходкинсоном и Барлоу и о том, что между замечанием Ходкинсона и уступкой Барлоу прошло 15 лет, отметив, что Дюло в 1812 г. также ошибся при указании положения нейтральной оси, потому что ввел неверный принцип. Однако ошибка Дюло ограничилась лишь этим введением. Экспериментальные же результаты приводились им такими, какими они были получены, и не испытали влияния неверных предпосылок.

ральной линии для заданного материала может быть определено только в результате эксперимента. Ходкинсон, по-видимому, не был знаком с работой Дюпена, но отправной точкой для него были работы его предшественников из предыдущего столетия, таких, как Бюффон, и его современников Томаса Тредголда и Барлоу. Ходкинсон считал необходимым уделять внимание не только деформациям перед разрушением, но и области очень малых деформаций. Это было одной из главных особенностей работы Ходкинсона. Его эксперименты с деревом, а также с железом в 30-х гг. XIX века выполнялись с балками большого размера, в силу чего он мог добиться требуемой точности при измерении прогибов. Это было связано еще и с тем, что его эксперименты финансировал [1]) промышленник Фейрбейрн, желавший получать опытные данные, которые были бы полезны в инженерной практике, для элементов натурной конструкции.

Чтобы определить положение «нейтральной линии», как он ее называл [2]), при малых деформациях, И. Ходкинсон прикладывал к свободно опертым балкам, пролетом 9 футов с поперечным сечением в виде квадрата со стороной 1 дюйм, изготовленным из сосны, данцигской пихты и квебекского дуба, сосредоточенные нагрузки посередине пролета. С помощью градуированной масштабной полосы из белой жести длиной 9 футов, достаточно гибкой, чтобы следовать кривизне выпуклой или вогнутой частей поверхности изгибаемой балки, он измерил изменение длины крайних волокон и установил, что отношение высоты зоны сжатия к высоте зоны растяжения составляло 169/190 для сосны, 17/20 для данцигской пихты и 3/4 для квебекского дуба, что в среднем дает примерно 4/5. Ходкинсон противопоставил эти результаты широко известным результатам П. Барлоу, у которого такое отношение получилось равным 3/5, критически заметив, что в опытах Барлоу измерения проводились при очень больших прогибах, перед самым разрушением балки.

Ходкинсон под непосредственным влиянием идей Дюамеля, которые он, Ходкинсон, обсуждает в своем мемуаре 1824 г. в форме цитат из вышеупомянутой энциклопедической статьи сильно переоцениваемого Робизона, захотел найти способ приведения всей балки в состояние сжатия при напряжениях, распределенных по высоте

---

[1]) Это представляет интерес в наши дни, когда огромные суммы ассигнуются для детального изучения мелочей, с целью сравнения и краткого рассмотрения состояния дел в начале XIX столетия по финансированию фундаментальных экспериментальных исследований. *Отчет Тринадцатой Сессии Британской Ассоциации Содействия Прогрессу Науки (Report of the Thirteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science)*, имевшей место в 1843 г., содержит рекомендацию: «мистер Итон Ходкинсон испрашивает для продолжения его экспериментов по сопротивлению материалов и изменениям, возникающим в их внутренней структуре, 100 фунтов стерлингов в свое распоряжение для этой цели» (стр. XXIII). Год спустя назначается субсидия. [*Отчет Четырнадцатой Сессии Британской Ассоциации Содействия Прогрессу Науки*, 1844 г., стр. XXII].

[2]) Разные авторы называли эту линию «нейтральной линией», «неизменной линией» или «линией перехода».

поперечного сечения по некоторому закону, в других опытах добиться аналогичного распределения растягивающих напряжений, а затем определить зависимость прогиба от нагрузки в каждом из этих случаев. Чтобы добиться этого, он прибил к грани балки две тонкие железные полосы и строго посередине длины балки, там, где прикладывалась нагрузка, устроил соединение посредством шипа и паза. Помещая железные полосы на верхней, а затем на нижней гранях балки на двух опорах с пролетом 9 футов, находящейся под воздействием заданной поперечной нагрузки, приложенной посередине пролета, и тщательно измеряя прогибы посередине пролета, он обнаружил, что поведение балки в обоих случаях описывается параболическим законом

$$y = aF^m, \tag{2.5}$$

где показатель степени m для растяжения изменяется в пределах от 0,91 до 1,03 со средним значением 0,97, а для сжатия — от 0,798 до 0,901 со средним значением 0,895. Таким образом, нелинейности при сжатии и при растяжении оказались различными.

В более позднем мемуаре, опубликованном также Манчестерским литературным и философским обществом, Ходкинсон (Hodgkinson [1831, 1]) представил обширное подробное описание 35 опытов с железными балками разнообразного поперечного сечения, изготовленными промышленным способом. Он выполнил эти эксперименты не только для определения влияния формы поперечного сечения на разрушающую нагрузку, что было в духе времени, но и хотел найти влияние формы на зависимость между напряжением и деформацией, что было необычно. Эти эксперименты привели к самому важному его открытию в этой области, открытию, которое вытекало из принятой им методики — осуществлялась полная разгрузка перед новым приложением нагрузки, большей по величине, чем предыдущая, чтобы на каждой ступени наблюдать величину остаточных деформаций, если таковые появляются.

Его статья содержит подробное обсуждение сравнительных достоинств того или иного вида поперечного сечения и тех или иных марок железа, которое я опускаю. Предвосхищая современных специалистов по микропластичности, И. Ходкинсон заметил, что даже при самых малых деформациях имеются измеримые остаточные деформации. С учетом этих остаточных деформаций экспериментально устанавливавшаяся зависимость между напряжением и деформацией неизменно имела параболическую форму вида (2.5) при $m=2$, в которой учитывались как обратимая упругая, так и необратимая остаточная деформации. Фибровое нормальное напряжение σ в балке при этом было равно

$$\sigma = aF - bF^2, \tag{2.6}$$

где F — сила, приложенная посередине пролета балки, а коэффициенты a и b должны были определяться экспериментально в зави-

симости от разновидности железа, формы поперечного сечения и длины пролета, а также от того, является балка консольной или свободно опертой по концам. Экспериментальные параболы показаны на рис. 2.3, где кружки изображают результаты усреднения из 40 опытов, вполненных самим Ходкинсоном (Hodgkinson, [1843, 1]) с 18 видами чугуна, а треугольники — дополнительные данные, полученные Уильямом Фейрбейрном (Fairbairn, [1850, 1]), промышленником, для которого работал Ходкинсон. Данные Фейрбейрна представляют собой результаты усреднения из 100 опытов, проделанных с 44 разновидностями чугуна.

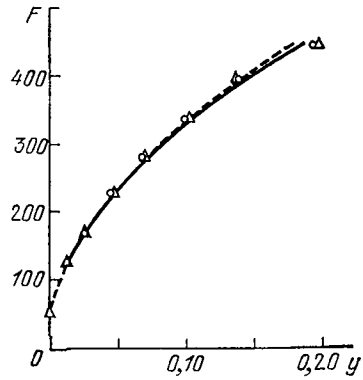


Рис. 2.3. Усредненные результаты экспериментов со свободно опертыми балками (Ходкинсон и Фейрбейрн, 1843—1850). F — нагрузка в фунтах, y — прогиб в дюймах. Кружками представлены результаты 40 экспериментов для 18 видов чугуна, а сплошной линией — соответствующие им результаты вычислений; треугольниками представлены данные 90—100 экспериментов с 44 видами чугуна, а штриховой линией — соответствующие им результаты вычислений.

«Упругий дефект», как Ходкинсон назвал это явление, и сопутствующее ему регулярное появление остаточных деформаций, даже при малых деформациях, обнаруженное исследователем, сильно повлияли на мышление экспериментаторов в течение оставшейся части XIX столетия в том, что касается определения значений постоянных упругости и пр. Хотя Ходкинсон думал, что при очень малых деформациях напряжение действительно является линейной функцией деформации, он утверждал: «Это явление представляет собой дефект упругости, которому подвержены все тела, испытывающие изменение формы как бы мало оно ни было». Машина, которую использовали Ходкинсон и Фейрбейрн для получения всех этих результатов, известна под названием «рычага Фейрбейрна» и изображена на рис. 2.4.

Ходкинсон (Hodgkinson [1843, 1]) выполнял эксперименты на сжатие и растяжение для железа [1]), из которых получил зависимость

$$\sigma = a\varepsilon - b\varepsilon^2, \tag{2.7}$$

где a и b — по-прежнему экспериментальные константы. Различие

[1]) Чтобы добиться в этих эксперимнентах требуемой точности, И. Ходкинсон выбирал некоторые образцы с длиной до 50 футов. Как отмечаио в докладе Комиссии по железу (Iron Comission Report [1851, 1], стр. 209—210).

«Эксперименты были выполнены с той целью, чтобы точно определить продольные деформации сжатия и растяжения для чугуна и для ковкого железа в образцах в виде стержней. Удлинения измерялись путем прикреплеиия стержня длиной в 50 футов и площадью поперечного сечения в 1 кв. дюйм к крыше высокого здания и приложения нагрузки к его нижнему концу».

между зависимостями (2.5) и (2.7) он приписал наличию при изгибе балки как растяжения, так и сжатия, поскольку константы при растяжении и сжатии в формуле (2.7) не обязательно одинаковы, что он показал ранее в своем исследовании, посвященном сопротивляемости древесины [1]).

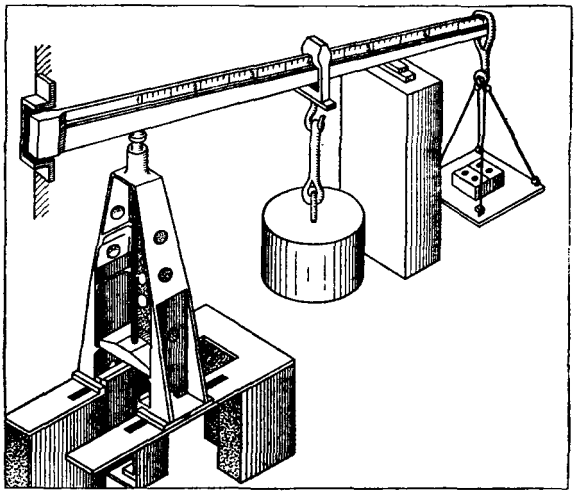


Рис. 2.4. Рычаг Фейербейрна. Испытательная машина начала XIX в.

Ходкинсон подвешивал вертикально свои растягиваемые образцы длиной в 50 футов к верхней части здания. Образцы состояли из ряда секций, соединенных с помощью винтовой резьбы противоположных направлений. Использование такого составного образца через двадцать лет подверг резкой критике А. Морэн (Morin, [1862, 1]). Поскольку микрометрический винт Ходкинсона был способен замерить удлинение в 0,0025 мм, его потенциальная разрешающая способность при длине образца в 600 дюймов составляла $1{,}6 \cdot 10^{-7}$. Как и во всех других проведенных им экспериментах, процедура состояла в нагруженин образца до заданного уровня нагрузки, за-

[1]) Из-за перевода результатов с британских тоин иа фуиты зиачеиия a и b и Iron Comission Report даны с точностью до семи значащих цифр: a= =13 934 040 фунт/дюйм^2 и b=2 907 432 000 фуит/дюйм^2 для растяжения и отличные от них зиачения a=12 931 560 фуит/дюйм^2 и b=522 979 200 фуит/дюйм^2 для сжатия. Эти значеиия являются усредиением для четырех видов чугуна. Результаты для случая сжатия иадлежит восприиимать с осторожностью, так как:

«Деформации сжатия измерялись путем заключения стержня длиной 10 футов и с площадью поперечного сечения в 1 кв. дюйм в выемку, проделаниую в чугуином кондукторе, позволявшем стержню свободно скользить без треиия, но препятствовавшем поперечиому изгибу. Стержень иагружался с помощью рычага с переменным грузом. Были приняты все возможиые меры с целью обеспечить получение точиых результатов» (*там же*, стр. 209).

писи общей деформации, разгрузке до нулевых напряжений и в записи остаточных деформаций. Затем он снова производил нагружение до нового значения нагрузки, повторял разгрузку и т. д. Усредненные экспериментальные результаты для девяти стержней из чугуна представлены на рис. 2.5 вместе с соответствующими остаточными деформациями.

Из этих данных видно, что формула (2.7) устанавливает зависимость напряжения от полной деформации. Кроме того, видно, что модули, определенные из сравнения упругих компонентов, после вычитания остаточной деформации уменьшаются.

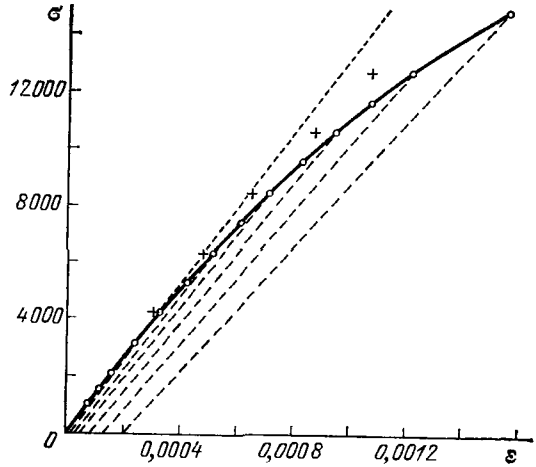


Рис. 2.5. Усредненные результаты 9 опытов на растяжение с длинными чугунными стержнями. σ — напряжение в фунт/дюйм², ε — деформация; пунктир — касательная к кривой в начале координат, определяющая начальное значение модуля упругости E, сплошная линия — линия нагружения, штриховые линии — линии разгрузок (опытные точки лишь в начале и конце разгрузки); абсциссы крестиков — упругие деформации, абсциссы кружков — полные деформации.

Этот экспериментальный факт привлек к себе большое внимание во второй половине XIX в. Полученные Ходкинсоном начальные значения этого модуля очень хорошо согласуются с результатами точных экспериментов, которые были проделаны с чугуном позднее. В отличие от Франца Йозефа фон Герстнера, чьи эксперименты мы вкратце опишем ниже [1]), Ходкинсон, к сожалению, не измерял деформации в течение цикла разгрузки; в силу этого он не мог судить о линейности или нелинейности поведения при разгрузке.

Ходкинсон считал, что независимо от того, насколько малы деформации металла, некоторые остаточные деформации должны иметь место — это предсказание, сделанное в 30-х гг. прошлого века, в определенном смысле было предвестником некоторых сегодняшних исследований по микропластичности. Эксперименты Ходкинсона по растяжению и его же эксперименты по сжатию длинных стержней свидетельствовали о воспроизводимой нелинейности поведения чугуна по обе стороны от нулевого напряжения, как это показано на рис. 2.6.

В 1824 г. Ходкинсон (Hodgkinson [1824, 1]) наблюдал явление нелинейной упругости в деревянных балках. В 1839 гг. он заметил, что в чугуне (Hodgkinson [1839, 1]) напряжение также явля-

[1]) См. раздел 2.7.

ется нелинейной функцией деформации. Обсуждение этих наблюдений было включено в его отчет (Hodgkinson [1843, 1]) для Британской ассоциации содействия прогрессу науки в 1843 г. Затем его данные подверглись критике [1]) на том основании, что будто бы остаточные деформации и нелинейное поведение, о которых он сообщал, вызваны трением на опорах. В своем ответе на эти возражения в 1844 г. Ходкинсон описал новую серию экспериментов, которые он выполнил с вертикально расположенными балками, опертыми на катки и нагруженными горизонтальными силами. Он значительно улучшил градуированную шкалу, которую использовал в своих ранних экспериментах, введя микрометрический винт, способный измерять удлинения, равные 1/10 000 дюйма. Длина стержней составляла 6 футов 6 дюймов, а высота сечения в плоскости изгиба изменялась от 3/10 дюйма до 1 дюйма. Каждый опыт продолжался от трех часов до целого дня, что позволяло свести к нулю вибрационные эффекты, связанные с «находящейся по соседству большой фабрикой» (Hodgkinson [1844, 1]). В серии экспериментов, выполненных путем использования описанной аппаратуры он вновь получил ту же самую параболическую зависимость с системой остаточных наименьших деформаций, опровергнув таким образом возражения своих критиков.

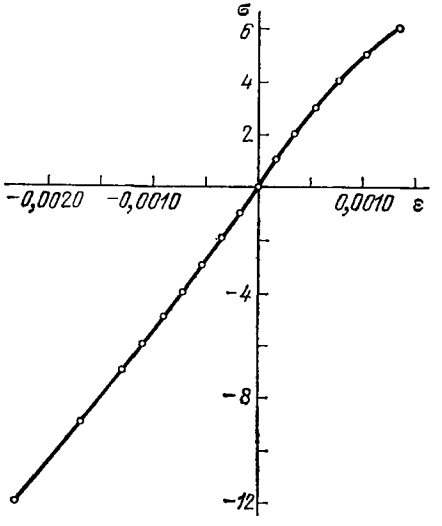


Рис. 2.6. Опыты Ходкинсона (1839). Одно из первых сравнений поведения длинных чугунных стержней при сжатии и растяжении. σ — напряжение в тс/дюйм², ε — деформация.

В дополнение к своим опытам с чугуном, Ходкинсон, используя ту же установку, выполнил эксперименты с мягким камнем («выпилены образцы длиной 7 футов, шириной 4 дюйма и высотой около 1 дюйма») (Hodgkinson [1844, 1], стр. 26). Он изгибал их в плоскости наименьшей жесткости. Экспериментальная процедура состояла в том, что один и тот же груз плавно прикладывался примерно 4 раза за три минуты, причем между сериями из четырех нагружений стержень, на пять минут разгружался. После каждой серии нагружений И. Ходкинсон измерял остаточные деформации. Он обнаружил, что камень, как и чугун, следует параболическому

[1]) Одним из главных критиков был его бывший наставник профессор Джон Дальтон из Манчестерского университета.

закону деформирования и испытывает остаточные деформации, причем показатель степени параболической функции в разных экспериментах изменялся от 1,650 до 1,957, что дало для всех опытов среднее значение 1,786.

Подобные эксперименты проводились также с ковким железом и сталью. Хотя в этих материалах также наблюдалась нелинейность поведения, она отличалась от нелинейности чугуна и камня как по форме, так и по уровню. Характеризуя все эти эксперименты с деревом, чугуном, ковким железом и камнем, И. Ходкинсон писал: «В этих материалах, как и во всяких других, свойства которых подвергались изучению, даже самые малые нагрузки производят, повидимому, остаточные деформации; ни одно тело не возвращается к своей первоначальной форме после того, как в его конфигурации были произведены какие-либо изменения (Hodgkinson [1844, 1]). Он отмечал, что если на балку осторожно класть много раз без ускорения небольшой груз, он наверняка вызовет в ней заметные остаточные деформации.

Имея в виду эксперименты Вильгельма Вебера, проведенные в 1835 г. с шелковыми нитями, которые описаны ниже (раздел 2.12) (Weber [1835, 1]), интересно отметить, что Ходкинсон наблюдал упругое последействие при разгрузке, происходившее за интервалы времени от нескольких минут до нескольких часов, хотя, как он старательно подчеркивал, этот упругий возврат никогда не бывал полным. Ходкинсон отмечал, что упругий возврат в этих телах происходил быстро поначалу, но после пяти минут стабилизировался. Поэтому он снимал показания через одну минуту, через пять минут и через полчаса. Значение этих экспериментов состояло не только в исследовании нелинейности, но и в установлении того факта, что малые остаточные деформации с ростом нагрузки становились устойчивыми и представимыми с высокой степенью воспроизводимости при помощи эмпирической функции.

В любом эксперименте, предназначенном для отыскания конкретного функционального соотношения между двумя переменными величинами, лишь экспериментатор высокого ранга, при наличии большой тщательности в проведении опытов, способен в заданных рамках точности установить наличие или отсутствие соответствия теории эксперименту. Менее компетентные экспериментаторы, составляющие значительное большинство, могут планировать свои эксперименты лишь с целью случайной проверки какой-то эмпирической зависимости, если только их работа не подчинена влиянию света маяка какой-либо модной в данное время математической теории (как, например, линейной теории упругости), которая предвосхищает оценку исследования.

Нелинейность зависимости между напряжением и деформацией, наблюдавшуюся в опытах Ходкинсона и Дюпена, можно было бы отнести к всего лишь интересным деталям исторического развития механики деформируемого твердого тела, если бы не было фактом

то, что к концу XIX века растущая точность измерений и усовершенствование методики экспериментов показали: это есть истинная особенность деформирования твердых тел.

2.7. «Закон Герстнера» для стальной фортепианной струны (1824)

Перед тем как Ходкинсон выполнил свои эксперименты с железом и камнем Франц Йозеф фон Герстнер старший в 1824 г. провел серию экспериментов по растяжению стальных фортепианных струн, отчет о которых был опубликован [1]) в 1831 г. в томе I его «*Справочника по механике*» (von Gerstner [1831, 1]). Эти эксперименты описал также его сын Франц Антон Риттер фон Герстнер (von Gerstner [1832, 1]) в издаваемых Поггендорфом *Анналах физики и химии* (Annalen der Physik und Chemie) в 1831 г., после смерти Герстнера старшего. Франц Йозеф фон Герстнер использовал рычаг с отношением плеч, равным 54. Он нагружал струны с помощью серии нагрузок, отличавшихся одна от другой на четыре малых австрийских фунта. При каждом добавлении нагрузки он находил и записывал удлинение. После достижения заданного значения нагрузки он последовательно убирал эти грузы, снова фиксируя удлинения и, наконец,— остаточные деформации. Этот цикл нагружения повторялся с повышением верхнего предела на каждом новом шаге. После приложения груза Герстнер выжидал 10—20 минут, прежде чем начать измерение удлинения. Результаты для фортепианной струны диаметра 0,063 см и длины 147 см представлены на рис. 2.7. Кривая вычерчена по результатам таблицы Герстнера, в которой все они были приведены в малых австрийских дюймах и малых австрийских линиях [2]). В настоящей книге, поскольку размеры струны бы-

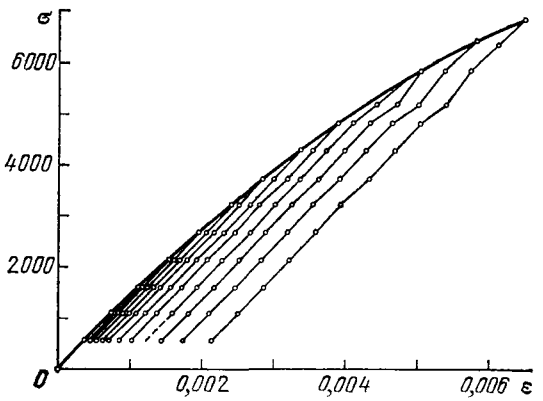


Рис. 2.7. Эксперименты с растягиваемыми фортепианными струнами (Герстнер, 1824), σ — напряжение в кгс/см²; диаграмма напряжений при многократных промежуточных разгрузках и повторных нагружениях, показывающая рост остаточных деформаций.

[1]) Он был автором книги под названием «*Теория волн*», опубликованной в 1804 г. и заслужившей в начале XIX века высокую оценку.

[2]) Один малый австрийский фунт составляет 373,3 гс, одна малая австрийская линия — это одна двенадцатая австрийского дюйма, равного 2,54 см.

ли известны, напряжения выражены в кгс/мм², а деформация указана относительная.

В этом исследовании «... опыты, в которых струны обнаруживали внезапное возникновение текучести или другие отклонения от нормального поведения, исключались и учитывались лишь те, в которых свойства струны оставались неизменными вплоть до разрушения» (Gerstner [1832, 1]), Герстнер обнаружил, что опытные данные согласуются с параболой

$$p = Ae - Be^2, \tag{2.8}$$

где p — растягивающее напряжение, а e — соответствующая относительная деформация. Он заметил, что когда ему удавалось измерять удлинения при разгрузке и новом нагружении до уровня предыдущего нагружения, имела место линейная зависимость. Герстнер записал формулу (2.8) для нелинейного закона, связывающего деформацию с напряжением в следующем виде:

$$e = E(1 - \sqrt{1 - p/P}), \tag{2.9}$$

где P — максимальное напряжение, а E — соответствующая ему деформация [1]. Эта формула была широко известна на протяжении всей остальной части XIX века как «закон Герстнера» для определения максимального напряжения.

Эти эксперименты Герстнера опередили по крайней мере на полтора десятилетия аналогичные наблюдения Ходкинсона с длинными железными стержнями. Они дали ту же самую нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями, что и опыты Ходкинсона на растяжение и сжатие.

Наблюденный Герстнером факт увеличения упругой области с ростом остаточной деформации для случаев линейной и почти линейной упругости намного раньше, в 1784 г., был детально изучен Кулоном. Кулон тоже нашел, что модуль кручения в такой области изменяется с ростом остаточной деформации: это снижение модуля обнаруживалось и в данных Герстнера, но он его никак не отметил. Эксперименты Герстнера, так же как и опыты Дюпена и Ходкинсона, исторически важны: к 1835 г. зависимости между напряжением и деформацией для всех исследованных твердых тел даже при малых деформациях и при квазистатическом нагружении рассматривались большинством экспериментаторов как существенно нелинейные [1]).

---

[1]) Противоречия, имевшие место в 1830—1834 гг. между Луи Жозефом Вика, который как экспериментатор был слишком реалистичен, чтобы оставаться в рамках линейной теории упругости, и его оппонентами из Академии, включая Дюпена, который не смог понять точку зрения Вика, были ярко освещены через несколько лет Сен-Венаном. Сен-Венан подчеркивал внутреннюю ограниченность линейной теории.

2.8. Открытие ползучести металлов: Кориолис и Вика (1830—1834)

В 1834 г. Луи Жозеф Вика (Vicat [1834, 1]) в серии экспериментов, которые он провел, вероятно, задолго до опубликования их результатов, сделал важное открытие. Вика обнаружил и подробно описал 135 лет тому назад, временные аспекты ныне широко изучаемого явления, известного как «ползучесть».

Густав Гаспар Кориолис [1]) в 1830 г., исследуя влияние окисления на деформирование свинца, заметил, что деформации могут расти при постоянном напряжении. Хотя в течение предыдущего десятилетия большое количество инженеров в Англии и на континенте в беседах обсуждали и интересовались долговременной устойчивостью железной проволоки и цепей, использовавшихся в конструкциях висячих мостов, экспериментального исследования явления ползучести фактически не производилось. Навье (Navier [1826, 1]) за четыре года до Вика в серии из двадцати семи экспериментов с металлическими листами, цилиндрическими трубами, сферическими сосудами под действием внутреннего давления наблюдал, что свинец, медь и железо продолжают деформироваться вплоть до разрушения, если к ним приложена постоянная нагрузка, составляющая достаточно большую часть той, какая необходима для мгновенного разрушения. Однако Навье не произвел измерений, связанных с таким поведением, так как он был почти полностью поглощен табулированием обычных данных по разрушению этих конструкций.

Вика в своих опытах на растяжение проволоки заметил, что если осевая нагрузка достаточно велика, проволока при фиксированной нагрузке продолжает удлиняться и после первого мгновенного удлинения [2]). Он подверг четыре неотожженные железные проволоки действию постоянной нагрузки, показанной на рис. 2.8. Эта нагрузка составляла примерно 1/4, 1/3, 1/2 и 3/4 от предельной нагрузки 48,5 кгс, которую проволоки могли выдержать. Вика подвешивал эти четыре проволоки к «очень надежно закрепленной дубовой балке, опирающейся на стены комнаты с арочным потолком. Балка была закреплена шестью опорами, расположенными сверху и снизу (Vicat [1834, 1]). Проволоки имели длину 1 м и смазывались маслом, чтобы защитить их от коррозии. Измерения Вика проводил с помощью рычажного устройства, сконструированного так, что данные, характеризующие удлинения, показанные на

---

[1]) Четырьмя годами раньше, чем Вика, другой ученый Кориолис (Coriolis [1830, 1]) наблюдал, что свинцовые цилиндры диаметром 24 мм и высотой 19 мм, нагружавшиеся осевой сжимающей силой, продолжительность действия которой заключалась в интервале от пяти секунд до нескольких часов, никогда не достигают устойчивого состояния, а продолжают деформироваться все время, пока приложена нагрузка (см. обсуждение экспериментов Г. Кориолиса в разделе 4.2).

[2]) По какой-то причине Вика не смог записать подробности этого первого мгновенного удлинения.

рис. 2.8 для каждой нагрузки, представлялись в форме «синуса пройденных дуг», измеренных в мм.

Данные на рис. 2.9 показывают удлинения каждой проволоки к концу периода продолжительностью в 33 месяца. Поскольку результаты этих измерений были переведены в удлинения, измеряемые в миллиметрах, их можно представить в форме относительных деформаций. Из этих данных, полученных 140 лет назад, видно, что

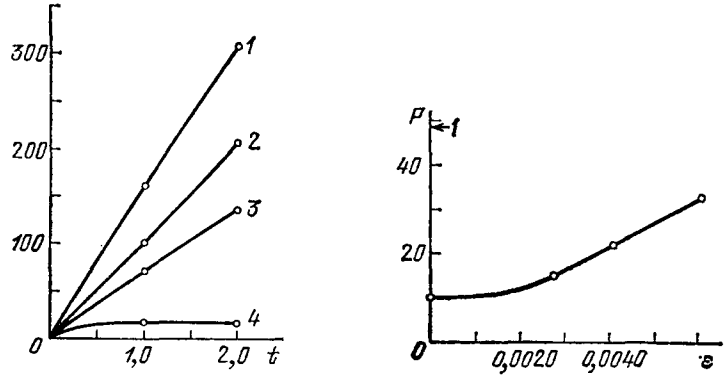


Рис. 2.8. Первые опыты по ползучести железа при растяжении (Вика, 1834); по оси ординат отложено удлинение в мм, t — время в годах; опытные данные приведены для четырех нагрузок: *1*—32,25 кгс, *2*—21,50 кгс, *3*—14,25 кгс, *4*—10,72 кгс.

Рис. 2.9. Первое опытное определение количественной зависимости между действующей нагрузкой постоянного значения и значением ε — деформации ползучести, достигаемой в образцах из неотожженной железной проволоки длиной 1 м после выдержки под нагрузкой в течение 33 месяцев (Вика, 1834). P — нагрузка в кгс, *1* — разрушающая нагрузка.

если подвергнуть железо действию большой нагрузки, то устойчивость остаточных деформаций, наблюдаемая при малых нагрузках, не имеет места. Как видно из рис. 2.9, значение деформации ползучести является функцией уровня нагрузки.

Это открытие устойчивых и неустойчивых остаточных деформаций даже при относительно небольших деформациях в течение последующих пятидесяти лет стимулировали многочисленные эксперименты, касающиеся явления, которое выходило за рамки математической теории упругости, развивавшейся в то же самое время.

2.9. Открытие микродеформации: Л. Вика (1831)

Современного экспериментатора поражает, что 140 лет назад, в 30-х гг. прошлого века, физики-экспериментаторы точно измеряли продолжительность контакта порядка 100 мкс и могли с удивительной точностью замерять деформации (разрешающая способность при измерении деформаций доходила до $1 \cdot 10^{-7}$). Измерение коротких промежутков времени, определяющих продолжительность контакта между телами, было достигнуто в 1837 г. Клодом Серве Матэ

Роланом Пуйе[1]), а высокой разрешающей способности при определении деформаций добился Луи Жозеф Вика в 1831 г. (Vicat [1831, 1]). Эксперименты Пуйе по определению продолжительности контакта описаны в разделе 3.35 в связи с экспериментами по распространению волн, вызванному ударом.

В 1829 г. Вика было поручено выполнить инспектирование восьми висячих мостов через реку Рону. То, что это была весьма полная и всесторонняя проверка мостов от фундаментов до верха пролетных строений, явствует хотя бы из того факта, что Вика заинтересовался, могут ли методы изготовления тросов из железной проволоки дать продукцию с настолько стабильными параметрами, чтобы их можно было с уверенностью использовать в проектных расчетах. Ознакомившись с процессом изготовления тросов, Вика начал подозревать, что низкая квалификация рабочих и грубые производственные стандарты сводят к нулю значение расчетов, проводимых при проектировании мостов. Результаты этой экспедиции побудили Вика усовершенствовать свои эксперименты, что привело не только к вышеописанному открытию ползучести, но и к получению более надежных по сравнению со всеми имевшимися к тому времени зависимостей напряжения от деформации для металлов.

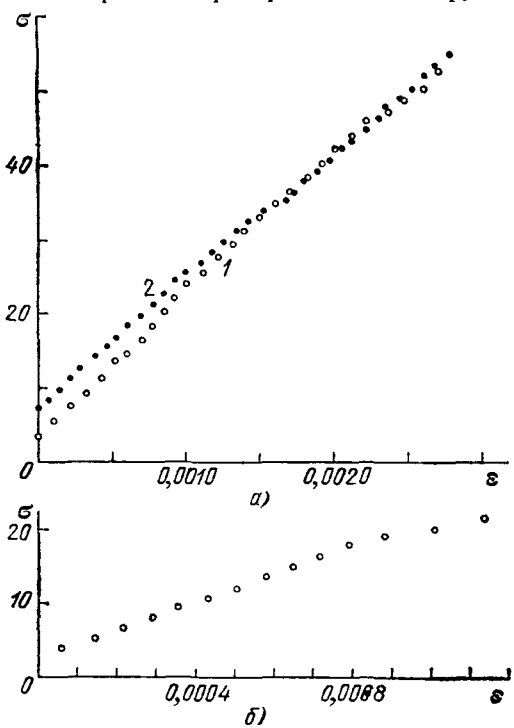


Рис. 2.10. Первые точные измерения деформаций растяжения в металлах (Вика, 1831). σ — напряжение в кгс/мм²; *а*) образцы из неотожженной железной проволоки длиной 63,82 м, *1* — образец № 17, *2* — образец № 18; *б*) образцы из отожженной железной проволоки длиной 2 м.

Вика получил свои результаты двумя путями: в первом,— используя проволочные образцы длины 63,82 м, и во втором,— разработав механический тензометр с отношением плеч 80 : 1. В пос-

[1]) Первоначальные эксперименты К. Пуйе 1837 г. в последующие годы были улучшены и обобщены; они описаны во французской публикации 1844 г. (Pouillet [1844, 1]) и в немецкой публикации 1845 г.

леднем случае образцом служила вертикально располагаемая проволока длиной 2 м. В экспериментах с длинными проволоками натяжение происходило в горизонтальном положении с использованием оборудования, применявшегося при изготовлении тросов. Чтобы результаты не искажались под влиянием начального трения, Вика не начинал замерять удлинения, пока проволока не подвергалась уже значительной нагрузке. Вследствие этого графики, которые можно построить по экспериментальным точкам рис. 2.10, пересекли бы ось σ не в начале координат, а при $\sigma > 0$.

В этих экспериментах Вика с помощью своей измерительной аппаратуры смог улавливать удлинения в 0,1 мм, а потенциальная разрешающая способность для деформаций составляла $1{,}4 \cdot 10^{-7}$. Чтобы убедиться в истинности достижения такой разрешающей способности, я проверил табулированные данные Вика для приращений напряжения и деформации и обратил внимание на то, что для начального линейного участка нагружения приращения как напряжений, так и деформаций действительно сохраняют свои значения при числе значащих цифр, соответствующих указанной разрешающей способности. Зафиксированные изменения удлинений при равных приращениях напряжения различаются на 1 мм, что отвечает измеренной разрешающей способности $1 \cdot 10^{-5}$ для проволоки большой длины.

Вика выполнил вторую проверку, видоизменив эксперименты с вертикальными проволочными образцами длины 2 м и применив разработанный им механический тензометр с отношением плеч 80 : 1. Теоретическая разрешающая способность для деформаций в случае использования шкалы с делениями в 0,10 мм составила $5 \cdot 10^{-7}$. Пример результатов такого эксперимента для отожженной железной проволоки представлен на рис. 2.10. И снова при сравнении приращений деформаций, соответствующих равным приращениям напряжений, можно видеть, что Вика добился ожидаемой точности. Измеренные приращения деформации, полученные в результате равных приращений напряжения, различались значениями лишь на $5 \cdot 10^{-6}$.

Я могу добавить: Л. Вика, как показывают его эксперименты по ползучести, хорошо знал, что проволоки нужно надежно закреплять в точке подвеса, чего он добивался с помощью вышеописанных огромных балок в помещении с арочным покрытием.

Тот факт, что только экспериментатор, талант которого был выше обычно, мог достигнуть для деформации разрешающей способности — фактической 10^{-6} и потенциальной 10^{-7}, можно видеть, сравнивая данные Вика с данными Питера Барлоу (Barlow [1837, 1]), опубликованными в его книге издания 1837 г. Барлоу получал свою зависимость между напряжением и деформацией при растяжении семи длинных проволочных образцов, при этом шесть считались тождественными и материал их именовался «обработанным ковким железом». Седьмым был заново изготовленный стержень из того же

материала. Тензометр Барлоу, зажимы и типовой образец для испытания на растяжение показаны на рис. 2.11.

Его механический тензометр имел отношение плеч только 10 : 1. Следовательно, при указанном делении шкалы в 0,1 англ. дюйм и длине образцов 100 дюймов разрешающая способность аппаратуры Барлоу составляла лишь $1 \cdot 10^{-4}$. Результаты семи проведенных им опытов представлены на рис. 2.12. По ним можно видеть, каким бывает разброс в экспериментах, результаты которых некоторые экспериментаторы находят возможным публиковать.

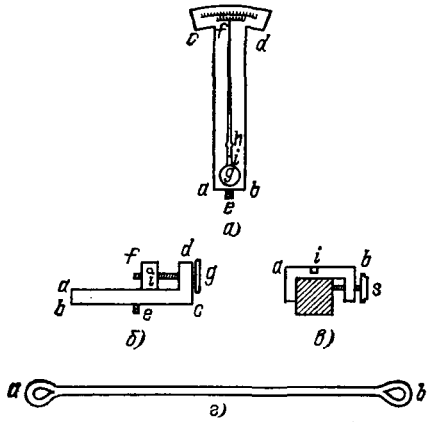


Рис. 2.11. Примеры тензометров и образцов начала XIX века; Барлоу (1837). *а*) Экстензометр (10 : 1); *б*) экстензометр; *в*) зажимы; *г*) образец с базой 100 дюймов.

Несмотря на невоспроизводимость этих данных и их очевидную нелинейность, Барлоу произвел усреднение по всем приращениям удлинения, по всем приращениям нагрузки и по всем опытам и в результате получил удлинение, отнесенное к тонне нагрузки. Это позволило ему получить модуль упругости железа, который, что вовсе не удивительно, намного отличался от определенных другими экспериментаторами, включая Вика. Модули, полученные Вика, свидетельствовали об очевидной линейности работы материала в области малых деформаций и составляли 18 080 кгс/мм² для неотожженной длинной проволоки #18 при прямых замерах и 18 120 кгс/мм² для коротких образцов из отожженной проволоки с использованием тензометра 80 : 1, так что разница составила только 0,2%. Значение, полученное Вика, очень близко к 18 045 кгс/мм² — значению, найденному в точных экспериментах по измерению удлинений, которые проводил через 25 лет Вертгейм (Wertheim [1844, 1(a)]) для необработанной отожженной железной проволоки.

В описанных выше опытных данных Ходкинсона (Hodgkinson [1843, 1]) по растяжению при измеренных приращениях деформации, равных $75 \cdot 10^{-6}$, вычисленное значение модуля составило 10 000 кгс/мм², что почти в точности совпадает со значением, которое получил для чугуна Эдуард Август Грюнайзен (Grüneisen [1906, 1]) в 1906 г. в условиях высокой точности для того же диапазона деформаций. И. Ходкинсон на своей аппаратуре, обладавшей разрешающей способностью порядка 10^{-6}, как и Вика, способен был уже в 30-х гг. XIX века получать данные, сравнимые по точности с данными современных исследований. Трудно оценить точно разрешающую способность для деформации, которой в действительности до-

стигали эти экспериментаторы. Разумеется, простое деление разрешающей способности при определении удлинений на длину образца между зажимами еще не учитывает всех факторов, влияющих на разрешающую способность при определении относительных деформаций. Как я уже отмечал, сравнение приращений линейных размеров в данных Вика показало, что истинная разрешающая способность для деформаций составляла 10^{-6} при потенциальной способности 10^{-7}. Тем не менее интересно сопоставить потенциальные разрешающие способности для относительных деформаций в течение ряда лет и улучшение разрешающей способности при измерении удлинений за тот же период времени. Такое сопоставление, приведенное на рис. 2.13, показывает, что для улучшения разрешающей способности при измерении удлинений на пять порядков понадобился период времени в 150 лет, что позволило лишь добиться уменьшения длины образца между зажимами при сохранении неизменной потенциальной разрешающей способности при определении деформаций.

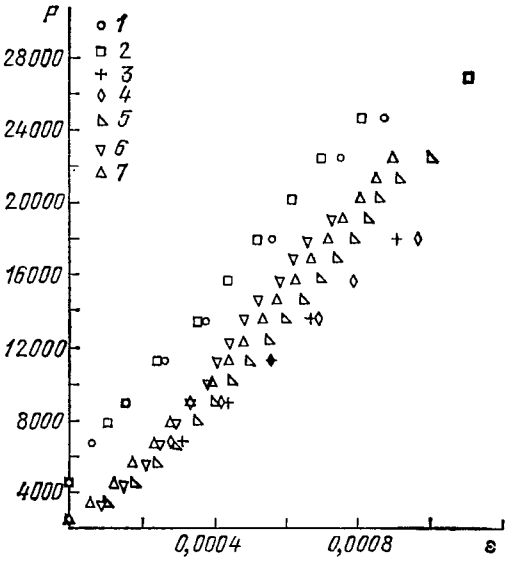


Рис. 2.12. Пример нелинейности и недостаточной воспроизводимости в некоторых опытах начала XIX века, широко использовавшихся в технике (Барлоу, 1837). Оригинальные данные были представлены в форме таблиц. *1* — стержень из переделанного железа, *2* — стержень из переделанного железа, *3* — стержень в виде нового болта, *4* — стержень в виде нового болта, *5* — стержень переделан, *6* — стержень переделан из старого колосника топки, *7* — новый стержень; *P* — нагрузка в фунтах, ε — деформация.

Два других главных экспериментальных открытия 30-х гг. прошлого века сделал Вильгельм Вебер в своей классической экспериментальной статье (Weber [1830, 1]), посвященной теплоемкости металлов, в которой он обсуждает обнаруженное им температурное последействие, а также в не менее важном экспериментальном исследовании упругости шелковых нитей (Weber [1835, 1]), где он обнаружил то, что позднее было названо «упругим последействием»[1]).

[1]) В. Вебер, безусловно, более известен своим вкладом в электричество и магнетизм или как физик, сотрудничавший со своим другом и коллегой по Геттингену математиком Карлом Фридрихом Гауссом в осуществлении многих проектов, включая создание в 1833 г. примитивной телеграфной линии длиной 9000 футов, что предшествовало на четыре года работе Сэмюэла Морзе.

Открытие деформации ползучести в железных проволоках, находившихся под нагрузкой, имело серьезные последствия в оценке прочности и долговечности висячих мостов, в которых использовались тросы, состоящие из свиваемых проволок. Среди нескольких

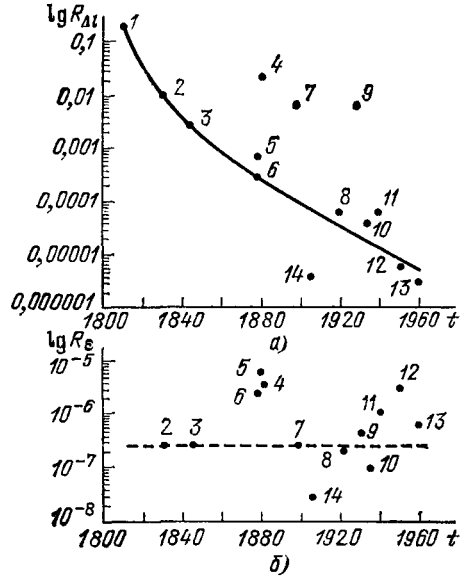


Рис. 2.13. Повышение точности в измерении удлинений за 160 лет. Из рисунка видно, что уменьшение длины образцов привело к тому, что разрешающая способность в определении деформаций оставалась почти без изменений. *а*) Зависимость между lg $R_{\Delta l}$ и t; *б*) зависимость между lg R_ε и t; $R_{\Delta l}$ — разрешающая способность при определении удлинений, R_ε — разрешающая способность при определении деформаций, t — годы, *1* — Дюпен (2 м), *2* — Вика (63,5 м), *3* — Ходкинсон (15,24 м), *4* — Томлинсон (9 м), *5* — Эмбер (0,10 м), *6* — Баушингер (0,15 м), *7* — Дж. О. Томпсон (27 м), *8* — Такерман (0 05 м), *9* — Сэйр (15,45 м), *10* — Чалмерс (0,03 м), *11* — К С. Смит (0,05 м), *12* — Миллер (0,0254 м), *13* — Броун и Робертс (0,0254 м), *14* — Грюнайзен (0,165 м). В скобках указаны длины образцов.

лиц, которые исследовали упомянутое явление после 1834 г., был и Феликс Леблан (Leblanc [1839, 1]), который в 1839 г. опубликовал одну из самых интересных статей по этому вопросу.

2.10. Эксперименты по устойчивости остаточной деформации в железной проволоке: Леблан (1839)

Первый вопрос, который исследовал Ф. Леблан, имел большое значение при определении качества материалов, исследовавшихся в то время. Свою первую серию экспериментов Леблан посвятил тому, чтобы узнать, будет ли длинная проволока с большим числом дефектов иметь меньшее среднее сопротивление, чем короткая. Он получил отрицательный ответ. Этот вопрос, очевидно, относился к однородности материала. Поэтому Леблан нарезал холоднотянутую проволоку длиной 150 м диаметрами от 0,003 до 0,0035 м на отрезки длиной 2 м и 26 м. Результаты его 24 опытов (по 12 для образцов каждой длины) на растяжение, доводимого до разрушения, представлены[1] в табл. 4. Полученное распределение разрушающих нагрузок ясно показывает, что железная проволока 30-х гг. прошлого века была достаточно однородна, чтобы с нею можно было выполнять серьезные эксперименты.

Вторая серия экспериментов Леблана (Leblanc [1839, 1]) относилась к определению относительного месторасположения разрыва. Он заметил, что в 14 случаях из 17 проволока разрушалась вблизи места прикрепления. Мы еще вернемся к этому вопросу ниже, в разделе 4.25, когда будем обсуждать опыты Джона Гопкинсона (Hopkinson [1872, 1, 2]) 1872 г. по динамической пластичности. Опуская серию экспериментов, относящихся к влиянию кривизны и предварительной вытяжки, мы можем отметить, что Леблан поднял самый важный с точки зрения рассматриваемой здесь проблемы вопрос, а именно: может ли быть проволока подвергнута длительное время растяжению по уровню, близкому к разрушающему, соответствующему краткосрочному воздействию, не теряя при этом в прочности. Он показал, что действительно ситуация такова.

Таблица 4

Леблан (1839)

№ опыта	Прочность проволоки (разрушающая сила)	
	длина 2 м (кгс)	длина 26 м (кгс)
1	700	670
2	710	720
3	650	660
4	640	640
5	690	750
6	620	650
7	620	640
8	580	620
9	640	670
10	690	650
11	690	670
12	690	680
Среднее	660	668

Первые эксперименты в этой серии состояли из девяти опытов, которые показали, что средняя разрушающая нагрузка для железной проволоки, которая определена как «хорошая на вид», составляет 690 кгс. Длина образца, на которой Леблан в дальнейшем замерял деформации [1]), составляла 1,30 м (после малой начальной нагрузки в 20 кгс, которая прикладывалась к проволоке для выпрямления). В первом эксперименте общая нагрузка равнялась 640 кгс, или 93% от разрушающей; она вызвала удлинение 5,60 мм. Леблан получил этот результат в полдень 6 января 1839 г. Затем он измерял удлинения каждый день в течение 13 дней до 19 января (эти удлинения представлены в табл. 5), после чего он добавил 30 кгс и получил дополнительное удлинение 0,0069 м. Далее, после приложения еще 10 кгс произошло удлинение еще на 0,0070 м; и, наконец, добавление еще 10 кгс вызвало разрушение. Общая нагрузка при разрушении в конце 13-го дня от начала опыта составила 690 кгс — ровно столько же, сколько и в предыдущих 9 опытах.

Второй эксперимент с такою же проволокой при начальной нагрузке 20 кгс и измеренной после ее приложения длине образца 1,30 м Леблан начал в полдень 22 января 1839 г., приложив к об-

[1]) Разрешающая способность для относительных деформаций составляла приблизительно $1 \cdot 10^{-5}$.

разцу нагрузку 300 кгс, что вызывало удлинение, равное 0,00130 м. Дополнительная нагрузка, которая подняла уровень общей нагрузки до 600 кгс, довела удлинение до 0,00630 м; после того как дополнительные 20 кгс (которые довели общую нагрузку до 620 кгс)

Таблица 5

Леблан (1839)

Дата в январе	Температура в градусах по Реомюру	Удлинение (мм)	Дата в январе	Температура в градусах по Реомюру	Удлинение (мм)
6	+5	5,6	13	+8	6,3
7	+4	5,7	14	+8	6,3
8	+4	5,8	15	+7	6,3
9	+4	5,8	16	+5,5	6,4
10	+2	5,8	17	+4,5	6,4
11	+3	5,9	18	+3	6,4
12	+7	6,2	19	+3	6,4

увеличили удлинение до 0,00680 м, он оставил проволоку под нагрузкой от 22 января до 22 марта, производя замеры удлинения каждый день. На семнадцатый день, 7 февраля, деформация стабилизировалась при удлинении 7,40 мм, что соответствует приращению деформации после 22 февраля на 0,00046 мм. Последняя оставалась неизменной и на 60-й день нагружения — 22 марта, когда были произведены разгрузка и повторное нагружение образца все еще без заметных изменений деформации. Через 21 день, 12 апреля, он снова разгрузил проволоку и оставил ее ненагруженной на 12 дней, а затем 24 апреля нагрузил ее той же нагрузкой в 620 кгс. Удлинение 7,3 мм, измеренное Лебланом, было немного меньше, чем равное 7,50 мм, которое он зафиксировал 12 апреля. В течение 24 часов удлинение вернулось к значению 7,50 мм, которое сохранялось еще 7 дней до 30 апреля, когда он догрузил проволоку 20 кгс; 640 кгс довели удлинение до 7,60 мм; при нагрузке 660 кгс удлинение составило 7,75 мм; и, наконец, после 95 дней проволока разорвалась при нагрузке 680 кгс, т. е. при том же значении нагрузки, которое привело к разрушению в первоначальных девяти кратковременных опытах и в тринадцатидневном эксперименте. Нагрузка в 620 кгс составила, таким образом, 91% от разрушающей нагрузки. Этот эксперимент вместе со значениями температуры по Реомюру [1]), которая имела место во время замеров удлинений, представлен в табл. 6. Открытие Лебланом первичной ползучести было, разумеется, лишь прелюдией к открытию Л. Вика долговременной, или вторичной, ползучести.

[1]) Связь температуры по Реомюру с температурой по Цельсию 1°R=1,25°C.

Таблица 6

Леблан (1839)

Дата	Температура (°R)	Удлинение (мм)	Дата	Температура (°R)	Удлинение (мм)	Дата	Температура (°R)	Удлинение (мм)
Январь			Февраль			Март		
22	+5	6,80	21	+4,25	7,40	22	+7,75	7,40
23	+4	7,10	22	+7	7,40	23	+8	7,40
24	+3	7,10	23	+8,25	7,40	24	+10	7,40
25	+4	7,20	24	+8,25	7,40	25	+9,75	7,40
26	+3,50	7,20	25	+6	7,40	26	+9,50	7,40
27	+1	7,20	26	+6	7,40	27	+10,50	7,40
28	0	7,20	27	+6	7,40	28	+9,50	7,40
29	+1,50	7,20	28	+6,75	7,40	29	+9,50	7,40
30	+1,70	7,20				30	+10	7,40
31	0	7,20	Март			31	+11	7,40
			1	+7,50	7,40			
Февраль			2	+8	7,40	Апрель		
1	0	7,20	3	+8,50	7,40	1	+10,50	7,40
2	+1,75	7,20	4	+10	7,40	2	+9	7,40
3	+4	7,30	5	+8,50	7,40	3	+8,50	7,40
4	+6	7,30	6	+5	7,40	4	+9	7,40
5	+7,25	7,30	7	+4	7,40	5	+9	7,40
6	+8	7,30	8	+4,25	7,40	6	+8	7,40
7	+8,75	7,40	9	+4,75	7,40	7	+9	7,50
8	+8,50	7,40	10	+6,25	7,40	8	+7,50	7,50
9	+8	7,40	11	+6	7,40	9	+6,50	7,50
10	+8	7,40	12	+8,50	7,40	10	+7	7,50
11	+8	7,40	13	+10	7,40	11	+9	7,50
12	+7,75	7,40	14	+10,25	7,40	12	+8	7,50
13	+8,25	7,40	15	+9,75	7,40	24	+12	7,50
14	+8	7,40	16	+8,50	7,40	25	+10	7,50
15	+6,25	7,40	17	+6	7,40	26	+11	7,50
16	+7	7,40	18	+4,75	7,40	27	+11	7,50
17	+5,25	7,40	19	+5	7,40	28	+11,50	7,50
18	+4,25	7,40	20	+6	7,40	29	+12	7,50
19	+4,50	7,40	21	+7,75	7,40	30	+12,50	7,50
20	+6,50	7,40						

2.11. О явлении, открытом Саваром (1837) и Массоном (1841) и известном в наше время под названием эффекта Портвена—Ле Шателье (1923)

Возможно для Герстнера было невезением то, что он решил исключить из рассмотрения эксперименты, в которых обнаруживалась «внезапная текучесть и другие отклонения от нормального поведения» (Gerstner [1832, 1]); в противном случае он мог бы стать первым, кто открыл явление, известное теперь как «эффект Портвена — Ле Шателье (Portvin, Le Chatelier [1923, 1]). Если следовать исторической правде, то честь открытия этого явления нужно связать с именами Феликса Савара (1837) (Savart [1837, 1]) и Антуана

Филибера Массона (Masson [1841, 1]). Массон описал крутой почти вертикальный (на диаграмме σ—ε.— *А. Ф.*) рост напряжения, сопровождавшийся очень малой деформацией, вплоть до значения, при котором происходило внезапное резкое увеличение деформации при постоянном напряжении. При опытах такого типа с мертвой нагрузкой, применявшейся в испытательных машинах в XIX столетии, это явление приняло вид, который позже привел к использованию термина «эффект лестницы» [1]).

При больших деформациях это явление изучалось за последние два десятилетия многими экспериментаторами, включая Эндрю

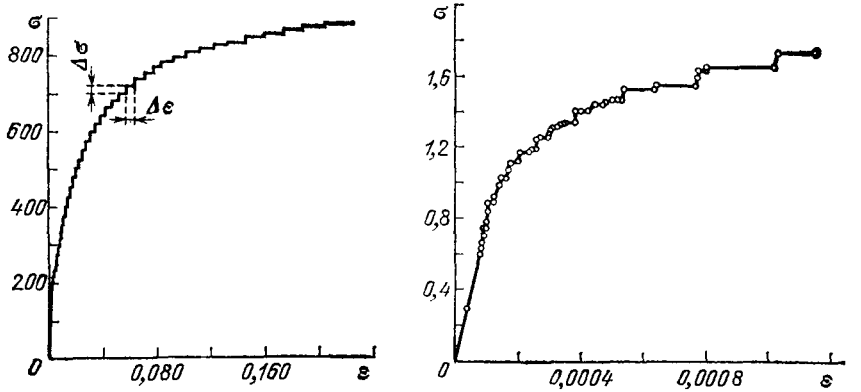


Рис. 2.14. Опыт № 1219, Белла (1966). Пример скачкообразного протекания деформации в опыте на растяжение поликристаллического алюминия при постоянной скорости нагружения, σ — напряжение в кгс/мм².

Рис. 2.15. Опыт Белла (1962). Пример скачкообразного протекания деформации в опыте со ступенчатым приложением нагрузки при сжатии (Белл, 1962). Опыт выполнялся на образце из поликристаллического отожженного алюминия при нагружении мертвой нагрузкой. Всего было 156 приращений напряжений по 6,7 гс/мм² и 530 наблюдений, σ — напряжение в кгс/мм².

Уезерби МакРейнольдса (Mc Reynolds [1949, 1]), Оскара В. Диллона (Dillon [1963, 1]), Уильяма Шарпа (Sharpe [1966, 1]) и меня (Bell [1968, 1]), (Bell and Sharpe [1962, 1]). Пример такого поведения для поликристаллического алюминия при больших деформациях представлен на рис. 2.14 на основании результатов эксперимента, проделанного мною в 1966 г. с образцом, растягиваемым мертвой нагрузкой. Образец был изготовлен из полностью отожженного алюминия и нагружение осуществлялось непрерывно при постоянной скорости изменения напряжения, причем весь эксперимеит длился один час.

Другой эксперимент, проделанный в 1962 г., также мною, для области малых деформаций, занял пять дней и представлял собой

[1]) Поскольку в XX веке большинство опытов выполнялось на жестких испытательных машинах, это явление проявлялось в виде колебаний значений функции отклика, и «лестница» уже не наблюдалась. См. А. Портвен, Ф. Ле Шателье (Portvin, Le Chatelier [1923, 1]).

опыт на сжатие нарастающей мертвой нагрузкой образца из поликристаллического отожженного алюминия; результаты за первые 36 часов представлены на рис. 2.15. Деформация нарастала медленно до достижения вертикальной части ступеньки, когда терялась устойчивость напряжения и оно внезапно приобретало конечное приращение, после чего происходило внезапное приращение деформации до некоторого равновесного значения. Достижение напряжением большего по уровню уравновесного значения было делом нескольких дней. Самое длительное время, в течение которого наблюдали такой рост остаточной деформации, составляло 153 дня и было достигнуто в области больших деформаций в эксперименте на растяжение под действием мертвой нагрузки, который выполнили в 1931 г. Даниэл Хансон и М. А. Уиллер (Hanson, Willer [1831, 1]). На рис. 2.16 эти результаты представлены для напряжений, выраженных в кгс/мм².

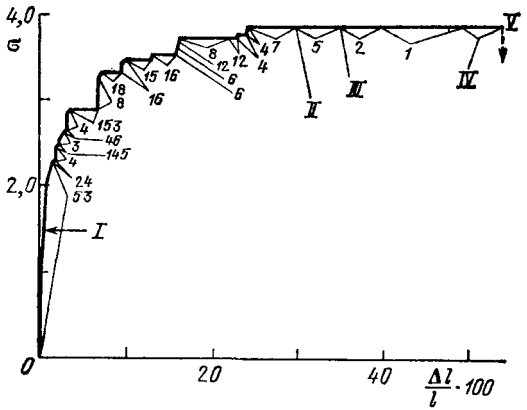


Рис. 2.16. Опыт Хансона и Уилера (1931). Пример скачкообразного протекания деформации в опыте на растяжение с поликристаллическим алюминием, в котором нагрузка получала конечные приращения. σ — напряжение в фунт/дюйм², $\frac{\Delta l}{l} \cdot 100$ — удлинение образца в %, *I* — появление границ, *II* — начало шейкообразования, *III* — появление второй шейки, *IV* — 20 ч., *V* — разрушение. Опыт продолжался 18 месяцев.

Эффект Савара — Массона, весьма подробно описанный в разделе 4.31, накладывается на функцию отклика, полученную в отсутствие этого явления. После соединения точек, расположенных в концах горизонтальных частей ступеней, в графике, показанном на рис. 2.14, получается воспроизводимая гладкая зависимость между напряжением и деформацией. В данных Герстнера 1824 г. обнаруживается то, что максимальная деформация, составившая 0,006, являлась деформацией, которую допустимо считать относительно малой, что можно видеть из примера, представленного на рис. 2.15, взятого из одного из моих собственных экспериментов. Существенной особенностью описанного выше эффекта Савара — Массона, независимо от того, достаточно ли велики приращения нагрузки, чтобы можно было увидеть ступеньки, является тот факт, что деформации у подножия ступеньки остаются постоянными в течение многих часов или даже нескольких дней.

В 1840 г. и, возможно, даже сегодня, было трудно согласовать различные экспериментальные факты, определяющие вид деформации: температурное последействие Вебера, явление остаточного удлинения Герстнера и Ходкинсона, ползучесть Вика и наблюдение

Леблана устойчивости деформации при уровне нагрузки, составлявшем 90% от разрушающего, после начального кратковременного периода неустойчивости.

Массон (Masson [1841, 1]) осуществил серию экспериментов с образцами из латуни, железа, стали, меди и цинка в лаборатории Савара, где он проводил исследования во время серьезной болезни Савара. Первые эксперименты, выполненные Массоном в этой лаборатории, были повторением серии опытов на растяжение мертвой нагрузкой, которые проводил Савар четырьмя годами ранее, с образцами, ранее использовавшимися Саваром. Неудивительно, что Массона заинтересовало различие результатов обеих серий. Относительно сопоставления данных Савара [1]) (Masson [1841, 1]) со своими собственными он сделал следующее замечание:

«Эта таблица показывает, что твердые тела удлиняются не непрерывно, но внезапнымн скачкамн; это явленне наблюдается также при тепловом расшнреннн. Большне различия между данными Савара и моимн для латунных и железных стержней первым долгом заставнли меня заподозрнть существованне экспериментальных трудностей, которые я не смог преодолеть, несмотря на всю тщательность, с какой я повторял последовательно по нескольку раз одно и то же нзмерение с нензменным результатом. Но позднее результаты экспернментов с железнымн и стальнымн стержнями, а также мнение самого Савара, который часто наблюдал такое явление разрывного удлиннения и рассматривал его как присущее прнроде материала, переубедили меня» (Masson [1841, 1]; стр. 454).

Далее Массон продолжает:

«Савар считал, что для молекул твердых тел, находящихся под действием растягнвающих сил, вообще не существует устойчнвого равновесия: они должны удаляться друг от друга беспредельно, в силу чего растянутые стержни должны удлняться. Однако мне представляется, что существование старых конструкций доказывает ограниченность удлинения твердых тел, соответствующего заданной растягнвающей силе. Я хочу получнть доказательство этого явлення с помощью опытов, которые, к сожаленню, не былн достаточно длительнымн, однако прн всем своем несовершенстве они, по-видимому, подтверждают ндею предела упругостн» (Masson [1841, 1]).

Как показывают современные эксперименты с нагружением мертвой нагрузкой, Леблан был не в состоянии добиться устойчивости для цинка [2]), хотя он получил ее для меди. В экспериментах, выполняемых на машинах с нагружением мертвой нагрузкой, напряжение задается, а деформация, со всей связанной с ней интересующей нас информацией, является измеряемой переменной. Когда задается деформация, а измеряемой величиной служит напряжение, как это имеет место в современных испытательных машинах, многие из описаниых явлений или вообще не наблюдаются, или меняют свой характер настолько, что когда их замечают, то их рассматри-

[1]) Эти данные подробно обсуждаются в главе IV. То, что здесь носит названне «предела упругостн», относится к деформацнн, а не к напряженню — понятие, привычное только для тех, кто занимался нсследованнем при нагруженни мертвой нагрузкой.

[2]) Современные справочники, напрнмер, всегда дают для модуля упругостн цинка не одно, а широкнй диапазон значенний.

вают как вытекающие из свойств самой испытательной машины. Недавнее крупномасштабное возрождение экспериментов с нагружением мертвой нагрузкой в моей лаборатории по испытанию поликристаллических твердых тел (Bell [1956, 1]), (Bell and Stein [1962, 7]), (Bell [1968, 1]), начиная с 1950 г., в лаборатории Диллона (Dillon [1963, 1], [1966, 1]) в 60-х гг. и немногие отдельные опыты в других лабораториях снова подняли проблемы, которые были актуальными в 40-х гг. прошлого века и касались устойчивости деформаций при деформировании твердых тел.

2.12. Первые эксперименты, связанные с термоупругостью: опыты Гафа (1805) и Вильгельма Вебера (1830); открытие Вебером упругого последействия (1835)

В 1806 г. Джон Гаф описал то, что он назвал «необычайным свойством» каучука, или индийской резины; это свойство, как он утверждал, «никогда не отмечалось в публикациях, по крайней мере, английскими авторами (Gough [1806, 1], стр. 39). Говоря о резиновой полоске, которая была предварительно опущена в теплую воду на несколько минут или несколько дольше пробыла в зажатом кулаке, Гаф описал опыт под не совсем удачным названием «Эксперимент I» (Gough [1806, 1], стр. 40; см. также [1805, 1], стр. 290,291):

«Возьмите полоску, приготовленную таким образом, за концы большими и указательными пальцами каждой руки и приведите ее середину в легкое соприкосновение с краями губ, заботясь о том, чтобы полоска все время оставалась прямолинейной, но не растягивайте ее сильно по сравнению с длиной в естественном состоянии. После этих предварительных действий быстро растяните полоску и вы сразу же почувствуете заметную теплоту в той части рта, которая касается полоски; это происходит в результате повышения температуры каучука. Причем с ростом растяжения резина становится все теплее, а края губ обладают высокой степенью чувствительности, которая позволяет им легче, чем другим частям тела, обнаруживать эти изменения. Увеличение температуры, которое замечается при растяжении каучука, можно сразу же снять, позволив резине снова укоротиться, что она проделает за счет своей упругости, лишь только перестанет действовать растягивающая сила. Быть может, мне скажут, что описанный эксперимент был проведен неряшливо, что тот, кто желает добиться точности, не станет доверять собственным ощущениям при описании явления, а воспользуется термометром. Если такое возражение будет высказано, то ответ на него очевиден: эксперимент в его настоящем виде демонстрирует сам факт, убеждая наши чувства, которые являются в этом случае единственным судьей, в том, что температура кусочка каучука изменяется при изменении его размеров. Использование термометра позволит определить относительные изменения этих величин, передав измерение температуры от губ к глазам: эксперименты такого рода имеют уже математическую природу *(в смысле возможности оценить явление не только качественно, но и количественно.— А. Ф.)*, они дают сведения, которые мы пока еще не умеем использовать, поэтому мы сейчас не заботимся о количественной стороне, но хотим установить сам факт, который может помочь нам раскрыть причины необычной упругости, наблюдаемой у каучука».

В опытах Кориолиса, упомянутых в разделе 2.8, которые состояли в том, что тяжелое каретное колесо сжимало свинцовый цилиндр, заключенный между двумя стальными пластинками (верхняя

имела над образцом стальной выступ), причем верхняя пластинка находилась в контакте с колесом какое-то определенное время, достаточное для того, чтоб сделать выводы, автор наблюдал нечувствительность пластической деформации свинца к предварительной тепловой обработке его в диапазоне температур от 0° до 50° С; Кориолис писал (Coriolis [1830, 1], стр. 105, 106): «... в только что сжатом свинце выделяется тепло, которое можно обнаружить простым прикосновением к нему, что связано, как легко заметить, с развитием разрушения...». Такие наблюдения температурных явлений, связанных с деформацией, побуждали к проведению дальнейших экспериментов для установления границ идеальной линейной упругости.

В отличие от несколько туманных предположений Гафа и Кориолиса, Вильгельм Вебер в 1830 г. провел изящное экспериментальное исследование, которое положило начало предмету термоупругости (Weber [1830, 1]). Первая работа В. Вебера в этой области стала классикой экспериментирования, равной по важности и оригинальности экспериментальным вкладам Гука, Мариотта, Кулона, Хладни и Дюпена. После обсуждения ряда неудачных попыток добиться внезапного и частичного нагружения или разгрузки металлической струны с известной разницей нагрузок, которые включали, например, применение устройства, подобного зажимам для струн фортепиано, В. Вебер, наконец, разработал прекрасное в своей простоте, экспериментальное оборудование, показанное на рис. 2.17.

Прикладывая начальную нагрузку в точке e, Вебер мог создать растяжение с продольной силой, равной P, на участках ab и bc металлической струны, представлявших собой участки равной начальной длины. Затем он закреплял шарик b (жестко связанный со струной.— *А. Ф.*) и увеличивал нагрузку в точке e, чтобы вызвать растягивающее усилие Q на участке bc, в то время как на участке ab продолжало действовать усилие P. Далее струна закреплялась в точке c. Зажимы a и c представляли собой цилиндры со щелями, в которые помещалась проволока, а зажим b — шарик со щелью. Вебер использовал такие зажимы для того, чтобы быть уверенным в отсутствии повреждений проволоки в процессе закрепления, поскольку он повторял опыт много раз на одном образце. Когда он раскрывал зажим b, а зажимы a и c оставались закрепленными, растягивающее усилие в проволоке становилось равным $(P+Q)/2$. Затем, когда через некоторый интервал времени он снова закреплял зажим b и подвергал участки струны ab и bc поперечным колебаниям, он мог при известной погонной плотности материала струны π определить частоту свободных колебаний n как функцию растягиваю-

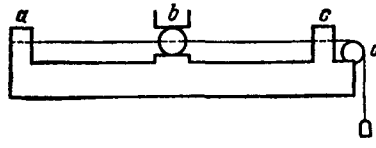


Рис. 2.17. Схема установки Вильгельма Вебера в первых экспериментах по термоупругости (1830).

щего усилия:

$$n=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\sqrt{\frac{P+Q}{2}}. \qquad (2.10)$$

И наоборот, при точном измерении частоты колебаний имелась возможность определения растягивающего усилия в струне. Чтобы провести точное определение частоты, Вебер выбирал значения P и Q такими, что при растягивающем усилии, равном $(P+Q)/2$, имела место частота чуть ниже частоты камертона, издающего звук «фа». Эксперимент происходил следующим образом. После достижения растягивающими усилиями на участках ab и bc заданных значений соответственно P и Q он ослаблял зажим b примерно на 1/4 секунды и затем закреплял его. Затем он заставлял колебаться участки струн ab и bc и с помощью камертона определял частоту колебаний. Через некоторое время он снова быстро ослаблял и немедленно вновь закреплял зажим b и опять регистрировал частоту колебаний. Полученные им результаты опытов с проволоками заданной длины и с заданными значениями продольной силы P и Q, выполненными из железа, меди, серебра и платины, содержатся в табл. 7.

После начального ослабления зажима происходило внезапное увеличение растягивающего усилия на участке ab и эквивалентное внезапное снижение на участке bc на величину $(Q-P)/2$. Рост растягивающего усилия приводил к охлаждению участка ab, который затем нагревался до равновесного состояния, что вызывало снижение растягивающего усилия после закрепления зажима. На участке bc наблюдалось обратное явление — нагрев и последующее охлаждение до наступления равновесия и оттуда возрастание растягивающего усилия в проволоке. После второго ослабления и закрепления зажимов Вебер мог определить величину изменений растягивающего усилия на обоих участках, возникавших после установления теплового равновесия с окружающей средой. По данным табл. 7 мы можем видеть, что на участке ab частота колебаний уменьшалась с понижением температуры, а на участке bc происходило почти такое же повышение частоты колебаний с повышением температуры. Следует отметить, что Вебер всегда так подбирал характеристики образца и камертона, чтобы тон камертона (фа) был чуть выше тона проволоки при средней нагрузке.

С помощью других экспериментов Вебер установил для закрепленной по концам проволоки зависимость между растягивающим усилием и температурой. Следовательно, на основании этих экспериментальных данных он мог определить изменения температуры, происшедшие в четырех образцах в виде проволок. Для железа это было 1,092°, для меди 0,883°, для серебра 0,960° и для платины 2,073° в условиях эксперимента, приведенных в табл. 7. Поскольку уменьшение объема составляло лишь малую часть деформации, вызванной нагрузкой $(P+Q)/2$, и сама деформация была очень малой величиной, Вебер воспользовался этими данными для определения

Таблица 7

Вебер (1830)

№	Участок проволоки	Частота колебаний, совпадающая с частотой камертона фа через 5 с после мгновенного прикосновения	То же после длительного прикосновения	Увеличение совпадающих частот колебаний	Среднее из всех экспериментов
		Железная проволока			
1	*ab*	$7^{1}/_{4}$	$3^{3}/_{4}$	$-3^{1}/_{2}$	$-3^{3}/_{8}$
	bc	$9^{3}/_{4}$	$12^{3}/_{4}$	$+3$	$+3^{1}/_{4}$
2	*ab*	$11^{1}/_{16}$	$8^{5}/_{8}$	$-2^{7}/_{16}$	
	bc	$15^{11}/_{16}$	$18^{7}/_{8}$	$+3^{3}/_{16}$	
3	*ab*	$8^{3}/_{8}$	$4^{7}/_{32}$	$-4^{5}/_{32}$	
	bc	$10^{1}/_{4}$	$13^{25}/_{32}$	$+3^{17}/_{32}$	
		Медная проволока			
1	*ab*	19	$14^{19}/_{32}$	$-4^{13}/_{32}$	$-3^{1}/_{2}$
	bc	17	$20^{25}/_{32}$	$+3^{25}/_{32}$	$+3^{1}/_{32}$
2	*ab*	$14^{1}/_{4}$	$10^{13}/_{16}$	$-3^{7}/_{16}$	
	bc	$13^{3}/_{4}$	$16^{7}/_{16}$	$+2^{11}/_{16}$	
3	*ab*	$18^{3}/_{16}$	$15^{31}/_{32}$	$-2^{7}/_{32}$	
	bc	$20^{3}/_{4}$	$23^{13}/_{32}$	$+2^{21}/_{32}$	
		Серебряная проволока			
1	*ab*	$18^{3}/_{4}$	$16^{1}/_{4}$	$-2^{1}/_{2}$	$-2^{5}/_{16}$
	bc	$14^{3}/_{4}$	$17^{1}/_{2}$	$+2^{3}/_{4}$	$+3$
2	*ab*	$20^{5}/_{16}$	$17^{1}/_{2}$	$-2^{13}/_{16}$	
	bc	$14^{15}/_{16}$	$16^{3}/_{4}$	$+1^{13}/_{16}$	
3	*ab*	$19^{1}/_{32}$	$15^{3}/_{8}$	$-3^{21}/_{32}$	
	bc	$16^{7}/_{32}$	$18^{5}/_{8}$	$+2^{13}/_{32}$	
		Платиновая проволока			
1	*ab*	21	12	-9	-8
	bc	$^{1}/_{2}$	8	$+7^{1}/_{2}$	$+7^{1}/_{3}$
2	*ab*	$46^{3}/_{4}$	39	$-7^{3}/_{4}$	
	bc	$23^{1}/_{4}$	31	$+7^{3}/_{4}$	
3	*ab*	$45^{1}/_{2}$	$38^{1}/_{4}$	$-7^{1}/_{4}$	
	bc	$23^{1}/_{4}$	30	$+6^{3}/_{4}$	

Железная проволока: $ab=257$ линий, $bc=257$ линий, участок длиной 1300 линий весил 2,878 гс, $P=1006$ гс, $Q=7000$ гс, при действии растягивающей силы в 4000 гс тон железной проволоки был чуть ниже тона камертона (фа).

Медная проволока: $ab=240$ линий, $bc=240$ линий, участок длиной 1300 линий весил 3,332 гс, $P=1700$ гс, $Q=5700$ гс; при действии растягивающей силы в 3700 гс тон медной проволоки был чуть ниже тона камертона (фа).

Таблица 7 *(продолжение)*

Серебряная проволока: $ab = 184$ линии, $bc = 184$ линии, участок длиной 1300 линий весил 4,4815 гс; $P = 1000$ гс, $Q = 5000$ гс; при действии растягивающей силы в 3000 гс тон серебряной проволоки был чуть ниже тона камертона (фа).

Платиновая проволока: $ab = 113$ линий, $bc = 113$ линий, участок длиной 800 линий весил 6,253 гс; $P = 800$ гс, $Q = 4000$ гс, при действии растягивающей силы в 2400 гс тон платиновой проволоки был чуть ниже тона камертона (фа).

удельной теплоемкости при постоянном объеме, которую он сравнивал с данными об удельной теплоемкости при постоянном давлении, полученными в опытах Пьера Луи Дюлона (Dulong [1826, 1]). Это сопоставление, представленное в табл. 8, показывает, что отношение значений удельной теплоемкости для этих четырех металлов приблизительно равно единице [1]).

Таблица 8

	Удельная теплоемкость		
	при постоянном давлении Дюлон (1819)	при постоянном объеме Вебер (1830)	отношение C_p/C_v
Железо	0,1100	0,1026	1,072
Медь	0,0949	0,0872	1,088
Серебро	0,0557	0,0525	1,061
Платина	0,0314	0,0259	1,212

Другую серию экспериментов, представляющую интерес при обсуждении рассматриваемого вопроса, Вебер выполнил в 1835 г.; она содержала второе важное открытие (Weber [1835, 1]), касающееся нелинейной упругости при малых деформациях шелковых нитей [2]). Как видно из этой статьи, Вебер в 1835 г. не знал, что в 1781 г. Кулон выполнил важную серию экспериментов по кручению шелковых нитей и человеческого волоса. (Мемуар Ш. Кулона будет описан в разделе 3.3.) После В. Вебера экспериментаторы, ко-

[1]) Я благодарен д-ру Джону С. Томсену из Университета Джона Гопкинса за детальную проверку предположений и рассуждений Вебера относительно результатов этих экспериментов. Примитивность термодинамики Вебера указывает на необходимость осторожного подхода к его теоретическим результатам, однако она не лишает ни изящества, ни важности, ни оригинальности его эксперименты как с точки зрения постановки, так и по исполнению. Интерпретация этих результатов позволила Веберу доказать наличие температурных эффектов при малых деформациях кристаллических тел.

[2]) Фактически это была коконовая нить.

торые рассматривали малую деформацию шелка (равно как и других тел органического происхождения), обычно отмечали значительную нелинейность зависимости между напряжением и деформацией. Хотя Вебер и отметил наблюдавшееся отклонение от закона Гука, он не был непосредственно заинтересован в определении зависимости между напряжением и деформацией. Объснением этому, возможно, служит тот факт, что, выполняя эти опыты, он сделал свое главное открытие, которое назвал «упругим последействием» (elastische Nachwirkung).

Ввиду невозможности определить диаметр нитей Вебер обратился к введенному Томасом Юнгом (Young [1807, 1]) понятию «высоты модуля» [1]), которое отличается от обычного модуля коэффициентом весовой плотности (см. раздел 3.7). Вебер обнаружил, что длина шелковой нити, вес которой необходим для удвоения ее первоначальной длины (т. е. высота модуля), равен 864 400 м — это число он использовал для определения удлинений, вызванных приложениями нагрузками, в своих исследованиях по упругому последействию. Упругое последействие, следующее за начальным приложением нагрузки и вызываемой ею мгновенной деформацией, представляет собой медленное увеличение деформации вплоть до достижения последней некоторого асимптотического значения. После снятия нагрузки наблюдается подобное же, но прямо противоположное явление: деформация уменьшается на протяжении некоторого времени, пока не достигает значения, которое она имела перед циклом нагружения.

Для шелка В. Вебер нашел, что эти два противоположных (по знаку приращения во времени деформации.— *А. Ф.*) явления последействия имеют одно и то же количественное выражение для одинаковых разностей напряжений. Он тщательно подчеркивал отличие замеченного им явления от того, которое наблюдали Ходкинсон и Герстнер, т. е. от появления остаточных деформаций в струнах, подвергшихся трижды большим деформациям перед испытаниями. Он отмечал, что при таком нагружении не наблюдалось остаточных деформаций. Затем он выполнил свои эксперименты по исследованию упругого последействия при намного более низком уровне напряжений. Гаусс предложил для описания наблюдений Вебера следующий простой эмпирический закон [1]:

$$l = 3900 + \frac{23{,}7}{7{,}4 + T}, \tag{2.11}$$

где l — длина стержня с учетом последействия (3900 — длина в предполагаемом равновесиом состоянии); T — время. Сравнение экспериментальных данных Вебера с результатами вычислений представлено в табл. 9.

---

[1]) В силу очевидиой нелинейности такое обращение носит спорный характер

Явления упругого и теплового последействий, открытые Вебером, измерения остаточных деформаций Герстнером и Ходкинсоном, наблюдения за ползучестью, проведенные Вика, и явление

Таблица 9

Вебер (1835)

№	Время	Усилие (гс)	Измеренная длина (мм)	Вычисленная длина (мм)	Разность
1	0,0	9,341	3921,90		
2	2,1	4,215	3902,55	3902,50	—0,05
3	3,6		3902,08	3902,15	+0,07
4	4,6		3901,84	3901,90	+0,14
5	18,5		3901,61	3901,49	—0,12
6	11,0		3901,38	3901,29	—0,09
7	12,7		3901,23	3901,18	—0,05
8	26,2		3900,99	3901,00	+0,01
9	25,7		3900,75	3900,72	—0,03
10	36,0		3900,51	3900,55	+0,04
11	68,0		3900,14	3900,31	+0,17
12	250,0		3900,14	3900,09	—0,05

В оригинале книги, по-видимому, допущены опечатки в строках 5, 8 и 9 столбца «Время», если верить столбцу вычисленных длин. Вместо 18,5; 26,2 и 25,7 соответственно должны быть значения: 8,5; 16,3 и 32,9. Кроме того, не согласованы значения трех последних столбцов строки № 4.—*Прим. ред. перев.*

устойчивости, отмеченное Массоном, служили главной темой исследований в рассматриваемой области в течение более чем семидесяти лет. Эти явления использовались в качестве аргументов в многочисленных дискуссиях относительно соответствия или несоответствия экспериментам тех или иных теорий. Например, Рудольф Эммануил Юлиус Клаузиус (Clausius [1849, 1]) в 1849 г. критиковал Вебера за его гипотезу о том, что тепловое последействие связано с изменением температуры, и в то же самое время утверждал, что упругое последействие в той же степени, что и в шелке, имеет место в металлах. Оба этих ошибочных утверждения появились в попытках доказать, что на основе иной интерпретации опытов Вебера можно опровергнуть опытные данные Вертгейма о том, что коэффициент Пуассона во многих твердых телах отличен от 1/4. Открытие Гийома Вертгейма опровергало привлекательные в те времена атомистические теории упругости Симеона Дени Пуассона и Луи Огюстэна Коши, которые Клаузиус в неявной форме одобрял [1]). К 90-мм гг. прошлого века точные эксперименты Джозефа

[1]) Ссылки на работы Вертгейма даны ниже в разделе 2.14, а в разделах 3.16 и 3.19 дано подробное обсуждение этой дискуссии.

Осгуда Томпсона (Thompson [1891, 1]) и других с очень длинными образцами позволили отделить друг от друга различные эффекты последействия в металлических проволоках.

В 1841 г. через шесть лет после открытия упругого последействия, Вебер (Weber [1841, 1]) обнаружил, что это явление имеет один озадачивающий аспект. Он установил кажущийся парадоксальным

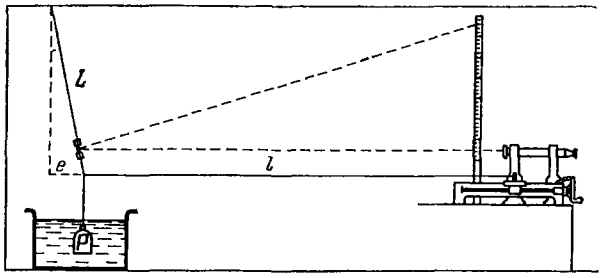


Рис. 2.18. Схема установки Вильгельма Вебера для исследования упругого последействия, при котором образцы укорачивались под действием растущей растягивающей нагрузки и удлинялись при уменьшении растягивающей нагрузки (1841).

факт, что образец может укорачиваться после увеличения растягивающей нагрузки и удлиняться после ее снижения. Этот опыт Вебер выполнил способом, показанным на рис. 2.18, который не только не требует разъяснений, но и представляет собой еще один пример изящной простоты его экспериментальных идей.

Зеркало поддерживалось двумя проволоками L, составляющими некоторый угол, прикрепленными к потолку на расстоянии 15 см друг от друга и лежащими в плоскости зеркала. Горизонтальный незакрученный шелковый образец имел длину несколько более 5 м. Постоянные установки определялись зависимостью (2.12) (для удлинения e) и зависимостью (2.13) (для горизонтального компонента T):

$$e = 0{,}2105n, \tag{2.12}$$

$$T = 0{,}179n, \tag{2.13}$$

здесь n — число делений на вертикальной шкале, отражение которой видно через подзорную трубу, установленную с обеспечением возможности перемещаться при помощи микрометрического винта. Прилагаемая нагрузка в 1782 гс, будучи подвешенной, располагалась в воде, чтобы ограничить влияние вибрации.

За день до первого эксперимента Вебер натянул шелковый образец. Перед самым началом эксперимента он замерил удлинение e=117,06 мм и сумму удлинения и первоначальной длины образца ($e+l$=5457,88 мм). Затем он быстро повернул винт, обеспечив осевое перемещение на 201,15 мм. После этого оказалось $e+l$= =5256,73 мм. Последующее поведение нити представлено в табл. 10. Постепенное *увеличение* нагрузки с 13,05 гс до 29,76 гс сопровождалось постепенным *укорочением* образца с 5241,39 мм до 5221,76 мм,

«в прямом противоречии с вышеописанным законом, согласно которому следовало ожидать удлинения» (Weber [1841, 1], стр. 1).

Во втором эксперименте нить, которая была ранее ослаблена на некоторое время, вновь натянули с помощью смещения винта на 116,27 мм. Перед натяжением Вебер измерил e=35,72 мм и суммарную длину ($l+e$=5256,73 мм). Затем последовало дополнительное

Таблица 10

Вебер (1841)

Время (мин)	Перемещение (n мм)	Время (мин)	Перемещение (n мм)	Время (мин)	Перемещение (n мм)	Время (мин)	Перемещение (n мм)
0,00	72,93	8,80	113,80	27,47	129,24	108,47	145,40
0,47	78,88	9,14	114,20	28,47	129,79	117,47	146,20
0,80	83,84	9,47	114,69	29,47	130,28	126,47	146,79
1,14	86,91	9,80	115,29	30,47	130,68	135,47	147,63
1,47	89,59	10,14	115,69	31,47	131,02	144,47	148,08
1,80	91,98	10,47	116,19	32,47	131,52	153,47	148,62
2,14	94,46	10,80	116,58	33,47	131,71	162,47	149,06
2,47	95,75	11,14	116,78	34,47	132,06	171,44	149,61
2,80	97,43	11,47	117,58	35,47	132,50	180,47	150,00
3,14	99,22	11,80	117,87	36,47	132,84	207,47	151,50
3,47	100,01	12,14	118,37	39,47	133,79	234,47	152,84
3,80	101,70	12,47	118,47	42,47	134,78	261,47	153,94
4,14	102,79	13,47	119,81	45,47	135,68	288,47	154,69
4,47	104,08	14,47	120,75	48,47	136,57	315,47	155,38
4,80	104,97	15,47	121,74	51,47	137,22	342,47	156,18
5,14	105,76	16,47	122,49	54,47	137,76	369,47	157,37
5,47	106,65	17,47	123,28	57,47	138,41	396,47	158,01
5,80	107,65	18,47	124,12	60,47	138,95	423,47	158,61
6,14	108,54	19,47	124,77	63,47	139,55	450,47	158,85
6,47	109,24	20,47	125,46	66,47	139,89	477,47	159,00
6,80	110,03	21,47	126,06	69,47	140,38	504,47	159,20
7,14	110,63	22,47	126,60	72,47	140,88	585,47	160,09
7,47	111,52	23,47	127,20	81,47	142,22	666,47	161,04
7,80	112,02	24,47	127,70	90,47	143,46	747,47	162,19
8,14	112,61	25,47	128,35	99,47	144,51	1233,47	166,08
8,47	113,31	26,47	128,84				

натяжение до $l+e$=5373,00 мм. В течение последующего за этим интервала времени постепенное *уменьшение* нагрузки с 84,37 гс до 71,29 гс сопровождалось постепенным *удлинением* с 5274,06 мм до 5289,41 мм, также «в очевидном противоречии с вышеприведенным законом, согласно которому следовало ожидать укорочения» (Weber [1841, 1], стр. 2) (см. табл. 11).

Вебер подчеркивал, что наблюдавшееся им кажущееся парадоксальным поведение является воспроизводимым. Экспериментальные кривые для описанных двух типов нагружения можно было привести к совпадению. Это видно из рис. 2.19, на котором приведены данные из табл. 10 и 11.

Таблица 11

Вебер (1841)

Время (мин)	Перемещение n (мм)	Время (мин)	Перемещение n (мм)	Время (мин)	Перемещение n (мм)	Время (мин)	Перемещение n (мм)
0,00	469,80	6,45	447,08	12,78	440,23	31,78	430,71
0,45	465,52	6,78	446,78	13,78	439,43	32,78	430,26
0,78	463,34	7,12	446,28	14,78	438,69	33,78	429,91
1,12	461,56	7,45	445,89	15,78	438,10	34,78	429,51
1,45	459,80	7,78	445,39	16,78	437,45	35,78	429,27
1,78	458,00	8,12	444,99	17,78	436,76	36,78	429,02
2,12	456,91	8,45	444,50	18,78	436,21	39,78	428,18
2,45	455,91	8,78	444,10	19,78	435,72	42,78	427,53
2,78	454,92	9,12	443,81	20,78	435,02	45,78	426,89
3,12	453,92	9,45	443,31	21,78	434,73	48,78	426,29
3,45	453,03	9,78	443,01	22,78	434,28	51,78	425,65
3,78	452,23	10,12	442,62	23,78	433,63	54,78	425,05
4,12	451,64	10,45	442,32	24,78	433,24	57,78	424,61
4,45	450,84	10,78	442,02	25,78	432,89	60,78	424,16
4,78	450,05	11,12	441,82	26,78	432,35	63,78	423,72
5,12	449,46	11,45	441,53	27,78	431,95	66,78	423,32
5,45	448,86	11,78	441,23	28,78	431,70	69,78	422,98
5,78	448,27	12,12	440,93	29,78	431,30	72,78	422,58
6,12	447,77	12,45	440,63	30,78	431,01	75,78	422,23

Вебер устанавливает наблюденный факт (Weber [1841, 1], стр. 9), на который не обращали внимания те, кто позднее ссылался на его работу:

«Можно считать фактом то, что нить после внезапного изменения растягивающего усилия не сразу приходит в состояние полного равновесия. Даже если оставить в стороне колебания, совершаемые ею после этого, и обращать внимание лишь на среднее состояние, относительно которого происходят колебания и которое обычно принимается за новое состояние равновесия, то можно сделать вывод, что это среднее состояние, всегда наблюдавшееся в подобных экспериментах, не может считаться состоянием полного равновесия; оно изменяется постепенно, но на значительную величину. В лучшем случае оно может считаться состоянием полного равновесия лишь по отношению к колебательному процессу. Но в действительности нить достигает полного равновесия только асимптотически с течением времени, вероятно, никогда не приходя в него совершенно».

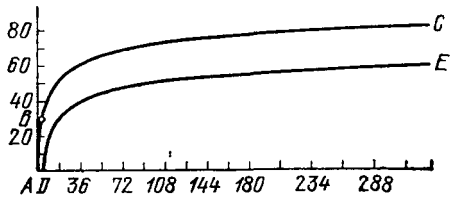


Рис. 2.19. Экспериментальные результаты, показывающие укорочение образца при увеличении нагрузки (C) и удлинение при уменьшении нагрузки (E) (Вильгельм Вебер, 1841). Парадокс Вебера при упругом последействии; по оси ординат отложено относительное перемещение (в делениях шкалы), по оси абсцисс — время (мин.)

Далее Вебер заметил, что функция (2.11), которая по смыслу должна была бы являться решением уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Bx^M \qquad (2.14)$$

при $M=2$, не оказывается таковым. Однако он обнаружил, что значение M можно найти из экспериментов и, таким образом, добиться согласования с полученными результатами решения уравнения.

Вебер также подробно исследовал зависимость между мгновенной деформацией и следующим за ней упругим последействием как функцию предыдущих нагружений, природа и время действия которых сильно влияют как на первичную, так и на вторичную деформацию. Эти работы положили начало исследованию *памяти* как параметра в механике твердого тела. Вебер подчеркивал, что уравнение (2.14) является эмпирическим, так как оно вначале было получено для случая постоянной нагрузки, а затем использовалось для переменной нагрузки. Он оправдывал это расширение сферы применимости медленным характером вторичной деформации.

Исследования Вебера дали яркое экспериментальное доказательство того, что всякая общая теория деформирования твердых тел должна включать такое поведение, как описываемое им, особенно после того, как он показал, что упругое последействие является воспроизводимым явлением и отражается в зависимости между напряжением и деформацией при очень различных историях деформирования.

Предвидя возражения, которые в самом деле последовали, Вебер уделил большое внимание тому факту, что иа его измерения температуры могли повлиять какие-то формы остаточных деформаций. В дополнение к тому, что он подвергал все свои проволочные образцы большим деформациям и показывал, что при гораздо меньших нагрузках никаких остаточных деформаций, сверх уже происшедших, не произойдет, он проделал и соответствующие измереиия для решения этого вопроса. Он оставлял цеитральный зажим открытым на несколько секунд, перед тем как зажать его, и не обнаружил никаких изменений растягивающего усилия в последующие интервалы времени, в течение которых можно было ожидать появления остаточных деформаций. Большое значение для более поздних исследований, в том числе проводимых сегодня на автоматических испытательных машинах, имеет тот факт, что таким путем Вебер смог установить промежуток времени для железа, меди, серебра и платины, за который образцы из этих материалов приходят в тепловое равновесие — порядка 6 с. Результаты измерений, проведенных спустя шестьдесят лет в гораздо более точных экспериментах с очень длинными проволочными образцами (Thompson [1891, 1]), оказались в очень хорошем согласии с данными Вебера.

2.13. Большая деформация струн из кетгута: Кармарш (1841)

В отношении исследования деформаций шелковых нитей, проведенных Вебером в 1835 и 1841 гг., интересно отметить, что эксперименты Якова Бернулли в XVII столетии, которые дали первые

свидетельства возможной нелинейности функции отклика в твердом теле, также проводились с органическими материалами, а именно с кетгутом (кишками) [1]). В своей статье в четвертом издании Британской энциклопедии, написанной в конце XVIII века, Джон Робизон с безоговорочной верой в закон Гука отверг результаты Я. Бернулли, полученные им для кишок, на том основании, что образцы состояли из скрученных нитей, и, следовательно, наблюдаемой на них нелинейностью можно пренебречь. Отвергать исследования сложных тел на том основании, что они сложные, было бы чересчур суровым ограничением для экспериментальной механики [2]). Примером беззаботного отношения Робизона к науке явля-

---

[1]) Немецкое слово «Darmseiten» обычно переводится на английский как «кошачья кишка» (cat gut) (см., например, английский перевод названия статьи Кармарша (Karmarsch [1841, 1]), в *Royal Society Catalogue of Scientific Papers* за XIX век [1909, 1], стр. 317), обсуждаемой ниже), что дало повод для саркастических замечаний, таких, например, как замечание Х. Реджинальда Хэвиса, который сказал:

«Пиликать по внутренностям кошки при помощи того, что снаружи у лошади (т. е. проводить по скрипичной струне, изготовленной из кошачьей кишки, смычком, нити которого сделаны из волос конского хвоста.— *А. Ф.*), это не то, что давать строгое и подробное описание игры на скрипке, и я не могу понять, почему вообще скрипичные струны называются кошачьими кишками: они делаются из кишок овец, коз или ягнят...» (Hawis [1898, 1], стр. 153; эта дата публикации следует из контекста. См. примечание к списку литературы в данной книге).

Можно добавить, что для этого используются также свиные кишки. Несколько далее, в главе, посвященной скрипичным струнам, Хэвис, отмечая тот факт, что с XVII века в производстве струн из кишок не наблюдается никакого прогресса и что этот вопрос находится на уровне работ 1570 и 1647 гг. продолжал описывать способ приготовления образцов. (Следует отметить, что экспериментаторы, изучающие свойства металлов, должны быть подвергнуты осуждению за то, что они обычно опускают описание таких предварительных процедур.) Он писал:

«Отказавшись от взрослых овец и коз, мы убили в сентябре молодого ягненка итальянской породы. Мы тут же вскрыли его и вынули кишки, которые были еще теплыми; без задержки растянули их на наклонной плоскости, выскребли, тщательно очистили. Затем мы поместили их примерно на пятнадцать часов в холодную воду с небольшим содеранием соды, а после этого — в воду потеплее — на несколько часов дольше. Теперь мы были готовы отделить волокнистые или мышечные пленки от окружающих их брюшинной и слизистой. Это делали женщины, которые скребли их палочками из тростника. Отобранные после этого пленки трижды в день протирались пальцами, обрабатывались маргаицевокислым калием, очищались, сортировались и нарезались поперек и вдоль. Наконец, нити сплетались — по три или четыре тонких нити для первых скрипичных струи, по три-четыре потолще для вторых струи, по шесть-семь для струны «ре». Струны коитрабаса делались из восьмидесяти пяти нитей. Потом также производилось скручивание, пропитка и полироваиие, входить в детали которых нам иет нужды, и, наконец, струны смазывались оливковым маслом и сматывались» (стр. 155, 156).

[2]) В статье Робизона, озаглавленной «Прочность материалов» и перепечатанной в «*A System of Mechanical Philosophy*» т. I, стр. 369—495 [1822, 1], читаем:

«В той же самой диссертации Гук упоминает все факты, которые Иоганн Бернулли в дальнейшем приводил в поддержку причудливой доктрины Лейбница о силах тел в движении или принципа «живой силы» (*Vires vivae*), доктрины, которую Гук мог бы по справедливости назвать своей, если бы не видел ее бесполезности.

Эксперименты, проделанные со времен Гука, показывают, что этот закон выполняется точно в тех рамках, которыми мы его ограиичили, т. е. при всех из-

ется его утверждение в той же статье, будто он растянул резиновую полоску в десять раз по сравнению с ее первоначальной длиной и получил идеальное линейное соотношение между нагрузкой и удлинением. Хотя это утверждение Робизона и не содержало никаких подробностей эксперимента, оно широко цитировалось в течение всей первой половины XIX века, пока окончательные эксперименты с резиной не обнаружили существенную нелинейность при гораздо меньшем растяжении. Я. Бернулли не осветил способ изготовления образцов из кишок, т. е. мы не знаем, испытывал ли он отдельную нить, однако можно предполагать, что он исследовал струны музыкальных инструментов, которые обычно состоят из многих нитей.

В 1841 г. Карл Кармарш, совершенно не ведая о том, что Я. Бернулли изучал деформацию кишки за 154 года до него и о том, что Джакопо Риккати повторил и обобщил эти опыты в 1721 г., т. е. за 120 лет до него, начал свою статью с утверждения: «Насколько мне известно, никакие исследования по этому предмету до сих пор не публиковались (Karmarsch [1841, 1], стр. 427). Эксперименты Кармарша проводились на «хороших» итальянских струнах из кишок, куда входили струны для контрабаса, струна «ре» для виолончели, струны «ре» и «ля» для скрипки, струна «ми» для гитары и пятая струна для арфы. Измеренные диаметры, число нитей и число закруток на ганноверский дюйм [1]) для каждой из этих струн представлены в табл. 12.

Кармарш показал, то абсолютная прочность этих струн на растяжение примерно соответствует диаметру, начиная с самого большого, т. е. для струны из 48 нитей, и кончая самым малым, т. е. для струны из трех нитей [1]. Таким образом, при деформировании скрученных многонитевых струн было продемонстрировано поведение, которое, конечно, окончательно опровергает возражения Робизона против опытных данных и выводов Я. Бернулли.

менениях формы, которые полностью восстанавливаются за счет сил упругости самого тела. Приближенно этот закон справедлив в значительно более широких пределах. Яков Бернулли в своей диссертации об упругой кривой ссылается на некоторые свои собственные эксперименты, результаты которых кажутся значительно отклоняющимися от соответствующих закону Гука; однако при более тщательном рассмотрении оказывается, что это не так» (стр. 384).

Затем, возвращаясь к тому же предмету пятьюдесятью страницами ниже, где он приводит данные Я. Бернулли, Робизон невольно обнаруживает всю абсурдность своего предыдущего утверждения:

«Яков Бернулли в своей второй диссертации об упругой кривой ставит этот закон под сомнение и приводит свои исследования к некой гипотезе относительно зависимости между силами и удлинениями. Он пишет о некоторых экспериментах со струнами лютни, в которых указанная зависимость сильно отличалась от закона Гука. Струны имели длину три фута.

Растягиваемые усилиями 2, 4, 6, 8, 10 фунтов, эти струны испытали удлинения 9, 17, 23, 27, 30 линий. Но это совершенно нетипичный вид экспериментам Струны были скручены из нитей, и механизм их растяжения был очень сложны. и включал сжатие, закручивание и т. д.» (стр. 434).

[1]) 1 ганноверский дюйм = 2,43 см.

Еще два факта, вытекающие из этой, и в других отношениях редкой по важности, серии экспериментов, заслуживают упоминания. Во-первых, функция, выражающая зависимость между напряже-

Таблица 12

Кармарш (1841)

№	Вид струны	Диаметр в ганноверских дюймах	Число нитей, из которых составлена струна	Число закруток на ганноверский дюйм
1	Контрабас	0,166	48	$1^3/_5$
2	Контрабас	0,146	45	$1^2/_3$
3	Виолончель, струна «ре»	0,089	24	$2^1/_3$
4	Виолончель, струна «ре»	0,070	12	$4^2/_3$
5	Скрипка, струна «ре»	0,048	9	$5^2/_3$
6	Скрипка, струна «ля»	0,040	4	6
7	Гитара, струна «ми»	0,027	3	$7^1/_2$
8	Арфа, пятая струна	0,029	4	6

нием и деформацией, была нелинейной и обращена вогнутостью к оси нагрузки. Если выразить данные Кармарша в произвольных единицах измерения, как это сделано с данными Якова Бернулли на рис. 2.1, то можно увидеть между этими данными близкую корреляцию. Во-вторых, Кармарш не наблюдал остаточных деформаций до тех пор, пока удлинения не достигали порядка 9—10%, что соответствует нагрузке, составляющей примерно 70% от разрушающей.

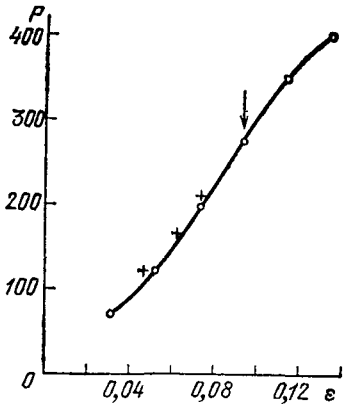


Рис. 2.20. Два опыта на растяжение струн контрабаса из кишок, показывающие наличие точки перегиба (на точку перегиба указывает стрелка), с которой начинается остаточная деформация. (Кармарш, 1841). P — нагрузка в кельнских фунтах; ε — деформация.

Чтобы исключить влияние первоначальной непрямолинейности струн, Кармарш поначалу нагружал их малым грузом; затем он оставлял струны в покое на неопределенный период времени, пока он подготавливал опыт. Нагрузку он прикладывал (осторожно помещая гири на чашу), используя железный рычаг для увеличения силы при испытании самых толстых струн. Хотя Кармарш специально не отмечает упругое последействие, открытое Вебером, факт упоминания, что он всегда выжидал примерно пять минут после приложения нагрузки, перед тем как производить измерения удлинений, показывает, что Кармарш знал о существовании этого явления.

Он измерял удлинение участка между двумя метками в средней части струны, так что база менялась с изменением длины образца от опыта к опыту в пределах от 4 до 6 ганноверских дюймов. Одна из проблем для экспериментатора сегодняшнего дня, который пожелает познакомиться с деталями экспериментов начала XIX века, состоит в преодолении трясины местных единиц измерения. Данные экспериментов Кармарша выражались в кельнских фунтах и ганноверских дюймах [1]). Поскольку Кармарш использовал мерный стержень и некоторый набор гирь, представляется очевидным, что гири покупались в одном месте, а измерительный стержень в другом. На рис. 2.20 показана зависимость между нагрузкой и деформацией для струны контрабаса, изготовленной из кишок, с базой в шесть ганноверских дюймов. Можно перевести табличные данные в значения напряжений, представленные в кгс/мм^2, поскольку Кармарш привел все размеры, необходимые для таких вычислений.

Джакопо Риккати (Riccati [1721, 1]) (см. Truesdell [1960, 1]) отмечал в 1721 г., что при высоких уровнях нагрузки его данные могут давать точку перегиба в графике зависимости между напряжением и деформацией. Подобная точка перегиба видна в данных К. Кармарша на рис. 2.20 при деформации, равной 9,3%. До этой точки перегиба остаточная деформация не наблюдалась, но в этой точке она была равна примерно 1%, что обнаружилось при разгрузке. Как ни удивительно, но с увеличением нагрузки дальнейшего повышения остаточной деформации не наблюдалось. На одной из струн наименьшего размера вообще не было обнаружено ни остаточных деформаций, ни точки перегиба вплоть до разрушения. В виолончельной струне, которая содержала вдвое меньше нитей, чем струна контрабаса, он не наблюдал остаточной деформации вплоть до деформации, равной 10%, т. е. при нагрузке немногим меньше разрушающей, при которой остаточная деформация составила 1,8%. Из-за такой близости точки перегиба к точке разрушения Кармарш не смог произвести измерений в промежутке между ними. Он предположил, что остаточная деформация, появляющаяся в точке перегиба, вызвана изменением взаимного расположения скрученных волокон.

В остальном статья Кармарша посвящена прежде всего разрушению (Karmarsch [1841, 1]). Он сравнил предельные напряжения в кишке с предельными напряжениями в обмотанной шелком проволоке, в струнах гитары, в пеньковой веревке, в шпагате, употребляемом торговцами, и в латунной фортепианной струне. Данные для двух струн контрабаса, приведенные на рис. 2.20, показывают, что воспроизводимости он добился в очень небольшой мере.

Описанные результаты Кармарша свидетельствуют о нелинейном поведении, но, строго говоря, не могут полностью относиться к главе, посвященной малым деформациям. Они включены сюда,

[1]) 1 кельнский фунт равен 467,8 гс.

ибо по ним видно, что противоречий XVII и начала XVIII века относительно линейной функции Гука и нелинейной функции Бернулли и Риккати могло бы и не возникнуть [1]), если бы было понято различие между малыми и большими деформациями.

2.14. Эксперименты по упругости и прочности основных тканей человеческого тела: Вертгейм (1846—1847)

Гийом Вертгейм был, несомненно, одним из самых тонких, а возможно, и самым значительным из экспериментаторов XIX века в области физики континуума твердого тела. Одновременно он был самой противоречивой фигурой, которую порождала эта область знаний. Его убежденность в том, что для построения содержательной теории всякий предмет следует подвергнуть длительному и разнообразному экспериментальному изучению с различных точек зрения, поставила его самого и его работы в самый центр шестидесятилетних интенсивных дебатов. Результаты опытов Вертгейма, восхищавшие всех его современников, выдержали испытание временем и составляют большинство в том множестве численных значений величин, которые используются в середине нашего века; они все еще появляются (обычно без ссылок) в современных справочниках. Сегодня, с расстояния более чем 125 лет, видно, что почти все выводы забытого ныне Вертгейма признаны само собой разумеющимися. И это не удивительно, поскольку он формировал свои суждения на основе собственных экспериментов, часто искусных и неизменно тщательных, превосходное качество и добросовестность которых почти никогда не ставились под сомнение никем из многочисленных лиц, цитировавших и использовавших его данные три четверти века, в течение которых его результаты широко применялись в поддержку той или иной теперь уже прочно забытой интерпретации.

Хотя Вертгейм получил диплом и ученую степень по медицине в Вене в 1839 г., он оставил медицину. После изучения в течение двух лет математики и физики в Берлинском университете он отправился в Париж и посвятил оставшиеся 22 года своей непродолжительной сорокашестилетней жизни экспериментальным исследованиям в области механики твердого тела. В 1853 г. он получил степень доктора наук по физике. Количество его экспериментальных результатов за этот промежуток времени огромно.

Он провел первое исчерпывающее исследование динамических и квазистатических постоянных упругости — оригинальное совер-

[1]) (Truesdell [1960, 1], стр. 62.) Труселл показал, что Христиан Гюйгенс в письме от 5 мая 1691 г. к Лейбницу подчеркивал необходимость такого различия. Письмо Гюйгенса служило ответом на письмо Лейбница, датированное 20 апреля 1691 г., из которого следует, что Лейбниц ставил под сомнение результаты Гука и спрашивал, выполнял ли Гюйгенс когда-либо подобные эксперименты.

шенное сравнительное исследование, основанное на широких экспериментах с почти всеми известными тогда металлами [1]). Его работа включала и первое серьезное изучение влияния температуры окружающей среды, магнитных полей, электрического тока и предварительной остаточной деформации на коэффициенты упругости для изотропных тел при растяжении, кручении и изгибе (Wertheim [1844, 1(а), (б), (в)]). Из изящного в экспериментальном отношении исследования, которое будет описано в разделах 3.16—3.19, он сделал по тем временам очень оригинальное и революционное открытие, что привлекательные в философском отношении атомистические теории упругости, основанные на введенных Пуассоном и Коши центральных силах взаимодействия между соседними атомами, для изотропных упругих тел не подтверждаются экспериментально. Открытие Вертгейма, сделанное им в 1848 г. (Wertheim [1848, 1]), заключающееся в том, что соотношения Коши не описывают деформирование кристаллических тел, еще через 50 лет, в конце XIX столетия, было громоподобным для некоторых теоретиков, хотя сейчас уже никто не ставит его под сомнение.

Полученное в нашем веке признание того, что соотношения Коши не соответствуют экспериментальным данным, явилось слишком поздним, чтобы послужить вознаграждением для измученного человека [2]), который после двенадцати лет пребывания в роли ми-

---

[1]) (Wertheim [1844, 1(а)]). В эту публикацию 1844 г. включены статьи, представленные в 1842 и 1843 гг. Статья, на которую выше была дана ссылка, датирована 18 июля 1842 г.

[2]) Хотя современники Вертгейма писали о нем как о человеке решительно освободившемся от чар медицины, следует подчеркнуть, что в тридцатые годы девятнадцатого века в Австрии медицинское образование было единственным доступным для австрийцев еврейского происхождения.

Отец Вертгейма был банкиром с большим состоянием. По описаниям он был руководителем венской еврейской общины. Вертгейм родился в 1815 г., уже после смерти отца, мать Вертгейма умерла через несколько дней после его рождения.

Два года, когда он посещал лекции по физике и изучал математику в Берлине под руководством Якоби, Штейнера и Дирихле, предшествовали годам исследовательской деятельности Вертгейма в Париже в лабораториях Политехнической школы и Колледж де Франс (Collége de France); полученное им в наследство состояние освобождало его от необходимости в официальной должности как источнике дохода.

Через несколько лет после переезда в Париж Г. Вертгейм на короткое время вернулся в Вену, без основания надеясь получить высокую университетскую должность у себя на родине. Однако чтобы получить эту должность, он обязан был отречься от своей религии; в противном случае он, уже известный физик-экспериментатор, мог рассчитывать лишь на маленькую должность.

Вертгейм вернулся во Францию, запросил и получил в 1848 г. французское гражданство и с тех пор хранил верность своей второй родине. В течение нескольких лет он был «внештатным экзаменатором Политехнической школы» и короткое время был внештатным профессором на факультете Монпелье (Faculté de Montpellier) (1854). В качестве члена жюри Парижской выставки 1855 г. он был награжден французским орденом Почетного легиона.

Вертгейм не был избран во французскую Академию, но дважды в 1851 и 1859 гг. он занимал высокое место в списке кандидатов. В 1848 г. он был избран членом-корреспондентом Венской, а в 1853 г.— Берлинской академий.

шени для неистовых оскорблений, иногда свойственных ученым, совершил самоубийство, бросившись с собора в городе Тур в 1861 г. Еще 25—50 лет после смерти Вертгейма в мемуарах и монографиях появлялись едкие отзывы о его интерпретациях и похвалы его экспериментам. Ирония заключается еще и в том, что бóльшая часть экспериментальных данных в этих публикациях бралась из работ Вертгейма [1]). Стало традицией, описывая совершенство экспериментов Вертгейма, с сожалением отмечать ограниченность его математических знаний, как будто тот факт, что некоторые из опытных данных Вертгейма показывали физическую несостоятельность популярных в то время теорий, можно было полностью объяснить его предполагаемым или на самом деле существовавшим недопониманием этих теорий. Вертгейм не всегда демонстрировал тонкое понимание теории упругости, это видно хотя бы из того, что в 1848 г. он использовал в вычислениях теорию упругости при малых деформациях и сравнивал результаты вычислений с опытными данными, относящимися к области очень больших деформаций резины при сжатии. Эту ошибку случайно не заметил ни один из его критиков [2]). Главная же трудность для него заключалась в том, что в середине XIX века он ставил корректные экспериментальные задачи в контексте неверных теорий.

Однако экспериментальные достижения Вертгейма многочисленны. Ему следует воздать должное за самый важный из ранних экспериментальных вкладов в фотоупругость [3]); за первое большое

Вертгейм, который остался холостяком, описывается в Альманахе Кайзеровской академии наук (*Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*) (вероятно, генеральным секретарем Академии д-ром Антоном Шёттером (Schötter)) как человек со «свободной и веселой душой», который был отрешен от жизни и почти всецело поглощен своими научными исследованиями. Можно только предполагать, основываясь на растущей горечи, которая обнаруживается в его поздних работах и описана как «состояние депрессии», предшествовавшей его смерти, что причиной ее являлась научная полемика. Газета «*Journal d'Indre-et-Loire*» от 22 января 1861 г. рассказала, что в день своей смерти Вертгейм нетерпеливо потребовал, чтобы его отвели на башню собора Св. Гатэна в Туре, города, в который он приехал по совету своего врача. Поспешно взобравшись на видовую площадку башни, Вертгейм, заметно нездоровый и очень взволнованный, бросился к парапету и, прежде чем сопровождающий сторож мог его остановить, рухнул вниз на площадь.

См. *Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften* (статья, посвященная Вертгейму), стр. 176—188 (1861—1862); J. C. Poggendorff, *Biographisch — Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der Exacten Wissenschaften*, V 2, SS. 1302—1303; Leipzig, 1863; O. Terquem «Wertheim (Guillaume)», «*Archives Israelites*», *22*, 142—147, (1861). Marcel Emile Verdet: Notices sur les Travaux Scientifiques de M. Guillaume Wertheim, Membre de la Société Philomathique de Paris, Redigée sur la demande de la Société. *L'Institut*, 29, Nos. 1432 et 1433, et 1434. Подстрочные примечания на стр. 198—201, 205—209, 213—216 (1861).

[1]) См., например, Лорд Кельвин (Kelvin [1880, 1]), а также Тодхантер и Пирсон (Todhunter and Pearson [1886, 1], [1893, 1], [1960, 1]).

[2]) Через несколько месяцев после того, как я это написал, я обнаружил, что эта ошибка Вертгейма не избежала бдительного ока Джеймса Кларка Максвелла.

[3]) Вертгейм (Wertheim [1854, 1]). В фотоупругости линейный закон связи оптических характеристик с напряжениями называется «законом Вертгейма»

исследование кручения призм с весьма разнообразными поперечными сечениями [1]); за первое исчерпывающее исследование явлений, сопровождающих осевую деформацию сжатия полых призм (Wertheim [1848, 1]); за первое исследование распространения одномерной волны растяжения в проволоке длиной свыше 3 км (Wertheim [1851, 1]) и, что представляет сегодня особенный интерес, он должен быть назван одним из первых специалистов по биомеханике (биофизике), так как в 1846 г. он исследовал упругость костей, тканей, мышц, артерий и нервов человеческого тела в зависимости от пола, возраста и влияния потери жидкости, которая происходит по прошествии какого-то времени после смерти (Wertheim [1847, 1]). Сегодня, рискуя впасть в анахронизм, можно назвать это исследование относящимся к «биомедицинской технике». Вертгейм исследовал мужские и женские черепа (всего восемь) и обнаружил, что каждый из них характеризуется нелинейной зависимостью между напряжением и деформацией. Степень нелинейности понижалась с продолжительностью высыхания образцов — новым и необычным определяющим фактором.

В 1846 г., когда были открыты остаточные микродеформации при малых полных деформациях, т. е. «упругий дефект», упругое последействие, тепловое последействие, устойчивость и неустойчивость, связанные с эффектом Савара — Массона, ползучесть Вика, которые оказали новые существенные и важные влияния на мышление ученых того периода и, таким образом, на доминирующую роль дискуссий и интерпретаций, стало трудно решать, какие же из измеренных деформаций стоит записывать [2]).

Г. Вертгейм в своих исследованиях, касающихся как органических тканей, так и металлов, всегда тщательно описывал процедуру опыта; он отмечал, что нагрузил образец до какой-то заданной нагрузки, быстро разгрузил его и записал деформацию или удлинение в обеих крайних ситуациях. Вертгейм фиксировал удлинение в разгруженном состоянии в течение нескольких минут после снятия нагрузки. Эти данные позволили подразделить деформацию на остаточную [3]) и мгновенно обратимую упругую. Этот про-

---

[1]) Вертгейм (Wertheim [1857, 1, 2]). Более ранние исследования, посвященные кручению, выполненные Дюло (Duleau [1813, 1], [1820, 1]) и Саваром (Savart [1830 1]), были важными работами, предшествовавшими этому значительно более исчерпывающему исследованию Вертгейма.

[2]) Следует снова напомнить, что это было время, когда нагружали мертвой нагрузкой, когда открывались и без труда исследовались многие деформационные явления, в противоположность современной практике испытания на стандартных жестких испытательных машинах, для которых деформация служит входной переменной, вследствие чего эти явления завуалированы.

[3]) С точки зрения сегодняшего дня стоит сказать, что хотя главные интересы Вертгейма сосредоточивались вокруг линейных явлений, он отметил, что нелинейный закон Герстнера применим ко всем металлам, в которых он наблюдал остаточные деформации. Подобно своему предшественнику Гопкинсону и работавшему позднее Баушингеру, Вертгейм выражал уверенность в том, что с повыше-

цесс он повторял с повышением нагрузки обычно до тех пор, пока не происходило разрушение. Вопреки утверждениям его критиков, Г. Вертгейм понимал и конкретно решал задачи, связанные с последействием Вебера в органических материалах. Он отмечал, что поскольку деформация может изменяться со временем, важно точно и недвусмысленно описать, что́ делается в эксперименте.

Вертгейм заметил, что зависимости между напряжением и деформацией для костей человека лишь слегка отличаются от линейных, причем существует тенденция увеличения касательного модуля с ростом напряжения, однако все другие ткани человеческого организма подчиняются следующей зависимости между напряжением и деформацией:

$$\varepsilon^2 = A\sigma^2 + B\sigma, \tag{2.15}$$

где ε — продольная относительная деформация, σ — соответствующее напряжение в кгс/мм^2, A и B — экспериментальные постоянные, которые во всех случаях принимали положительные значения. В табл. 13 приводятся экспериментальные значения коэффициентов A и B для указанных костей и других тканей. В нее включены также результаты измерения объемного веса образцов и результаты вычислений значения высоты модуля по Юнгу [1]), и, наконец, предела прочности, полученные Вертгеймом.

Вертгейм столкнулся со значительными трудностями при конструировании захватов для целой кости в опытах на растяжение. В силу этого описанные измерения были проведеиы на малых стандартных образцах. Все остальные эксперименты выполнялись на самых длинных кусках тканей, которые удавалось извлечь. Вместо использования метода наименьших квадратов для определения коэффициентов A и B, Вертгейм, извинившись в связн с этим перед читателем, повсюду, исключая случаи очень больших деформаций, пользовался для определения A и B наименьшей и наибольшей деформациями, а затем представлял результат в виде графика и смотрел, насколько близко к кривой ложатся экспериментальные точки в средней ее части. На рис. 2.21 представлено графически сравнение табулированных экспериментальных данных с результатами, найденными на основе нелинейной зависимости между напряжением и деформацней (2.15), коэффициенты в которой определены

нием точности измеренний, вероятно, выяснится, что всякая деформацня, как бы мала она ни была, сопровождается какой то остаточной деформацией; иначе говоря, понятие микропластичностн предлагалось в 1831, 1844 и 1879 гг.

[1]) Вертгейм (Wertheim [1847, 1]). Это было еще однпм сомнительным местом в рассужденнях Вертгейма, хотя в этом он ие был одинок: подобное предложение сделал ранее В. Вебер для шелковых нитей. Вертгейм получил значения коэффициентов упругости, приведенные в таблице, путем дифференцирования нелннейной функции (2.15) по деформацин, чтобы получить деформацию, которая соответствует удвоенню длины. См. гл. 3, раздел 3.7, в котором обсуждается понятие «высоты модуля» по Юнгу.

Таблица 13

Вертгейм (1847)

Материя	Пол	Возраст (в годах)	Удельный вес (тс/см³)	A (см⁴/кгс²)	B (см/кгс)	Модуль упругости	Разрушающая нагрузка
Кости:							
бедренная	ж	21	1,968	0,4585		2181	6,87
малая берцовая	ж	21	1,940	0,3690		2710	10,26
бедренная	м	30	1,984	0,5498		1819	10,50
малая берцовая	м	30	1,997	0,4857		2059	15,03
бедренная	ж	60	1,849	0,4130		2421	6,40
малая берцовая	ж	60	1,799	—		—	3,30
бедренная	м	74	1,987	0,3791		2638	7,30
малая берцовая	м	74	1,947	—		—	4,335
Сухожилия:							
малое подошвенное	ж	21	1,115	48,21	80,86	164,71	10,38
малое подошвенное	м	35	1,125	51,04	55,85	139,42	4,91
сгибатель большого пальца ноги	м	35	1,132	60,58	9,91	128,39	—
то же после частичного высушивания	м	35	1,132	29,72	5,36	183,44	—
то же после полного высушивания	м	35	1,132	28,64	0,867	186,85	4,11
малое подошвенное	м	40	1,124	54,69	48,22	134,78	7,10
малое подошвенное	ж	70	1,114	34,53	67,20	169,21	5,61
малое подошвенное	м	74	1,105	24,35	105,38	200,50	5,39
Мышцы:							
Sartorial [1)]	м	1	1,071	607 700	13 832	1,271	0,070
Sartorial	ж	21	1,049	1 351 875	8 219	0,857	0,040
Sartorial	м	30	1,058	7 960 000	38 860	0,352	0,026
Sartorial	ж	60	1,040	—	—	—	—
Sartorial	м	74	1,045	14 549 333	23 863	0,261	0,017
Нервы:							
подколенный	ж	21	1,038	—	—	—	0,769
седалищный	ж	21	1,030	9890,0	36,56	10,053	0,900
седалищный	м	35	1,071	1720,4	573,00	23,943	0,963
задний большеберцовый	м	35	1,040	—	—	—	1,959
задний большеберцовый	м	40	1,041	1426,2	149,28	26,427	1,300
седалищный	ж	60	1,028	5417,5	755,4	13,517	0,800
кожный малоберцовый	ж	70	1,052	1708,8	1078,1	23,878	3,530
седалищный	м	74	1,014	5032,0	936,8	14,004	0,590
задний большеберцовый	м	74	1,041	905,0	960,2	32,417	—
кожный нерв голени	м	74	1,050	—	—	—	—
кожный нерв голени высушенный	м	74	1,129	36,79	49,18	164,198	9,46

Таблица 13 *(продолжение)*

Материя	Пол	Возраст (в годах)	Удельный вес (тс/см³)	A (см⁴/кгс²)	B (см/кгс)	Модуль упругости	Разрушающая нагрузка
Артерии:							
бедренная	ж	21	1,056	—	—	—	0,1403
бедренная	м	30	1,014	257 747 000	5 784 200	0,052	0,1660
бедренная	ж	70	1,085	—	—	—	0,1070
Вены:							
бедренная	ж	21	1,055	1 174 780	193 970	0,844	0,0969
внутренняя вена голени	ж	21	1,048	—	—	—	0,3108
бедренная	ж	70	1,019	1 091 550	169 699	0,883	0,1490

[1]) От латинского sartor (портной). Sartorial (англ.) — портняжная мышца — мышца бедра. Название происходит от того, что эта мышца напрягается при таком расположении ног, которое характерно для позы сидящего. — *Прим. ред. перев.*

с помощью указанного выше спорного метода [1]). Помимо обнаружения хорошего соответствия этих данных одному единственному, общему для всех образцов, нелинейному закону, Вертгейм смог сделать много других выводов.

Поскольку данные Вертгейма были первыми для того времени результатами измерений, связанных с изучением упругости образцов, взятых из человеческого тела, интересно отметить некоторые детали. Он обратил внимание на то, что упругость костей, сухожилий и нервов с возрастом, по-видимому, растет [2]), в то время как упругость мышц значительно понижается. Прочность (значение разрушающей нагрузки) со временем понижается. Если расположить разные ткани организма в порядке значений их упругости и их прочности, то это будет выглядеть следующим образом: кости, сухожилия, нервы, мышцы, вены и артерии. С высыханием упругость и прочность, как правило, растут.

Для исследования последнего явления Вертгейм сравнивал данные, полученные на образцах, взятых из правой стороны тела крупной собаки породы ньюфаундленд. Образцы были взяты из мышцы,

[1]) Эти вычисления и сравнение с экспериментом еще более усложняются тем фактом, что деформации в каждой точке соответствовали текущей длине, включающей малые, но все же измеримые остаточные деформации, определявшиеся после полной разгрузки, которая производилась в промежутках между возрастающими по уровню нагруженнями. Однако табулированные данные опытов в статье Вертгейма (Wertheim [1847, 1]) даны во всех подробностях.

[2]) Биохимик Фред Хенеман высказал мнение, что поскольку увеличение упругости для физиолога означает повышение податливости (гибкости) ткани, следует отметить, что физик понимает это в обратном смысле, т. е. как увеличение жесткости.

сухожилия, нерва, вены и артерии. Через пять дней он исследовал образцы, взятые из левой стороны. Сравнение опытных данных для грудинной мышцы, пневможелудочного нерва, сонной артерии

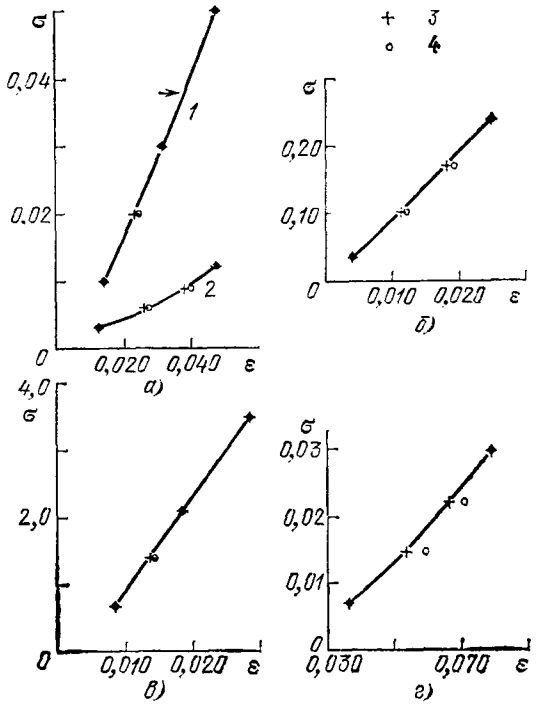


Рис. 2.21. Результаты первых экспериментов на растяжение тканей человеческого тела, проведенных не только для определения разрушающей нагрузки (Вертгейм, 1847). σ — напряжение в кгс/мм². *а*) Мышца мужчины (*1* — в возрасте 1 года, *2* — в возрасте 74 лет); *б*) седалищный нерв женщины 21 года; *в*) сухожилие мужчины 35 лет; *г*) бедренная вена женщины 70 лет. *3* — вычисленные значения, *4* — наблюдаемые в опыте.

и яремной вены, представленных на рис. 2.22, показывает, что, в то время как для мышечных тканей деформации после пятидневного периода высыхания меняются незначительно, для всех иных видов тканей наблюдается существенное изменение в ту или иную сторону с некоторой модификацией формы соответствующих графиков.

Таким образом, вывод Вертгейма о том, что его исследования тканей человеческого тела в посмертном состоянии можно экстраполировать на живые ткани, справедлив лишь для некоторых видов органических материалов. Его глубокая заинтересованность в этом аспекте проблемы имеет, возможно, не меньшее значение, чем его беспрецедентные исследования тканей человеческого тела сами по себе. Полученные Г. Вертгеймом из этих экспериментов коэффициенты упругости, которые вычислялись описанным выше сомнительным способом, представлены в табл. 14.

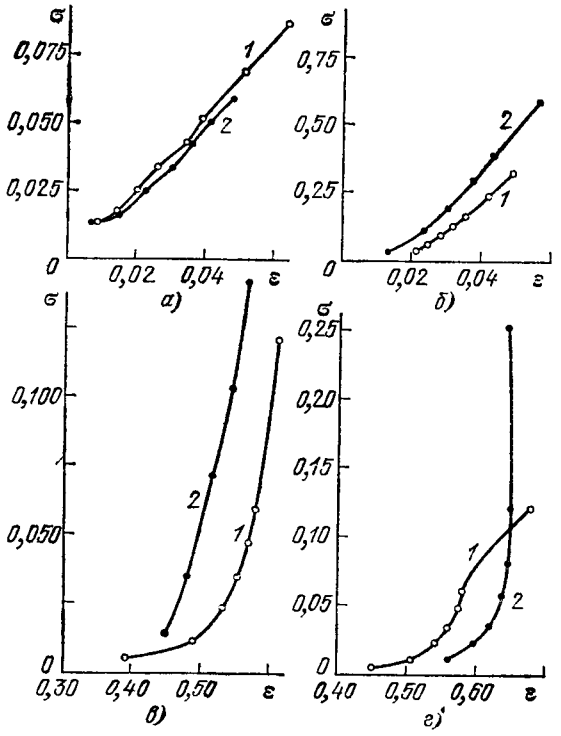


Рис. 2.22. Результаты опытов (Вертгейм, 1847) на растяжение тканей ньюфаундленда, которые представляли собой первое исследование влияния трупного окоченения (rigor mortis). σ — напряжение в кгс/мм², *1* — сразу же после смерти, *2* — через пять дней после смерти. *а*) Грудинная мышца; *б*) пневможелудочный нерв; *в*) сонная артерия; *г*) яремная вена.

Вертгейм (1847)

Таблица 14

Исследуемая часть	Собака породы ньюфаундленд					
	сразу после смерти			через пять дней после смерти		
	плотность	модуль упругости	прочность	плотность	модуль упругости	прочность
Грудная мышца	1,060	1,425	0,124	1,059	1,234	0,086
Наружное большеберцовое сухожилие	1,136	—	5,061	1,132	166,969	6,001
Пневможелудочный нерв	1,016	17,768	0,732	1,024	26,453	1,461
Главная сонная артерия	1,077	—	0,364	1,039	—	0,512
Наружная яремная вена	1,045	—	0,363	1,042	—	0,505

2.15. Дальнейшие экспериментальные исследования по упругости органических тканей: сравнение функций отклика для живых и мертвых образцов. Вундт (1858), Фолькман (1859)

Вслед за пионерной работой Вертгейма 1846 г. заинтересовались упругостью живых тканей многие физиологи, включая Вильгельма Макса Вундта [1]), критиковавшего способ, с помощью которого Вертгейм определял деформации, считая, что последний не учел более ранних экспериментов Вебера для шелка и что если бы Вертгейм определял деформации надлежащим образом — сразу после нагружения или через длительное время [2]), то он, вероятно, обнаружил бы линейность зависимости между напряжениями и деформациями. Собственным опытным данным Вундта настолько не доставало точности, что, как указал Альфред Вильгельм Фолькман (Volkmann [1859, 1]), экспериментальные точки располагаются по обе стороны от прямой, причем так, что по ним невозможно сделать никаких выводов.

Сам Фолькман тщательно подходил к проблеме измерения деформаций: он прикреплял к подвижной части образца тонкое перо, которое записывало деформации на закопченной поверхности вращающегося стеклянного цилиндра. Таким образом, ему предоставлялась возможность исследовать любую деформацию, как самую первую (что предлагал Вундт), так и возникающую через очень длительное время. Пример таких измерений, проведенных Фолькманом, представлен на рис. 2.23.

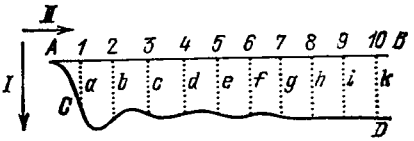


Рис. 2.23. Первая автоматическая запись удлинения в зависимости от времени при исследовании упругого последействия в органических материалах (Фолькман, 1859). *I* — удлинение, *II* — время.

Чтобы избежать ударных нагрузок на образцы при установке гирь, Фолькман помещал гири на чашу, покоившуюся на специальной платформе (при этом вес гирь не воспринимался образцом), которая постепенно убиралась, создавая удлинения, показанные на приводимом графике. Его данные были получены на образцах, изготовленных из: шелковой нити длиной 890 мм, женского волоса длиной 180 мм, двух скрепленных человеческих волос длиной 1,227 м, головной артерии собаки длиной 72 мм, блуждающего нерва человека длиной 136 мм; три эксперимента были проведены с мышцами языка лягушки длиной от 32,8 мм до 35 мм. Эти данные представлены на рис. 2.24 и 2.25 и сравниваются с кривыми,

---

[1]) Вундт (Wundt [1858, 1]). В то время Вундт был приват-доцентом по физиологии в Гейдельберге.

[2]) Такое измерение, как допускал Вундт применительно к исследованию органических тканей, не представлялось возможным.

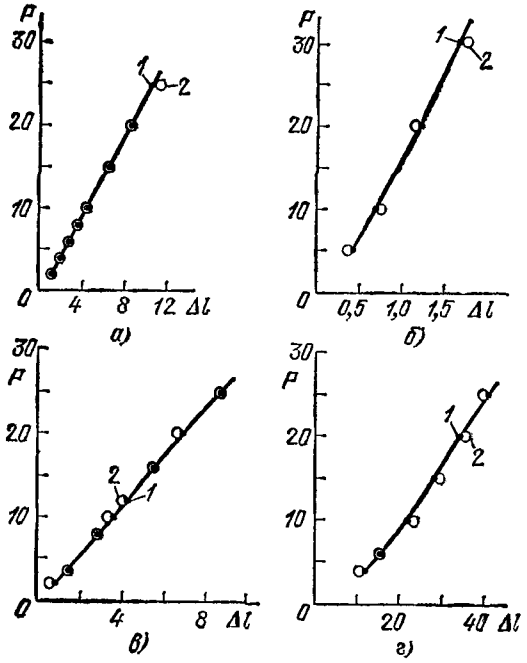


Рис. 2.24. Результаты опытов (Фолькман 1859) на растяжение и сравнение их с вычислениями по формуле Вертгейма (2.15). P — нагрузка в гс, Δl — удлинение образцов в мм, *1* — вычисления по формуле Вертгейма, *2* — опытные данные. *а*) Опыт I. Шелковая нить длиной 890 мм; *б*) опыт II. Человеческий волос длиной 180 мм; *в*) опыт III. Человеческие волосы. Два волоса общей длиной 1227 мм; *г*) опыт IV. Артерия.

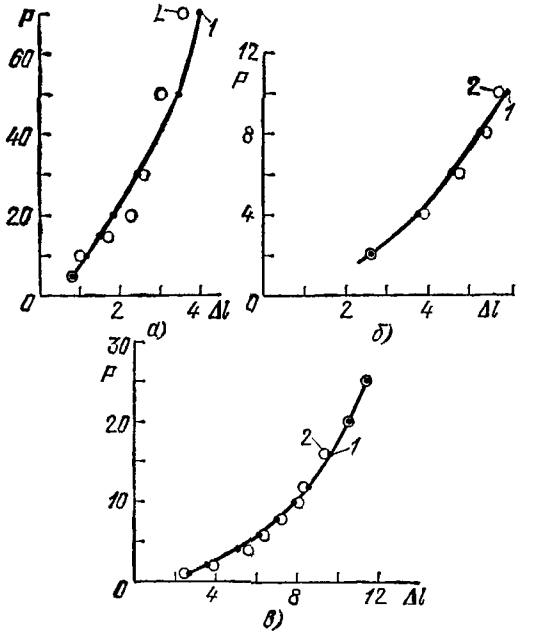


Рис. 2.25. Результаты опытов Фолькмана (1859) на растяжение и сравнение их с вычислениями по формуле Вертгейма (2.15). P — нагрузка в гс, Δl — удлинение в мм. *1* — результаты вычислений по формуле Вертгейма, *2* — опытные данные. *а*) Опыт V. Блуждающий нерв человека; *б*) опыт VI. Мышца длиной 32,8 мм языка лягушки; *в*) опыт VII. Мышца длиной 35 мм языка лягушки.

полученными по нелинейной функции Вертгейма (2.15), причем постоянные A и B были определены Фолькманом на основе изучения всех данных эксперимента по разностям значений, соответствующих всем экспериментальным точкам.

Статья Фолькмана (Volkmann 1859, 1) завершалась пространным обсуждением ошибок Вундта в теории и эксперименте, кстати в связи с очень малыми остаточными удлинениями, которые наблюдал Фолькман в своих опытах с образцом из мышцы языка лягушки при очень большой их продолжительности. Эти данные Фолькмана твердо устанавливали нелинейность таких тел и показывали, что эмпирическая формула, подобная формуле Вертгейма (2.15), в самом деле применима. В течение последующего полувека эта формула считалась верно описывающей деформации органических веществ [1]).

Если внимательно прочесть монографию Вундта 1858 г. *Die Lehre von der Muskelbewegung* и провести подробный анализ его данных, включающих результаты опытов на растяжение человеческих волос, сухожилий и вен быка, мышц бедра живых и свежеубитых лягушек, то можно сделать вывод, что критика Фолькмана была справедливой. Чтобы прочесть показания на шкале, прикрепленной к образцу, и имевшей цену деления, равную 1/50 мм Вундт пользовался микроскопом; он утверждал, что таким образом ему удавалось уловить удлинения в 1/500 мм. Фолькман оценил продолжительность одного такого измерения, необходимую Вундту-примерно в 30 секунд; за этот промежуток времени, если основываться на зависимости Фолькмана между полным удлинением и моментом записи, отмеченной выше, проявлялась большая часть упругого последействия, что частично объясняет разброс в данных Вундта, составлявший для результатов некоторых опытов от 10 до 20%. Вундт был увлечен желанием продемонстрировать применимость закона Гука при относительно малых деформациях и к органическим тканям, несмотря на то, что его собственные данные опровергали эту гипотезу.

Можно задать вопрос: имеется ли что-либо ценного в возрождении горечи прошлых научных споров, в особенности тех, возраст которых исчислялся 110 годами и которые ни к чему не вели? Упорные нападки Вундта в его монографии на Вертгейма не только ничем не были вызваны, но и являлись несправедливыми. Любопытно, что в собственных опытах Вундт сам был повинен в некоторых ошибках, которые он несправедливо приписывал Вертгейму. В своем стремлении установить, что для органических тканей «ut tensio sic vis» [1], и опровергнуть гиперболическую зависимость Вертгейма (2.15), Вундт совершил ошибку, весьма распространенную среди экспериментаторов нашего века, над которыми властвуют теории: он не

[1]) Исключение составляла резина: к 80-м годам прошлого века уже было показано, что она обладает несколько иной зависимостью между напряжениями и деформациями.

отнесся критически к собственным опытным данным, приведенным в его монографии.

При сравнении экспериментальных данных Вертгейма для грудинной мышцы только что убитого ньюфаундленда с данными Эдуарда Вебера (Weber [1846, 1]) для мышцы лягушки [1]) Вундт путает абсолютные удлинения с относительными деформациями. Вундт пишет (Wundt [1858, 1], стр. 33):

«Ни эксперименты Вебера, ни наши, о которых говорилось выше, не соответствуют закону гиперболы. И вообще на самом деле полное совпадение результатов Вебера и Вертгейма является лишь кажущимся, так как снижение растяжимости, как уже отмечалось, согласно Веберу происходит намного быстрее, чем согласно Вертгейму. Поэтому кривые, которые можно построить по данным обоих исследователей, имеют совершенно различные формы».

В. Вундт не учел того обстоятельства, что у Вертгейма (Wertheim [1847, 1]) удлинения менялись от 8,913 мм до 64,555 мм, а у

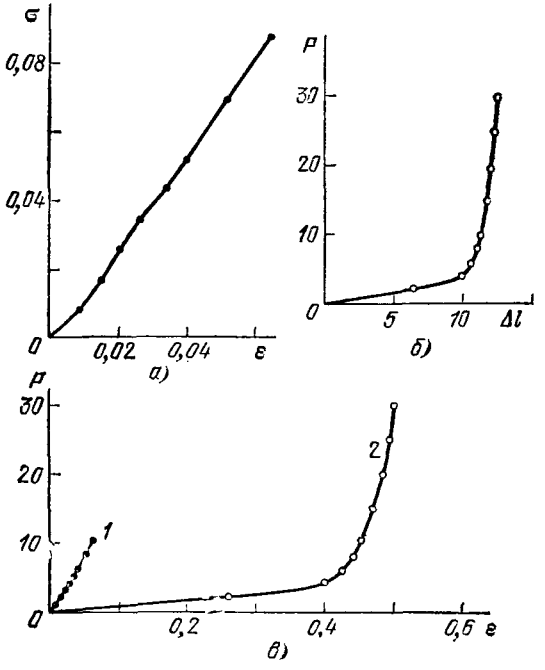


Рис. 2.26. Сопоставление Вундтом результатов Вертгейма для зависимости между напряжениями (σ) и деформациями (ε) при растяжении с результатами Эдуарда Вебера для зависимости между растягивающей нагрузкой P и удлинением Δl (P — в гс, σ — в кгс/мм², Δl — в мм) *а*) результат Вертгейма для грудинной мышцы ньюфаундленда, убитого непосредственно перед опытом; *б*) результат Вебера для мышцы лягушки; *в*) сопоставление результатов, представленных в виде зависимостей в обоих случаях между одними и теми же величинами (нагрузкой в гс и деформацией ε). *1* — Вертгейм, *2* — Эдуард Вебер.

Вебера — от 7,92 мм до 12,49 мм, в то время как длина базы прибора у Вертгейма была 1 м, а у Э. Вебера 0,02495 м. Таким образом, диапазон изменения деформаций, который служит существенной характеристикой деформирования, у Вертгейма был от 0,0085 до

[1]) Musculus hyglossus.

0,06455, в то время как Вебер наблюдал гораздо большие деформации — от 0,317 до 0,500. Следовательно, сопоставление опытных данных, относящихся к органическим тканям в целях изгнания гиперболического закона из физики довольно-таки смехотворно [1]). Упомянутые данные Вертгейма и Вебера представлены на рис. 2.26.

Я представил на графике данные Вундта, как это сделал Фолькман 110 лет назад, и обнаружил, что, невзирая на постоянное подчеркивание Вундтом высокой точности своих экспериментов и данную оценку точности определения им удлинений значением до 1/500 мм, разброс достигает 22%. В одной итоговой таблице, содержащей результаты шестнадцати измерений, пять оказываются ошибочными при сопоставлении с табулированными данными. Одна из ошибок в аргументации Вундта в пользу линейного закона особенно существенна [2]) — он не сумел заметить, что в его экспериментах также имели место остаточные деформации. Несмотря на утверждение Вундта, что закон Гука является основой для аналитического описания малых деформаций и органических тканей, в графическом представлении эти данные, что любопытно, не только не выглядят линейными, как отметил, Фолькман, но графики делают поворот вверх таким же образом, как это следует из данных Вебера, Вертгейма или Фолькмана, относящихся к органическим материалам.

Мы обсуждаем здесь работу Вундта не только в связи с замечаниями Фолькмана по поводу несправедливых нападок Вундта на Вертгейма, но и потому, что два качественных аспекта его экспериментов обсуждаются иногда неудачно. Одним из них является его сравнение зависимостей между напряжениями и деформациями для мышц бедра живой лягушки и для такой же мышцы, испытанной в промежутке 30 мин после смерти лягушки, с учетом влияния как усталости, так и постоянства нагрузки на живую мышцу. Второй интересный аспект экспериментов Вундта состоит в его исследовании, на образцах из человеческого волоса, а также вены быка, зависимости между первичными и вторичными деформациями, с учетом упругого последействия, в условиях наличия последовательности многочисленных приращений при нагружении и разгрузке.

Вслед за описанием, которое нефизиолог сочтет довольно жестоким,— деталей процедуры приготовления образцов, включая указание на необходимость учитывать, как плохое («плачевное»,

---

[1]) Следует также отметить, что Вундт при сопоставлении этих данных не учел, что Вертгейм табулировал напряжения в зависимости от деформаций, а Вебер — нагрузки в зависимости от удлинений.

[2]) Фолькман (Volkmann [1859, 1], стр. 312) так комментирует эту ошибку: «Вундт получил в своих вычислениях, сведенных в таблицу (стр. 29), совсем другие числа, по его мнению лучше отвечающие опытным данным, которые остались для меня непонятными».

«жалкое») состояние [1]) образца влияет на его упругость,— идет ряд таблиц, содержащих экспериментальные результаты опытов В. Вундта с мышцами живой лягушки. Для краткости эти табличные данные представлены на рис. 2.27.

В определенные моменты времени Вундт прикладывал нагрузку в 2 гс и записывал упругие удлинения, а также остаточные деформации после разгрузки. В некоторых случаях он производил много

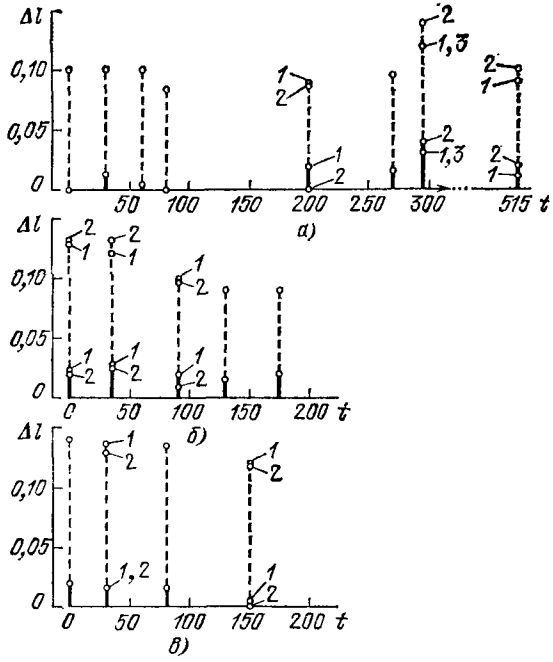


Рис. 2.27. Опыты Вундта (1858). Последовательное нагружение живых мышц, показывающее изменение упругого и остаточного удлинений на примере деформации бедренной мышцы лягушки. Нагрузка повсюду равнялась 2 гс, штриховой линией показано упругое удлинение, сплошной линией — остаточное, числа рядом с точками указывают номер нагружения. *а*) Опыт IX; *б*) опыт X; *в*) опыт XI. Δl — удлинение в мм, t — время в мин.

последовательных нагружений и разгрузок без перерывов. В опыте X, в отличие от опытов IX и XI, в которых лягушка оставалась здоровой, Вундт описал состояние образца, которое определил как «жалкое». Он отметил, что в этих условиях упругость падает и все измерения указывают на значительность доли остаточных деформаций.

В двух других сериях экспериментов с мышцами живых лягушек Вундт сравнивал удлинение, как функцию нагрузки, для образцов, которые непосредственно перед опытом были нагружены на два часа силой в 20 гс, с удлинениями образцов, которые он перед опытом в течение пяти минут повторно нагружал силой в 20 гс. После нескольких циклов нагружения, как можно видеть из рис. 2.28, наклоны кривых в опытах двух типов получились приблизительно одинаковыми.

[1]) «Elend» (нем.).

Ссылаясь на неприведенные им значения модуля упругости, Вундт отметил существенное изменение угла наклона кривых, выражающих зависимость удлинения от нагрузки, при наличии

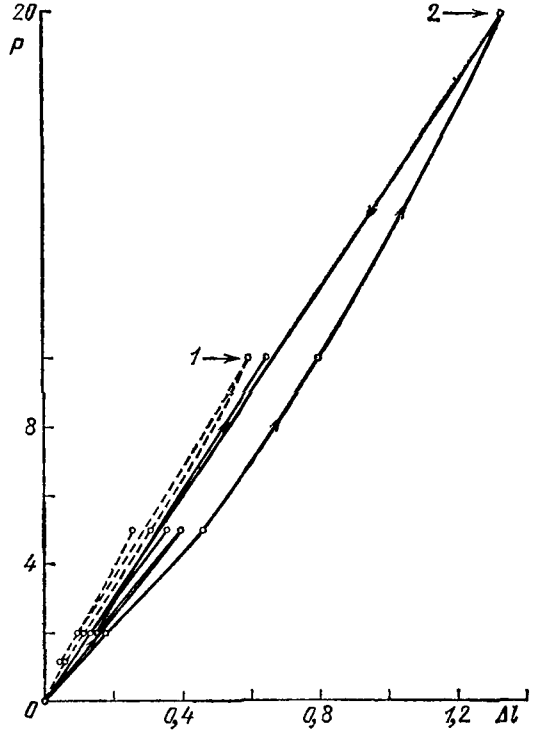


Рис. 2.28. Опыты Вундта (1858). Результаты экспериментов, выполненных для исследования влияния истории предварительного нагружения на последующее поведение живых мышц лягушки при растяжении. Сплошная линия представляет результаты опыта VI, штриховая — опыта VII. *1* — нагружение в течение 2 часов силой в 10 гс, *2* — несколько нагружений продолжительностью по 5 мин, силой в 20 гс с полной последующей разгрузкой в промежутках между нагружениями; *P* — нагрузка в гс, *Δl* — удлинение в мм.

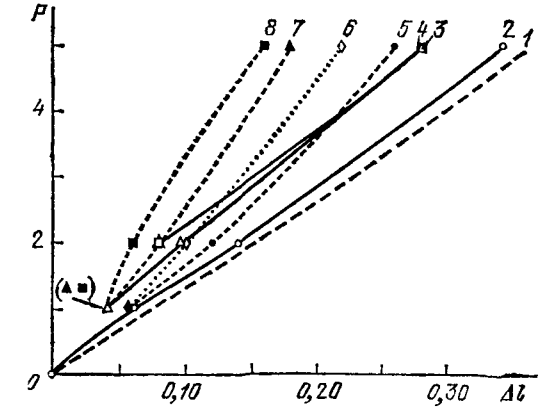


Рис. 2.29. Сравнение результатов опытов на растяжение мышечных тканей через последовательные интервалы времени после смерти с усредненными результатами семи опытов с живой мышцей (опыт VIII, Вундт). В течение промежутков времени в 17,5 и 18 часов мышцы находились вне испытательной машины и выдерживались «в парах воды»: *1* — результаты усреднения семи опытов с живой мышцей, *2* — в момент начала эксперимента, *3* — через 20 мин., *4* — через 70 мин., *5* — через 18,5 ч., *6* — через 43,25 ч., *7* — через 20,5 ч., *8* — через 24,5 ч. *P* — нагрузка в гс, *Δl* — удлинение в мм.

rigor mortis (трупное окоченение (лат.).— *А. Ф.*). На рис. 2.29 имеющиеся у Вундта данные сравниваются с усредненными результатами семи опытов с мышцами живых лягушек. Сравнение резуль-

татов эксперимента с живыми мышцами, продолжавшегося 70 мин., с аналогичными результатами эксперимента с мышцами, проведенного сразу же после смерти и через 20 мин. после смерти, показывает, что все наклоны касательных к кривым, или, иначе, связанные с ними модули, остаются такими же, но на графике σ—ε сдвигается начало деформаций.

Между 70 мин и 18,5-ч Вундт убирал образцы из испытательной машины и помещал их в «водяной пар» примерно на 17,5 ч, после чего он снова испытывал образцы и наблюдал очевидное увеличение углов наклона касательных к кривой в соответствующих одинаковым значениям ε точках. Такое увеличение он приписал влиянию *rigor mortis*. Мой коллега-биохимик [1]) сказал мне, что скорее всего за эти 17,5 ч образцы просто полностью сварились, внеся, таким образом, в механику еще один неучтенный фактор. Во всяком случае можно отметить, что дальнейшие испытания в промежутке до 43,25 ч, включая второе 18-часовое пропаривание, дали существенно

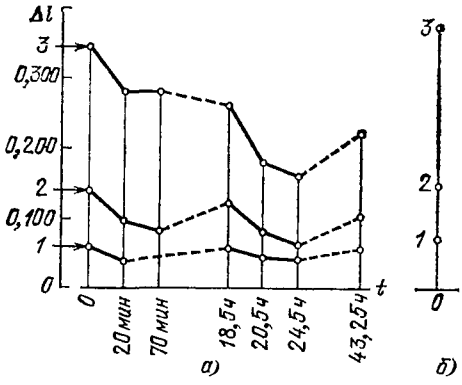


Рис. 2.30. Опыты Вундта (1858). Изменение удлинения бедренной мышцы лягушки при трех уровнях растягивающей нагрузки в зависимости от времени, прошедшего после смерти, в сравнении с удлинениями живой мышцы. *а*) Результаты для мышц мертвой лягушки; штриховыми линиями показаны промежутки времени, на которые образец убирался из машины (первый промежуток продолжительностью 17,5 ч, второй — продолжительностью 18 ч, *1* — нагрузка 1 гс, *2* — нагрузка 2 гс, *3* — нагрузка 5 гс, Δl — удлинение в мм, t — время от начала эксперимента (на оси абсцисс масштаб не соблюден); *б*) результаты для живой мышцы (взяты из опытов I—VII).

постоянный угол наклона касательных к графику в соответствующих его точках снова с некоторым сдвигом начала деформаций в направлении оси нагрузки (со временем этот сдвиг возрастал).

Изменения упругости этих образцов при заданных нагрузках в зависимости от времени сопоставляются на рис. 2.30 с усредненнымн результатами для живых мышц. Можно заметить, что в описанных условиях нагружения зависимость удлинения от нагрузки существенно изменяется.

Добавив к списку определяющих факторов «жалкое состояние», *rigor mortis* и, возможно, сваривание, мы переходим ко второй серии экспериментов по исследованию деформаций растяжения человеческого волоса и вены быка, которая здесь представлена на рис. 2.31. Здесь видно упругое последействие, хотя, как указывал Фолькман (Volkmann [1859, 1]), значительная его доля была утеряна Вундтом,

[1]) Профессор Чарльз Тезар из университета Джона Гопкинса.

поскольку она проходила за первые полминуты, в которые он не мог, вероятно, вести наблюдения.

Эти первые исследования для органических тканей явления релаксации при многократных приращениях нагрузки послужили

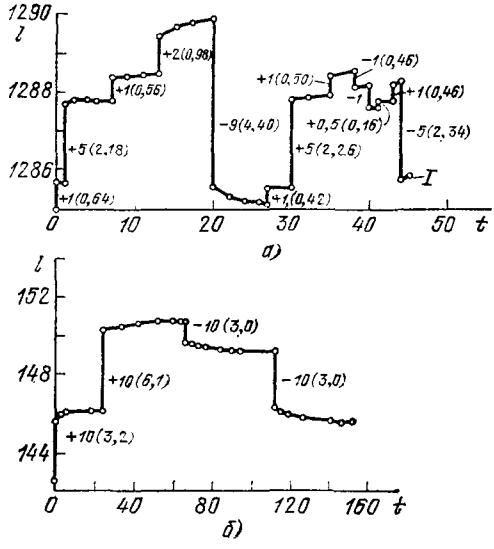


Рис. 2.31. Опыты Вундта (1858). Упругое последействие в органических тканях. Числа показывают нагрузку, приложенную в каждом случае. *а*) Три человеческих волоса; б) вена быка; l — длина образца в мм, t — время в мин.

источником для серии интересных комментариев Вундта, развивающих более ранние оригинальные идеи Вебера относительно влияния всей прошлой истории деформирования и на характер поведения при первом возрастающем нагружении, и на последующее упругое последействие.

2.16. «Отмена» закона Гука Британской Королевской комиссией по железу в 1849 г.

В 1849 г. Британская Королевская комиссия, «назначенная для того, чтобы исследовать применение железа для железнодорожных сооружений» [1]), рекомендовала инженерам впредь заменить [2]) линейный закон упругости Гука для железа при растяжении,

---

[1]) Отчет комиссии по железу (Iron Comission Report [1849, 1]). Единственный известный мне экземпляр на английском языке это — двухтомное издание в библиотеке Института железа и стали (Iron and Steel Institute) в Лондоне. Мне удалось ознакомиться только с французским переводом этого отчета [1851, 1]. В издании 1851 г. опущено Приложение, содержащее дополнительные экспериментальные данные

[2]) Здесь нет даже намерения намекнуть на то, что Британские инженеры согласились с этим предложением, чего они, очевидно, не делали; просто отмечается тот интересный факт, что Королевская комиссия в 1849 г. действительно сочла необходимым сделать такое предложение.

сжатии и изгибе параболической зависимостью

$$\sigma = A\varepsilon - B\varepsilon^2. \tag{2.16}$$

Ее заключение основывалось на детальном изучении имевшихся в распоряжении данных экспериментов с железом, полученных главным образом Ходкинсоном [1]) в течение почти 20 лет экспериментальной работы.

Годом позже профессор Джордж Габриель Стокс прочел доклад от имени Хомерсема Кокса, который предположил, что те же самые экспериментальные данные из отчета комиссии по железу лучше соответствуют зависимости, названной им гиперболическим законом упругости:

$$\sigma = \frac{\alpha\varepsilon}{1+\beta\varepsilon}. \tag{2.17}$$

Этот доклад Кокса (Cox [1856, 1]), опубликованный полностью в Трудах Кембриджского философского общества *(Transactions of the Cambridge Philosophical Society)* в 1856 г. содержал пространный анализ погрешностей данных экспериментов Ходкинсона по растяжению, сжатию и изгибу, включенных в Отчет Комиссии по железу, с целью разработки нелинейного закона упругости для железа, который уменьшил бы среднюю погрешность. Успех Кокса в этом эмпирическом предприятии показан в табл. 15 для усредненных данных по растяжению четырех различных сортов чугуна и по прогибу в середине пролета балки из бленавонского железа (Blaenavon iron) прямоугольного сечения высотой 1,552 дюйма, шириной 3,066 дюйма и длиной 13,5 фута. Коэффициенты параболической формулы, рекомендованные Комиссией по железу для этих экспериментов, и гиперболической формулы, предложенной Коксом, включены в таблицу.

Различие в средних величинах абсолютных значений погрешностей согласуется с заключением Кокса, что его гиперболический закон упругости обеспечивает лучшее приближение к данным эксперимента, чем предложенный комиссией параболический закон. Интересно, что 47 годами позже, в 1897 г., Рудольф Мемке (Mehmke [1897, 1]) перепроверил этот вопрос подбора кривых, соответствующих различным аналитическим функциям, включая сюда параболическую, гиперболическую и другие нелинейные зависимости между напряжением и деформацией, которые были предложены к тому времени. Мемке сделал вывод, что параболический закон упругости для инфинитезимальных упругих деформаций, установленный Яко-

[1]) Эти данные включали большое число результатов опытов Ходкинсона помимо описанных выше; последние выполнялись в 40-х гг. XIX века. Среди них был ряд опытов на осевое растяжение и сжатие многих типов железных стержней квадратного поперечного сечения с размером стороны, равным 1 дюйму, и длиною 10 футов. Эксперименты по сжатию выполнялись внутри трубок для предотвращения выпучивания и поэтому должны оцениваться с осторожностью.

Таблица 15

Кокс (1856). *Удлинение*

Удлинение в дюймах (e)	Соответствующая нагрузка (сила тяжести) в эксперименте (w)	Значение нагрузки, вычисленное по гиперболической формуле (w_h)	$w_h - w$	Значение нагрузки, вычисленное по параболической формуле (w_p)	$w_p - w$
0,0090	1 053,77	1 040,84	—12,83	1 028,70	—25,07
0,0137	1 580,65	1 567,06	—13,59	1 552,91	—27,74
0,0186	2 107,54	2 103,43	— 4,11	2 089,92	—17,62
0,0287	3 161,31	3 171,73	+10,42	3 166,25	+ 4,94
0,0391	4 215,08	4 222,23	+ 7,15	4 231,46	+16,38
0,0500	5 268,85	5 272,51	+ 3,66	5 301,09	+32,24
0,0613	6 322,62	6 310,84	—11,78	6 358,27	+35,55
0,0734	7 376,39	7 369,11	— 7,28	7 435,22	+58,83
0,0859	8 430,16	8 409,10	—21,06	8 484,63	+54,47
0,0995	9 483,94	9 482,86	— 1,08	9 554,78	+70,74
0,1136	10 537,71	10 538,28	+ 0,57	10 585,31	+47,60
0,1283	11 591,48	11 579,18	—12,30	11 574,28	—17,20
0,1448	12 645,25	12 683,16	+37,91	12 580,39	—64,86
	13		143,74	13	473,24
	Среднее отклонение:		11,05		36,40

Параболическая формула: $w = 116\,117e - 201\,905e^2$

Гиперболическая формула: $w = 118\,156{,}424 - \left(\frac{1}{e} + 2{,}41\right)$

В столбцах $(w_h - w)$ и $(w_p - w)$ в итоговой строке приведены суммы абсолютных значений разностей. — *Прим. ред. перев.*

вом Бернулли и заново открытый Карлом Бахом (Bach [1897, 1]) в том же 1897 г., наилучшим образом соответствует данным эксперимента. Разности были чрезвычайно малы. Анализ Мемке и данные Баха будут приведены ниже в разделе 2.24.

Во введении к своему докладу Кокс счел необходимым проинформировать читателей, что нелинейная упругость при инфинитезимальных деформациях имеет длинную историю, начиная с работ Якова Бернулли (Bernoulli [1694, 1]) и Лейбница (Leibniz [1690, 1]), цитированных выше. В отношении характера железных отливок, использованных в экспериментах, обсуждавшихся Коксом, уместно обратить внимание на наблюденный им факт, состоящий в том, что значения экспериментальных постоянных α и β изменяются в зависимости от размеров образцов [1]). В связи с этим отмечен факт,

[1]) Аналогичные наблюдения были сделаны Кармаршем (Karmarsch [1859,1]), который ввел аналитическую зависимость между диаметрами образцов и их прочностью на разрыв для железа одной и той же плавки, подчеркивая, таким образом, неоднородность материала.

что чем меньше размеры отливки, тем выше упругость. Такой «масштабный» эффект и связанную с ним остаточную деформацию при очень малых напряжениях он назвал, пользуясь терминологией Ходкинсона, «дефектом упругости». Кокс закончил свой доклад утверждением:

«Большим, до сих пор не заполненным пробелом, препятствующим совершенствованию гиперболического или любого другого гипотетического закона упругости, является необходимость знания тех изменений прочности и упругости материала, которые зависят от размеров отливок. Чрезвычайно желательно, чтобы этот недостаток экспериментальных данных не мог долго оставаться невосполненным» (Cox [1856, 1], стр. 190).

Во все времена большинство из тех, кто пытается устранить такой «недостаток экспериментальных данных», преуспевает просто в дальнейшем способствовании общей неразберихе; они описывают как безусловные заключения, выведенные из данных с большим разбросом, из плохо продуманных экспериментов, которые на самом деле изобилуют вспомогательными эмпирическими гипотезами, предназначенными для «подтверждения» модных общепринятых объяснений. Подходящим примером этого является статья, представленная Французской академии Артуром Жюлем Морэном (Morin [1862, 1]) в 1862 г. Он пытался экспериментально продемонстрировать, что результаты многочисленных опытов Ходкинсона по одноосной деформации, полученные двадцатью или тридцатью годами ранее, с сопутствовавшей им нелинейностью, могут быть опровергнуты на основе трех грубых опытов с тремя проволоками длиной от 22 до 24 м. Морэн самоуверенно заключил, что остаточная микродеформация не возникает при очень малых деформациях и что «*ut tensio sic vis*», окончательно подтверждено наблюдениями. Касаясь своих плохо описанных опытов, двух с образцами из меди и одного из железа, он упоминает только о постоянных затруднениях с разматыванием проволоки из мотков от 0,6 до 0,7 м в диаметре; он не описывает никаких деталей эксперимента, ни того, как он измерял удлинение, ни того, как закреплялись проволоки в галерее для экспериментов Школы искусств и ремесел (*Conservatoire des Arts et Métiers*) [1]. Остаточная деформация [2], которая менялась от даже отрицательных до ожидавшихся положительных значений $400 \cdot 10^{-6}$, была приведена без указания величины соответствующей полной деформации. Упругое последействие и момент времени реги-

[1]) Как будет показано далее, даже Роберт Гук в 1678 г. упоминал гвоздь, на котором он подвешивал свою 40-футовую проволоку.

[2]) Любопытно, что Морэн использовал эти данные, чтобы опровергнуть результаты Ходкинсона. Последний точно измерил остаточные деформации от $2 \cdot 10^{-6}$ до $260 \cdot 10^{-6}$ в первых 13 нагружениях при полной относительной деформации 0,00120; при последующем нагружении он обнаружил, что возникают относительно большие остаточные деформации. Значение остаточных удлинений в опытах Морэна было тем же самым, что и в опытах Ходкинсона. Следовательно, вся аргументация Морэна основывалась на одном сомнительном отрицательном полученном им значении.

страции результатов не упоминались. Морэну следовало бы понять, что его результаты были настолько не убедительны, что не представляли собой никакой ценности. Вместо этого он сосредоточил свое внимание на малости значения экспериментально полученных остаточных деформаций, сделав туманное предположение, что изменчивость (разброс) его результатов была вызвана тепловыми эффектами и пришел к заключению, что он окончательно опроверг предыдущие наблюдения нелинейности при малых деформациях. Закон Гука, сказал он, очевидно, применим во всех случаях.

Игнорируя результаты экспериментов Ходкинсона со множеством десятифутовых образцов, выполненных на растяжение или сжатие, чтобы проверить данные для длинных стержней, и совершенно не зная о результатах Герстнера для железных проволок, Морэн приписал все измеренные остаточные деформации и нелинейное поведение металлов сложной структуре пятидесятифутовых образцов Ходкинсона. Опять же, без точного указания порядка значений деформаций или точности измерений Морэн привел данные по модулям упругости в форме, введенной Эйлером, или «высоты модуля», предложенной Юнгом [1]). Что касается воспроизводимости, то он получил числа, которые отличались от полученного им среднего значения в пределах от —11 до +20% и которые были на 10—50% меньше значений модуля упругости E для меди и железа, полученных другими исследователями в течение столетнего промежутка времени (1812—1912) [2]). Действительно, опыты Морэна с длинной проволокой были выполнены всего за три года до проведения Кельвином в 1865 г. в башне университета в Глазго тщательных экспериментов с двумя проволоками для компенсации температурного эффекта.

Я привожу здесь эксперименты Морэна середины XIX столетия не только как пример опытов с никудышними результатами и поверхностных заключений, но также как пример поспешного и продолжительного признания таких экспериментов заслуживающими «уважения» лишь на основании факта их опубликования в «*Comptes Rendus*». В течение последующих 30 лет на них ссылались в литературе как на имеющие большое научное значение, вместо того чтобы рассматривать их как ошибочную, необоснованную атаку на серьезную работу компетентного предшественника — ученого, тща-

[1]) См. гл. III, раздел 3.7.

[2]) Морэн усреднил значения высоты модуля, установленные более ранними исследователями,— 12 000 000 000 км для холодно-тянутой красной меди и 10 500 000 000 км для отожженной красной меди, получив значение 11 250 000 000 км. Он сравнил последнее со средним значением 7 338 740 405 км, полученным в его опытах, каждый из которых выполнялся с двумя идентичными проволоками, при необъяснимо большом отличии отдельных результатов: от 6 521 770 186 км до 8 777 809 696 км. Он отклонил предыдущие данные по модулям и привел бо́льшие значения плотности, как если бы его собственные, явно неточные, данные были первым окончательным подтверждением справедливости закона Гука.

тельно описавшего все свои экспериментальные методы и использованные допущения [1]).

Только в силу случайного стечения обстоятельств последующие поколения игнорировали рекомендации Британской Королевской комиссии по железу, которые базировались на правильных экспериментальных результатах, и приняли точку зрения Морэна, эксперименты которого были никчемными. Скорее математическая простота, чем невнимание к «незначительным», но хорошо установленным деталям эксперимента, дала толчок к принятию линейности.

2.17. Эксперименты по релаксации напряжений в стекле и латуни: исток нелинейной вязкоупругости. Кольрауш (1863)

Противоположностью поверхностному изучению вопроса Морэном в середине XIX столетия были глубокие экспериментальные изыскания Фридриха Кольрауша (Kohlrausch [1863, 1]), выполненные в 1863 г. Кольрауш также занимался перепроверкой и развитием открытий 30-х гг. XIX века. Он заметил, что, кроме несколь-

[1]) В графе заслуг Морэна должно быть отмечено то, что он поощрил и сделал возможным исследование Треска пластического течения. В 1860 г., как раз перед тем, как Треска начал свою классическую серию экспериментов, он вместе с Морэном стал участником исторического события, представляющего немалый интерес даже с точки зрения людей XX столетия. В марте 1860 г. в литейной мастерской Морэна в Нантерре был отлит первый образец алюминиевой бронзы (10% алюминия, 90% меди).

Некий «месье Бурж» сравнил разрушающую нагрузку для нее не только с соответствующей величиной для железа, но также и для маленького стержня из нового элемента, алюминия. Хотя алюминий был впервые восстановлен из окиси в 1827 г., определение его модуля упругости E (постоянная материала, определяемая наклоном графика линейной зависимости между напряжением и деформацией, полученного в эксперименте по одноосному растяжению или сжатию стержня), насколько я знаю, не проводилось ни Вертгеймом, ни кем-либо другим. Не только цена алюминия, фунт которого стоил в 1856 г. 90 фунтов стерлингов, отбивала охоту к его изучению, но также и казавшееся в то время очевидным отсутствие перспектив его практического использования. Открытие алюминиевой бронзы высокой прочности пробудило интерес Морэна и Треска к определению модуля упругости самого алюминия.

Были проведены два опыта, один с образцом в виде литого алюминиевого стержня квадратного поперечного сечения со стороной 1,125 см и длиной 25,6 см, а другой с прямолинейным полированным стержнем прямоугольного поперечного сечения высотой 0,42 см, шириной 3,6 см и длиной 1 м. Измерения прогиба в середине пролета балки на двух опорах позволили определить значения модуля упругости: для литого стержня равное 6603 кгс/мм^2 и для метрового стержня — 6911 кгс/мм^2. Это были средние значения, полученные для ряда значений приращений нагрузок и прогибов, которые давали отдельные значения модуля, заключенные между столь низким значением, как 5900 кгс/мм^2, и значением, равным 7500 кгс/мм^2.

При этом первом определении модуля упругости E алюминия, неизвестной чистоты, Морэн и Треска предложили выбрать среднее значение для двух стержней, равное 6757 кгс/мм^2. Это число можно сравнить с современным значением модуля упругости алюминия при комнатной температуре, равным 7200 кгс/мм^2 (Morin, Tresca [1860, 1]).

ких комментариев его отца, Р. Кольрауша, в последующие 30 лет совершенно отсутствуют работы по исследованию упругого последействия, открытого Вебером [1]). Кольрауш затем описал свое собственное открытие важного родственного явления, релаксации напряжений. С доскональностью, характерной для тех, кто испытывал сравнительно редкое удовольствие обнаружения подлиино нового и явно важного явления в природе, Кольрауш выполнил эксперименты четырех различных типов, которые и по сей день важны для понимания релаксации напряжений [2]).

Во многих исследованиях малых деформаций твердых тел, проводившихся в то же время, что и опыты Кольрауша (Kohlrausch [1863, 1]), одновременно обнаруживались в различной мере явления микропластичности, ползучести, упругого и теплового последействий. Чтобы свести исследование деформаций только к изучению упругого последействия, Кольрауш проводил свои опыты по кручению стеклянных нитей длиной 35 мм из хорошо очищенного стекла, для которых он не мог обнаружить поддающихся измерению остаточных деформаций в исследованном им диапазоне изменения деформаций [3]). Промежуток времени от начала опыта до момента проведения измерений был достаточно велик и тепловое равновесие успевало установиться.

Целью Кольрауша было изучение зависимости от времени крутящего момента, необходимого для удержания закрученной нити в фиксированном положении, для сравнения с результатами, описывающими зависимость от времени угла закручивания при постоянном крутящем моменте. Он хотел также изучить влияние продолжительности поддержания образца в одном фиксированном положении перед введением условия фиксации крутящего момента или угла закручивания, которое предшествует изучению упругого в отношении фактора времени последействия. Для достижения этой цели он видоизменил прибор, известный как синусэлектрометр [1]. Один конец вертикальной нити мог вращаться так, чтобы можно было точно определить его смещение относительно магнита, подвешенного на противоположном конце. По отношению к магнитному полю Земли, три полных поворота, или 1080°, вызывали поворот магнитного элемента на угол несколько меньший, чем максимальное его значение,

---

[1]) Он явно был незнаком с исследованиями органических тканей Фолькмана и Вундта, выполненными пятью годами ранее. Поскольку опыты Вундта также проводились в Гёттингене, тем более удивительно то, что Кольрауш не знал о них. Очевидно, к 60-м гг. XIX столетия физиология и физика, представленная в Геттингене Гельмгольцем и Вильгельмом Вебером, уже перестали быть в тесной взаимной связи.

[2]) Эти эксперименты Кольрауша могут быть сравнены с экспериментальными исследованиями XX века; такое сопоставление и делается ниже в разделе 3.43.

[3]) В отличие от Вебера, Кольрауш не создавал перед опытами предварительных больших деформаций в образцах. У него было, возможно, правильное мнение о том, что вследствие этого он обойдет влияние неизвестных факторов на результаты эксперимента.

равное 90°. Поворот магнитного элемента достигал 90° при повороте примерно на 1200°. В различных экспериментах, используя демпфированный гальванометр, он наблюдал в течение нескольких часов

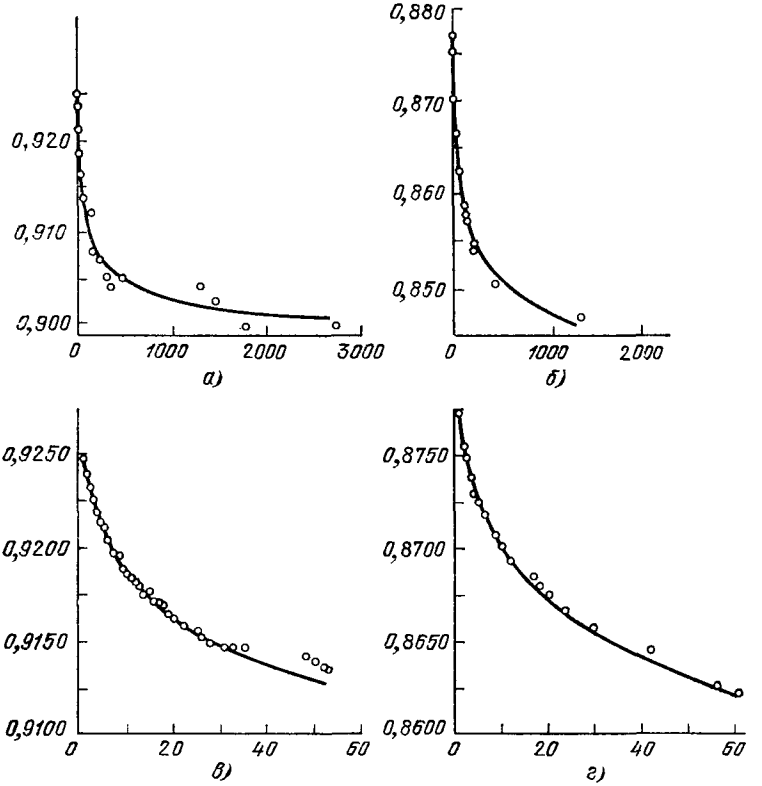


Рис. 2.32. Опыты Кольрауша (1863) со стеклянными нитями. Сравнение опытных данных по релаксации напряжений (показаны кружками) с результатами вычислений по эмпирической формуле $x=x_0+ce^{-at^m}$ (сплошная линия). *а*) Опыт первый; *б*) опыт второй; *в*) детализация графика начального периода испытаний — опыт первый; *г*) то же — опыт второй; по оси абсцисс отложено время (в минутах), прошедшее после закручивания образца; по оси ординат отложено текущее значение крутящего момента; угол закручивания равен 1080°.

малые изменения склонения земного магнетизма и по периоду колебаний подвешенного магнита он определял малые изменения напряженности.

В первой серии опытов при начальном закручивании на три оборота Кольрауш фиксировал угол поворота, вращая систему так, чтобы угол магнита по отношению к магнитному полю Земли по величине соответствовал требовавшемуся крутящему моменту. Результаты приводились в виде отношения требуемого текущего значения крутящего момента к максимальному при 90°. В двух таких опытах, результаты которых приведены на рис. 2.32, *а* и *б*, Кольрауш впервые наблюдал релаксацию напряжений.

Попытки Кольрауша показать воспроизводимость полученных результатов путем проведения экспериментов с предполагавшимися идентичными стеклянными нитями обнаружили, что форма кривой, представляющей крутящий момент как функцию времени, была одной и той же, но уровень начального значения был другим, когда он начал измерения приблизительно спустя минуту после момента закручивания на три оборота. Три четверти минуты требовались для затухания колебаний магнитной стрелки.

Чтобы гарантировать воспроизводимость и изучить поведение при различных фиксированных углах, Кольрауш провел следующую серию опытов, вызывающих восхищение. Образец был закручен на заданный угол в течение заданного промежутка времени, продолжительность которого варьировалась как один из параметров эксперимента. Потом образец возвращался в первоначальное положение покоя и через короткие промежутки времени в течение нескольких часов измерялось время, требующееся для удержания образца крутящим моментом в этом положении.

В двух первых опытах Кольрауш сравнил изменения крутящего момента для образца, закрученного на 3 оборота, или 1080°, и удерживавшегося 2790 мин перед возвращением его в первоначальное состояние покоя, с аналогичным изменением крутящего момента для образца, закрученного на 2 оборота, или 720°, в течение приблизительно такого же отрезка времени, 2866 мин., перед возвращением в начальное состояние. Эти результаты, представленные в виде долей максимального крутящего момента были табулированы (табл. 16). В таблицу также было включено отношение двух относительных значений крутящих моментов в одни и те же моменты

Таблица 16

Кольрауш (1863)

	Угол закручивания				Угол закручивания		
	1080°	720°			1080°	720°	
t	x	x_1	x/x_1	t	x	x_1	x/x_1
4,33	0,0259	0,0184	1,41	30	0,0199	0,0141	1,41
5,77	0,0249	0,0177	1,41	54	0,0178	0,0127	1,40
6,97	0,0247	0,0175	1,41	70	0,0168	0,0121	1,39
7,97	0,0246	0,0173	1,42	140	0,0147	0,0095	1,55
14	0,0221	0,0154	1,44	177	0,0141	0,0094	1,50
20	0,0210	0,0149	1,41	1570	0,0067	0,0045	1,49

времени для двух опытов с отношением начальных углов закручивания 3/2. Среднее значение вышеупомянутого отношения равно [2] 1,437; наблюдается увеличение этого отношения от начального значения 1,41 до ожидаемого 1,5 при больших значениях времени. Кольрауш отметил, что если внести поправку на небольшое различие

в продолжительности проведения эксперимента в отношении 2790/2866, то ожидаемое значение будет равно 1,46, а не 1,5. Таким образом, как можно видеть, в этом эксперименте вполне были получены предсказуемые величины.

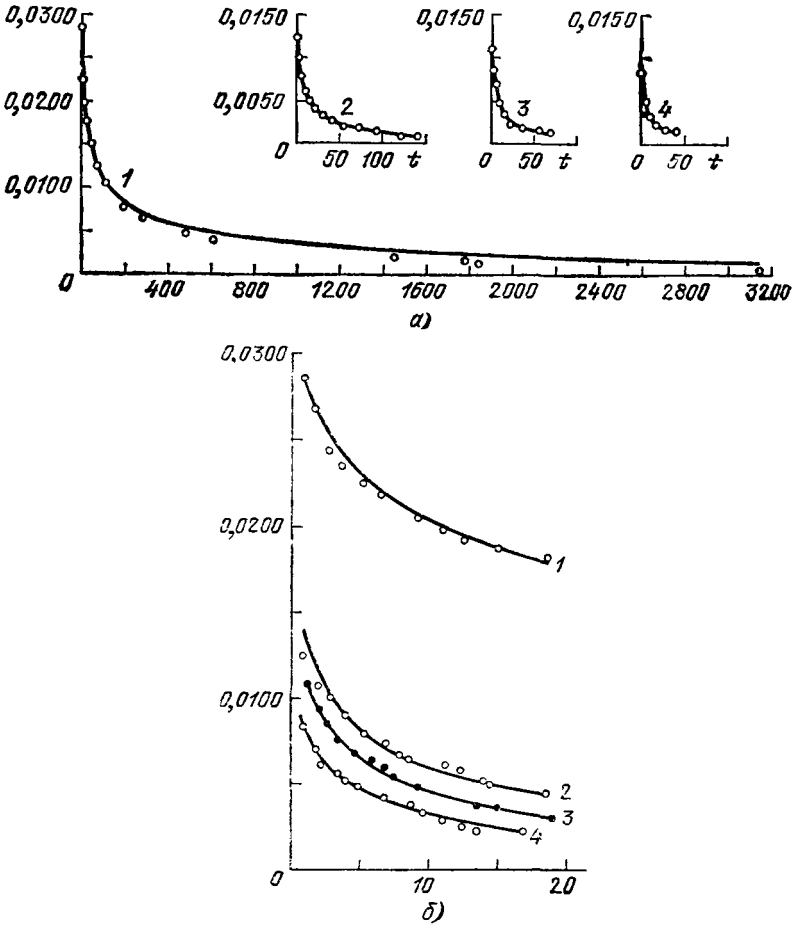


Рис. 2.33. Опыты Кольрауша (1863) со стеклянными нитями. Сравнение опытных данных (показаны кружками) по релаксации напряжений с результатами вычислений по эмпирической формуле (сплошная линия). *а*) Графики, соответствующие углу закручивания образца на 1080°; *б*) детализация графика начального периода испытаний; по оси абсцисс отложено время, прошедшее после закручивания образца (в минутах); по оси ординат отложено текущее значение крутящего момента. *1* — опыт V (1380), *2* — опыт VI (40), *3* — опыт VII (20), *4* — опыт VIII (10); эксперименты проводились с образцами, *выдерживавшимися в деформированном состоянии* разные промежутки времени (продолжительность в минутах приводится в скобках за номером опыта).

Чтобы изучить эффект продолжительности поддержания первоначального фиксированного значения угла закручивания, Кольрауш получил результаты для начального угла закручивания 1080°, выдерживаемого в течение 10, 20, 40 и 1380 мин перед возвраще-

нием в каждом случае к состоянию покоя. Результаты этих четырех опытов приведены на рис. 2.33, *а* и *б*.

Отсюда видно, что величина крутящего момента для данного времени, после возвращения к фиксированному положению с нулевым углом закручивания, заметно увеличивается с ростом продолжительности пребывания в начальном закрученном состоянии, одинаковом во всех сравниваемых случаях. Кольрауш не комментировал тот факт, что результаты, приведенные в табл. 16, соответствовали аналогичному опыту, в котором угол закручивания 1080° удерживался в течение более длительного промежутка времени, нежели 2790 мин. Результат был таким, что малое значение крутящего момента достигалось менее чем за половину общей продолжительности опыта, наводя на мысль о существовании максимума, имеющего место в момент времени, находящийся где-то между 2790 и 1380 мин.

Подход Кольрауша к постановке экспериментов показывает до некоторой степени мощь эмпирических методов в руках того, кто, не склоняясь в сторону предсказываемых или предполагаемых результатов, ожидает результата для анализа его. Он искал функцию, которая аппроксимировала бы результаты по крайней мере для одного временного интервала. Изменяя численные значения для каждого эмпирического приближения и затем изучая величины для двух различных функций, он пришел к заключению, что для достижения общности определяющее уравнение должно иметь вид, который ныне используется в нелинейной теории вязкоупругого тела при инфинитезимальных деформациях.

В своих первоначальных экспериментах в 1835 г. Вильгельм Вебер (Weber [1835, 1]) изучал упругое последействие, возникающее вслед за нагружением растянутого образца постоянным грузом. Как я указывал выше, Вебер с помощью Гаусса получил уравнение (2.11), а результаты его дальнейших исследований в 1841 г. (Weber [1841, 1]) привели к необходимости изменения уравнения и приведения его к виду (2.14). Используя видоизмененное эмпирическое уравнение, предложенное его отцом, который применял его при изучении сходных электрических явлений, Кольрауш ввел эмпирическое уравнение

$$t^{m-1}\frac{dM}{dT} = maM, \tag{2.18}$$

из которого следовало следующее выражение для крутящего момента:

$$M = ce^{-at^m}. \tag{2.19}$$

Кольрауш показал, что ни одно из двух уравнений Вебера не подходит для описания результатов опыта, приведенных на рис. 2.33. С другой стороны, из сравнения результатов эксперимента и вычислений, соответствующих данным рис. 2.33, следует, что второе

предложение Кольрауша обеспечивает прекрасную согласованность с данными опыта для относительно больших значений времени. Значения постоянных для каждого из этих четырех экспериментов даны в табл. 17. К ним я добавил значения, вычисленные для эксперимента, результаты которого представлены на рис. 2.33 при угле закручивания 1080°, удерживаемого в течение 2790 мин.

Таблица 17

Кольрауш (1863)

Продолжительность выдержки образца в закрученном на угол 1080° положении (мин)	c	a
10	0,03240	1,3086
20	0,04178	1,2497
40	0,04225	1,0886
1380	0,04551	0,45204
2790	0,0385	0,290

Разница в постоянных, полученных для различных случаев использования уравнения (2.19), натолкнула Кольрауша на мысль произвести проверку применимости его формулы в условиях новой серии экспериментов, в которых крутящий момент был постоянным, а менялся угол закручивания. Чтобы создать условия, аналогичные условиям предыдущих опытов, он фиксировал угол закручивания в течение двух различных коротких промежутков времени и затем освобождал образец, вследствие чего крутящий момент в процессе наблюдения за углом закручивания был равен нулю. Он предусмотрел масляную ванну, чтобы немедленно гасить колебания, возникающие после высвобождения образца. Стеклянные нити, которые он использовал прежде, были недостаточно прочны для того, чтобы гасить затухающие колебания и при этом не влиять на результаты. Поэтому Кольрауш использовал образцы из твердой холоднотянутой латунной проволоки длиной 131 мм и диаметром 0,011 мм [1]).

Кольрауш пришел к выводу, что функции, одна из которых описывает зависимость от времени крутящего момента при фикси-

[1]) Что касается такого явления, как упругое последействие, то, конечно, можно выдвинуть обоснованное возражение против сравнения стекла с латунью, так как такое сравнение предполагает отсутствие зависимости характера протекания явления от кристаллической структуры, однако это не хуже многих сегодняшних экспериментов, в которых теоретические модели атома для всех кристаллических структур «подтверждаются» на основе опытов с каким-либо специально приготовленным сплавом неизвестного состава или с соединением исключительной чистоты, или на основе опытов с единственным веществом таким, как фтористый литий, особенно подходящим для опытов со специальными целями.

Таблица 18

Кольрауш (1863)

Продолжительность кручения 1 мин				Продолжительность кручения 2 мин			
t	наблюденное в опыте	вычисленное по формуле:		t	наблюденное в опыте	вычисленное по формуле:	
		$x=bt-m$	$x=ce^{-at^m}$			$x=bt-m$	$x=ce^{-at^m}$
0,77	28,0	28,00	27,92	0,73	45,3	45,26	45,16
0,95	27,0	27,05	27,00	0,97	43,3	43,20	43,17
1,21	26,0	25,99	25,98	1,11	42,3	42,25	42,24
1,53	25,0	25,01	25,01	1,28	41,3	41,27	41,29
1,73	24,5	24,51	24,52	1,49	40,3	40,25	40,30
1,97	24,0	24,00	24,02	1,73	39,3	39,28	39,33
2,23	23,5	23,53	23,54	2,02	38,3	38,29	38,37
2,55	23,0	23,00	23,04	2,35	37,3	37,35	37,43
2,91	22,5	22,51	22,54	2,76	35,3	36,38	36,46
3,35	22,0	21,99	22,03	3,27	35,3	35,38	35,48
3,91	21,5	21,44	21,48	3,92	34,3	34,34	34,44
4,57	21,0	20,90	20,95	4,68	33,3	33,36	33,46
5,26	20,5	20,42	20,46	5,67	32,3	32,32	32,42
6,10	20,0	19,93	19,98	6,92	31,3	31,28	31,37
7,07	19,5	19,46	19,49	8,45	30,3	30,27	30,35
8,25	19,0	18,97	19,00	10,37	29,3	29,27	29,33
9,62	18,5	18,50	18,53	11,50	28,8	28,78	28,84
11,38	18,0	17,99	18,02	12,75	28,3	28,29	28,35
13,58	17,5	17,48	17,49	14,07	27,8	27,84	27,89
16,47	17,0	16,94	16,94	15,70	27,3	27,34	27,38
19,92	16,5	16,41	16,40	17,75	26,8	26,80	26,81
24,23	16,0	15,89	15,87	20,13	26,3	26,25	26,26
28,83	15,5	15,45	15,41	23,12	25,8	25,66	25,65
35,13	15,0	14,95	14,90	26,25	25,3	25,13	25,11
40,92	14,5	14,59	14,52	29,62	24,8	24,64	24,61
46,30	14,0	14,29	14,22	33,47	24,3	24,14	24,10
53,28	13,5	13,97	13,88	37,62	23,8	23,69	23,63
68,17	13,0	13,41	13,31	42,50	23,3	23,22	23,14
80,0	12,5	13,07	12,95	46,45	22,8	22,88	22,80
89,5	12,0	12,83	12,70	50,17	22,3	22,59	22,50
99,8	11,5	12,60	12,46	54,00	21,8	22,32	22,22
118,7	11,0	12,25	12,10	60,58	21,3	21,90	21,78
143	9,8	11,88	11,74	67,67	20,3	21,51	21,37
190	8.7	11,34	11,15	82,00	19,3	20,84	20,68
300	7,4	10,52	10,29	104,25	18,3	20,03	19,84
500	6,2	9,67	9,40	125,6	17,3	19,43	19,21
620	5,4	9,34	9,05	137	16,8	19,16	18,93
1440	2,1	8,13	7,78	183	14,3	18,23	17,96
				217	13,3	17,76	17,46
		$b=26,80$	$c=322\,540$	307	10,7	16,78	16,43
		$m=0,16426$	$m=0,0170$	425	8,3	15,91	15,52
			$d=9,3964$	492	5,3	15,53	15,12
				569	4,9	15,16	14,73
				1440	2,7	13,02	12,47
						$b=42,98$	$c=517\,310$

рованном угле поворота, а другая — зависимость от времени угла поворота при фиксированном крутящем моменте, полностью совпадают, если упомянутые выше фиксируемые величины имеют обе нулевое значение. Сравнение результатов, получаемых на основе формул Вебера и Кольрауша, с экспериментальными данными последнего дано в табл. 18. Продолжительность закручивания была равна одной минуте в первом опыте и двум минутам — во втором.

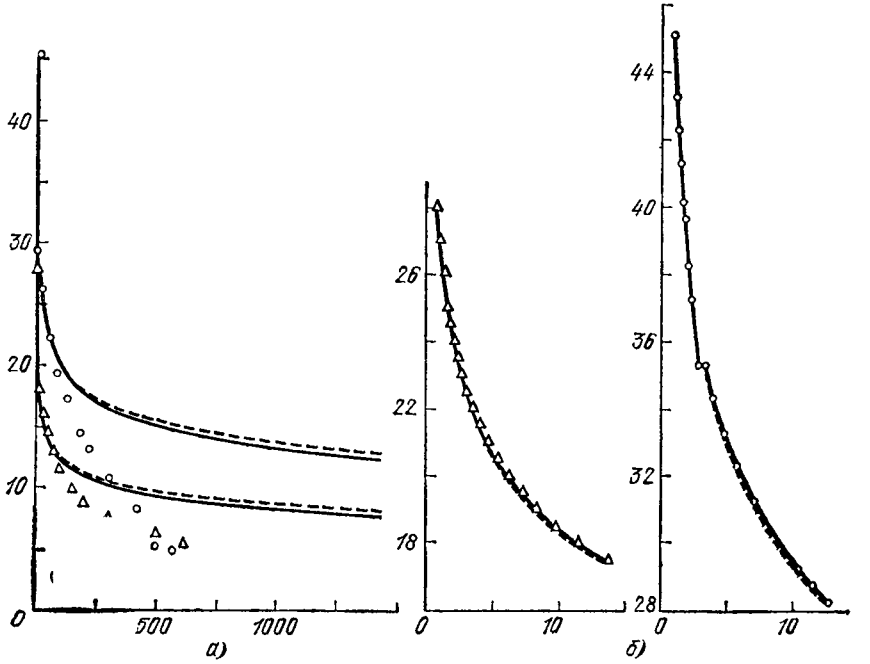


Рис. 2.34. Опыты Кольрауша (1863) с латунной проволокой. Сравнение опытных данных по релаксации напряжений с результатами вычислений по эмпирическим формулам. Кружками показаны результаты испытаний образца, подвергнутого закручиванию, осуществлявшемуся в течение двух минут (опыт X), треугольниками — в течение одной минуты (опыт IX). Сплошная линия отвечает функции $x=ce^{-at^m}$, штриховая — функции $x=bt^{-m}$. *а)* Полные кривые релаксации; *б)* детализация графика в начальный период испытаний; по оси абсцисс отложено время, прошедшее после закручивания (в минутах); по оси ординат отложен крутящий момент.

В таблице даны также значения констант, входящих в каждую из двух сравниваемых формул в условиях каждого из двух экспериментов.

Для обеспечения лучшего сравнения с ранее показанными графиками экспериментальных результатов для стеклянных нитей эти данные для нитей из латуни (табл. 18) также представлены в виде графиков, изображенных на рис. 2.34, *а* и *б*.

При анализе этих результатов, включая изменение постоянных a, c и m в различных опытах, можно заметить, что $m=1/4$ во всех опытах со стеклянной нитью при фиксированном угле закручивания,

но в опытах с латунью при фиксированном моменте m значительно меньше, а именно $m=0{,}0170$.

Для того чтобы обобщить результаты своих опытов, Кольрауш пришел к заключению, что необходимо ввести дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ax - \gamma(x). \tag{2.20}$$

В уравнении (2.20) x—перемещение в момент времени t; ax—крутящий момент при установившемся равновесном состоянии и $\gamma(x)$ — момент, обусловленный упругим последействием, который действует до того, как может быть достигнуто условие равновесия. Таким образом, Кольрауш получил для угловой скорости зависимость

$$v^2 = v_0^2 - ax^2 - 2\int \gamma\, dx. \tag{2.21}$$

Время как функция перемещения дается в виде

$$t = \int \frac{dx}{\left[ax^2 + 2\int \gamma(x)\, dx\right]^{1/2}} + \text{const}. \tag{2.22}$$

Далее Кольрауш разбил γ, являющуюся неизвестной функцией x, на две части: обозначенную как γ_1, когда движение происходит от положения покоя, и γ_2, когда движение происходит в сторону него; причем из экспериментальных данных $\gamma_1(x) > \gamma_2(x)$. Таким образом, он выбрал функцию γ в уравнении (2.22) как разность двух: $\gamma=\gamma_1-\gamma_2$. Не имея возможностей, появившихся в XX веке, для решения таких проблем Кольрауш не считал свои опыты в полной мере окончательными для отыскания неизвестной функции γ.

При первом изучении релаксации напряжений в области малых деформаций, кроме мысли о необходимости введения в рассмотрение нелинейности, у Кольрауша возникли под влиянием его наблюдений идеи, относящиеся к другим проблемам. Он сформулировал утверждение, которое, как он считал, было новым проникновением в природу явлений, состоявшее в том, что обусловленное последействием демпфирование колебаний и родственные процессы должны вызывать связанное с ними выделение тепла. Очевидно, он не был знаком с данными экспериментов в этой области [1]).

При второй проверке возможных влияний упругого последействия и релаксации напряжений на деформации Кольрауш предположил, что модуль упругости должен изменяться, когда в образце в течение некоторого периода времени возбуждаются интенсивные

---

[1]) Это любопытно, принимая во внимание работы Кельвина по металлам, выполненные в предшествующие 5 или 6 лет, и несколько ссылок в литературе на тепловые эффекты в резине при ее деформировании.

крутильные колебания. Затем он определил величину модуля в эксперименте с крутильным маятником. Как заметил Кулон (Coulomb [1784, 1]) в 1784 г. и Вертгейм (Wertheim [1842, 1], [1844,1(a)]) в 1842 г., при появлении остаточных деформаций значение модуля уменьшается, Кольрауш первым сообщил об аналогичном уменьшении, следующем за предварительным динамическим нагружением [1]). По-видимому, он не вводил в рассмотрение остаточные деформации. Его опыты с закаленной железной проволокой показали, что период колебаний после возбуждения интенсивных колебаний, происходивших в течение некоторого времени, постепенно увеличился с 6,256 до 6,411 с, т. е. релаксация оказывает влияние на значение модуля при сдвиге.

Кроме того, Кольрауш поставил серьезный вопрос, касаясь попыток определения удельной теплоемкости путем сравнения квазистатических и динамических методов определения значения модуля при растяжении и сжатии, примененных Вертгеймом (Wertheim [1842, 1], [1844, 1(a)]). Действуя в рамках довольно ограниченных термодинамических концепций того времени, он указал, что тепло не может выделяться в экспериментах по кручению, поскольку объем не меняется. В опытах по растяжению или сжатию, в которых имело место небольшое изменение объема, он заметил, что изменения модуля также могут возникать из-за выделения тепла, вызванного упругим последействием (Kohlraush [1863, 1]).

Ни один из этих экспериментов Кольрауша, которые привели к открытию и первому точному изучению такого важного явления, как релаксация напряжений, не упоминается в каких-либо просмотренных мною современных статьях по неупругости.

2.18. Об изменении объема при пластических деформациях: опыты Баушингера (1879)

Зависимость экспериментально определенных значений модуля упругости при сдвиге или модуля E от суммарной предшествовавшей деформации так же, как и от той термической обработки, которой подвергался образец [2]), была еще одним явлением, относящимся к нелинейности, интенсивно изучавшейся в 1844 г. Вертгеймом (Wertheim [1844, 1(a),3]) в опытах по растяжению образцов из многочисленных различных металлов. В 1784 г. Кулон (Coulomb [1784, 1]) обнаружил, что значение модуля при сдвиге [3]) уменьшается с увеличением остаточной деформации при кручении железных и латун-

[1]) Мне кажется, весьма непохоже, что сильный интерес Кельвина к этой проблеме, высказанный им в статье 1865 года по вязкости металлов, не был связан с отмеченными наблюдениями Кольрауша. Кольрауш провел их в то время, когда он работал в лаборатории Вебера.

[2]) Вертгейм описал тепловые аспекты проблемы в поздних исследованиях.

[3]) Модуль при сдвиге μ — это постоянная материала, определяемая наклоном касательной к графику линейной функции отклика.

ных проволок, и после Вертгейма Кельвин (Kelvin [1865, 1]), наконец, исчерпывающе исследовал явление. Действительно, Кельвин считал уменьшение модуля с увеличением пластических деформаций настолько важным, что в 1865 г. он упоминал свои исследования этого явления, как представляющие для него наибольший интерес в экспериментальной механике сплошной среды.

Я недавно показал, что эта зависимость упругости от механической и тепловой «предысторий» имеет главное влияние на уровень обнаруживаемой линейности в экспериментах с «мертвым» грузом при инфинитезимальных деформациях (Bell [1968, 1]). Мои экспериментальные данные и сравнение их с результатами, обсуждавшимися выше, будут подробно рассмотрены в следующей главе, посвященной приближенной линейности зависимостей между напряжениями и деформациями (см. раздел 3.44).

Данные Кельвина были получены из чрезвычайно тщательно поставленных экспериментов с крутильными длинными проволочными маятниками, амплитуда колебаний которых находилась в области малых деформаций. Влияние пластической деформации на модули, будь то в форме микродеформаций или больших деформаций, является одним из главных источников нелинейной упругости при малых деформациях; разумеется, в металлах, поведение которых до сих пор было описано с этой точки зрения.

24 сентября 1877 г. ознаменовало наступление новой эры в экспериментальной механике сплошных сред, ибо в этот день Иоганн Баушингер проделал первый точный опыт по сжатию чугунного бруска прямоугольного поперечного сечения, причем брусок был сравнительно коротким, так что могли быть измерены деформации при больших напряжениях до того, как наступила потеря устойчивости. Еще более важным в этом первом опыте, а также и в последующих за ним был тот факт, что впервые была достигнута точность, достаточная для одновременного измерения как поперечной, так и продольной деформаций. Таким образом, коэффициент Пуассона и изменение объема могли быть точно определены в области малых деформаций, лежащих ниже деформаций, соответствующих пределу упругости, а также в области больших деформаций и больших пластических деформаций.

Серии опытов с чугуном, сварочным железом, бессемеровской сталью и песчаником, которые Баушингер поставил между 24 сентября 1877 г. и 5 февраля 1878 г., были описаны в большом мемуаре (Bauschinger [1879, 1]), вышедшем в январе 1879 г. Эти исследования, а также пространные описания экспериментальных данных в последующие годы стали возможными благодаря разработанному Баушингером замечательному двухзеркальному [1]) экстензометру.

[1]) Мало кто из экспериментаторов за всю трехсотлетнюю историю механики твердого тела нашел возможным опубликовать такое количество описаний деталей, относящихся к экспериментам, сколько сумел напечатать дотошный Баушингер. Создается впечатление, что вы можете проследить каждодневные под-

Он посвятил много страниц детальному описанию конструкции и работы своего зеркального экстензометра, который позволял определять удлинения до 0,0002 мм.

Вне зависимости от того, были ли деформации поперечными или продольными, он неизменно использовал два рычажных зеркальных экстензометра и две оптические трубы. Он производил измерения на обеих противоположных сторонах образца, так что мог определить незначительные отклонения от строго осевой деформации. Поэтому в большей части своих опытов Баушингер считал необходимым устанавливать четыре зеркальных системы. Во время опыта как на сжатие, так и на растяжение он должен был снимать показания посредством четырех оптических труб, поскольку был заинтересован в определении как поперечных, так и продольных деформаций. Детальное описание этого устройства, которое изображено на рис. 2.35, читатель найдет в первоисточниках.

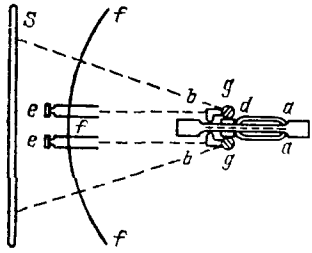


Рис. 2.35. Первый оптический экстензометр с поворачивающимися зеркалами для точных измерений (Баушингер, 1877).

Во многих описанных выше экспериментальных исследованиях зависимостей между напряжением и деформацией, таких, как опыты Ходкинсона [1]) или Франца Антона Герстнера (Gerstner [1832, 1]), остаточные деформации были малой частью полной деформации в интересующей экспериментатора области, а полная деформация находилась в диапазоне сравнительно малых значений. Исследования Баушингера в 1879 г. впервые привели к противоположной ситуации: он интересовался малыми изменениями объема при развитии больших остаточных деформаций. Во многих сегодняшних исследованиях пластичности предполагается, может быть, неверно, что при снятии груза не обнаруживается остаточного изменения объема.

Баушингер начал свою статью (Bauschinger [1879, 1]) коротким обзором более ранних работ Шарля барона Каньяра де Латура (Cagniard de Latour [1828, 1]; см. также работы Пуассона (Poisson [1827, 1])) и Вертгейма (Wertheim [1848, 1]), которые оба измеряли относительное увеличение объема, испытываемое призматическим образцом; первый, наблюдая уменьшение объема воды в трубке, когда латунная проволока в трубке подвергалась растяжению; а второй, наблюдая с помощью капиллярной трубки изменение внут-

---

робности экспериментальной работы, развитие мыслей, лекционные дни и выходные, поскольку его лабораторные заметки, опубликованные в хронологической серии томов, относящихся ко многим годам (см., например, Bauschinger [1886, 1]), отражали и успехи и разочарования, которые предшествуют каждой научной публикации.

[1]) (Hodgkinson см. [1824—1844]), см. выше раздел 2.6.

реннего объема полого образца, испытывающего осевую деформацию [1]). Баушингер заметил, что, кроме этих экспериментов по определению изменения объема, обычным способом отыскания коэффициента Пуассона для изотропных тел был такой, в котором использовались экспериментально найденные значения модулей E и μ при малых деформациях, т. е. использовалась формула

$$\nu = \frac{E}{2\mu} - 1, \tag{2.23}$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Баушингеру впервые удалось продемонстрировать то, что ранее предполагалось, а теперь стало хорошо известным из экспериментов фактом, а именно: что при вычислении отношения больших чисел, имеющего место при определении таким образом коэффициента Пуассона, получаются ненадежные [2]) результаты [1]. Вероятно, эта нестабильность результатов из-за указанной потери точности и была главной причиной полемики об упругих постоянных, ведшейся в XIX столетии; для подтверждения правомочности теории Пуассона и Коши требовалось, чтобы коэффициент поперечной деформации имел постоянное значение $\nu = 1/4$.

Баушингер определил модуль упругости E из опытов, проведенных с образцами, изготовленными из каждого из девяти сортов бессемеровской стали с различным содержанием углерода от 0,19 до 0,96%. Испытывались по два образца на растяжение и на сжатие. Для этих же материалов он определил модуль упругости при сдвиге μ. Затем он показал, что равенство (2.23) давало значение коэффициента Пуассона для стали, которое меняется от 0,25 до 0,36 со средним значением 0,305.

Во второй серии опытов (Bauschinger [1879, 1]), описанной как «Сименс-мартеновская сталь Нейберга — Мариацелла» («Siemens-Martinstahl von Neuberg — Mariazell») с пятью образцами, изготовленными предположительно из одного и того же материала — стали, было проведено определение модуля E в двух опытах на растяжение, определение модуля E в двух опытах на изгиб и определение модуля μ в двух опытах на кручение. В каждом из опытов использовалось по пять образцов. Использовав 30 экспериментальных результатов, Баушингер нашел, что значение коэффициента Пуассона, определенное по формуле (2.23), менялось от 0,24 до 0,30. Для всех этих опытов и для дополнительных серий опытов с 30 от-

---

[1]) Эти эксперименты будут описаны подробнее в разделе 3.16 , так как они были главной экспериментальной основой дискуссии об одноконстантности или многоконстантности зависимостей между напряжениями и деформациями, которая продолжалась всю вторую половину XIX столетия. Как мы увидим, Вертгейм сурово критиковал недостатки экспериментов Каньяра де Латура.

[2]) Для многих авторов современных учебников и немалого числа нынешних экспериментаторов высказываний Баушингера по этому вопросу как будто и не было.

дельными стальными образцами, описанными как «бессемеровская сталь Тешена в австрийской Шлезии» («Bessemerstahl von Teschen in Oesterr.-Schlesien»), среднее значение было 0,290, т. е. число, которое согласуется с ныне общепринятой величиной коэффициента Пуассона для этого материала. Разброс значений коэффициента от 0,24 до 0,36, получаемых в отдельных опытах, и тот факт, что очень мало опытов дало в точности одно и то же значение, являлось

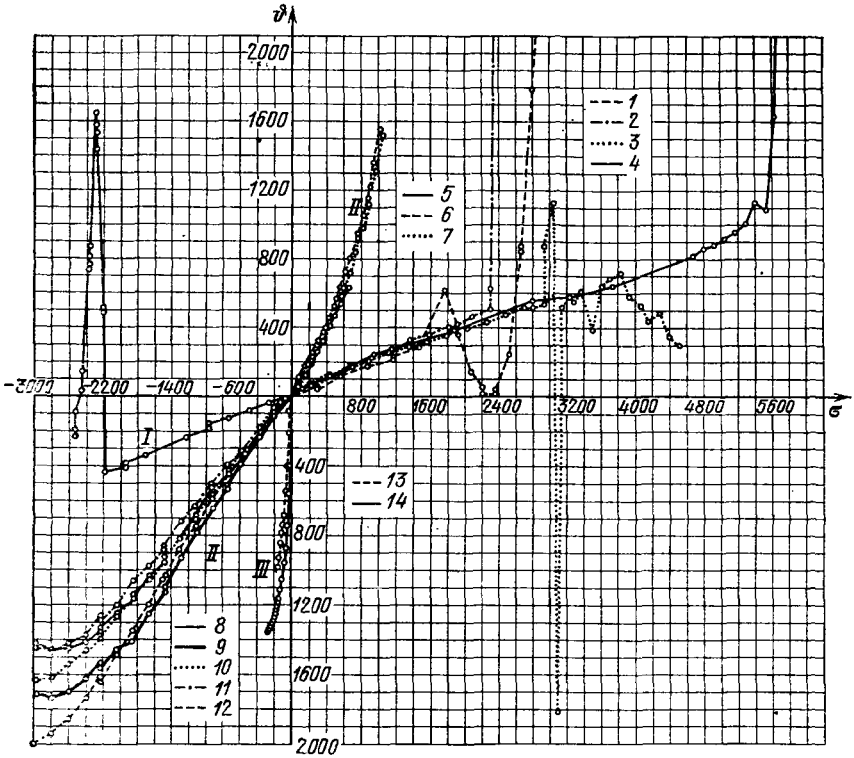


Рис. 2.33. Изменение объема, вызванное растяжением или сжатием образцов из чугуна, сварочного (кузнечного) железа, бессемеровской стали и песчаника. Это — результаты первых непосредственных измерений изменения объема при осевой деформации металлов; σ — напряжение в кгс/см² (положительные значения у растягивающих напряжений); ϑ — изменение объема в миллионных долях от первоначального объема образца. *1* — катаный железный стержень (опыт X), *2* — полоса из котельного листового железа (опыт XII), *3* — полоса из бессемеровской стали (при первом испытании) (опыт XI), *4* — полоса из бессемеровской стали (при втором испытании) (опыт XIa), *5*, *6*, *7* — полосы из чугуна (образцы *f*, *g* и *h*) (опыты VI, VII, VIII), *8*, *10*, *11* — чугунные призмы квадратного сечения (образцы *a*, *c* и *d*) (опыты III, I, II), *9* — чугунный цилиндр (образец *b*) (опыт IV), *12* — чугунная призма прямоугольного сечения (образец *e*) (опыт V), *13* — призма из песчаника (из Хохштадта) (опыт XIII), *14* — призма из песчаника (из Франкенштейна) (опыт XV); I — призма из сварочного (кузнечного) железа (опыт IX), II — чугун, III — песчаник.

причиной настойчивости тех, кто на основании одного или двух опытов примыкал к той или другой стороне в дискуссии о числе упругих постоянных (одноконстантная или многоконстантная концепции).

С помощью своего зеркального экстензометра Баушингер смог непосредственно определять коэффициент Пуассона как при нагружении, так и при разгрузке как для малых, так и для больших деформаций. Его исследования изменений этой величины будут описаны в разделе 2.19. Наибольший интерес здесь представляет поведение малого относительного изменения объема, определенного экспериментально в условиях больших остаточных деформаций.

Что касается нелинейности, то Баушингер заметил две главные особенности. Они проиллюстрированы на рис. 2.36 графическим изображением результатов его опытов с чугуном, сварочным железом, бессемеровской сталью и песчаником. Опыты по сжатию и растяжению выполнялись отдельно, хотя на его рисунке результаты их показаны при помощи графика, плавно проходящего через точку с нулевым напряжением. Можно заметить, что в каждом случае как для растяжения, так и для сжатия Баушингер нашел, что в процессе пластического деформирования твердого тела зависимость между относительным изменением объема и осевым напряжением получалась нелинейной. (Поскольку в опытах создавалась одноосная деформация, гидростатическое давление могло быть принято равным 1/3 осевого напряжения.)

Еще одно явление, наблюдавшееся Баушингером при исследовании нелинейности, было недавно заново открыто Уильямом Френсисом Хартманом (Hartman [1967, 1], [1969, 1]) в экспериментах по динамической пластичности, а именно: наличие неожиданно большого относительного изменения объема в процессе пластического деформирования однородных тел, сопровождавшегося малым остаточным относительным изменением объема, обнаруженным после того, как нагрузка была снята. В течение последних 90 лет это открытие Баушингера игнорировалось и теоретиками, и экспериментаторами в их попытках развития теории как квазистатической, так и динамической пластичности. Как видно из рис. 2.36, Баушингер нашел, что при определенных уровнях деформации могут иметь место внезапные приращения в значении относительного изменения объема и они могут быть сравнительно велики при сопоставлении с полным значением относительного изменения объема. Конечно, значения осевых пластических деформаций были на порядок выше измеренного значения относительного изменения объема. Сравнение этих полных осевых деформаций с интересующим нас объемным расширением будет сделано ниже, в IV гл., посвященной конечным деформациям. Наличие расширения при пластическом деформировании считается важным для современной теории пластичности. (См. раздел 4.35.)

Баушингер первым обнаружил скачок в увеличении объема при проведении своих предварительных экспериментов с хантсмановской сталью (Hantsman Stahl). Проводя опыт за опытом, он очень заинтересовался безусловным установлением того факта, что это действительно закон природы, а не просто экспериментальная анома-

лия. Он преуспел в этом, сравнивая поведение стали во многих опытах и наблюдая изменение температуры, сопровождавшее деформацию. Поместив образец из бессемеровской стали (опыты XI и XIa) в сосуд со ртутью и использовав термометр, позволявший легко измерять разность температур до одной десятой градуса, он качественно проследил тепловую «историю» в процессе опыта по растяжению образца. Как и можно ожидать в опыте по растяжению, вплоть до предела упругости температура постепенно уменьшалась. В начальных фазах пластического деформирования вплоть до значения продольной деформации, приблизительно равного 0,5%, температура не менялась. Затем, когда пластические деформации достигли 3% (дополнительные доли нагрузки прикладывались с трехминутными интервалами), температура постепенно увеличивалась. Между уровнями пластической деформации, заключенными между 3 и 4%, произошло сильное увеличение относительного изменения объема; это сопровождалось быстрым падением температуры.

В 1829 г. Кориолис (Coriolis [1830,1]) показал, что свинцовые образцы, подвергавшиеся сравнительно быстрому пластическому деформированию, становились очень горячими. Опыты Баушингера впервые продемонстрировали, хотя только качественно, связь между увеличением температуры, вызванным пластичностью, и уменьшением температуры, вызванным увеличением объема металлов при растяжении. Это было действительно вехой в предмете, который привлекал к себе удивительно мало внимания в последующие десятилетия.

Второй аспект опытов Баушингера — остаточные деформации при изменении объема — также показан на рис. 2.36.

Фамилия Баушингер, конечно, хорошо знакома каждому студенту или профессионалу как в области механики сплошной среды, так и металлургии. Считается, что он заметил изменение предела упругости металлов, подвергающихся заданному циклическому нагружению. Это изменение известно как «эффект Баушингера». Это открытие Баушингера стало возможным благодаря его зеркальному экстензометру, который дал возможность осуществлять опыты по сжатию с последующим растяжением или наоборот, процедура, существенная для такого исследования (Bauschinger [1879, 1]).

Поскольку предел упругости и эффект Баушингера связаны с возникновением пластических деформаций, они также будут обсуждаться ниже, в разделе 4.7 главы, посвященной конечным деформациям. Тем не менее здесь также уместно упомянуть о характере экспериментов, потому что Баушингер, как почти каждый из предшествовавших ему экспериментаторов, имел обыкновение нагружать и разгружать образец непрерывно во время проведения опыта по растяжению. Так, на рис. 2.36 мы видим увеличение значения остаточного изменения объема, когда в эксперименте до самого его конца значение суммарной пластической деформации возрастает. Во избежание повреждения аппаратуры, Баушингер снимал зер-

кальный экстензометр с образца задолго до того, как разрушение становилось неизбежным. Поэтому мы можем быть уверенными, что описанное поведение изменения объема не связано с явлениями, непосредственно предшествовавшими разрушению, такими, как образование «шейки» и т. п.

Важность «эффекта Баушингера», несомненно, оправдывает 90 лет шумных одобрений за первое исчерпывающее его исследование [1]). Это заслуживает внимания особенно в прикладной технологии, где пределы упругости связаны с практическим критерием разрушения, а также в пластичности кристаллов, где это явление стимулировало или тормозило многочисленные фундаментальные исследования. Тем не менее в свете недавних экспериментов по динамической пластичности я придерживаюсь того мнения, что исследования Баушингером сжимаемости, несомненно, будут считаться его главным вкладом в науку. Замечательно, что эти открытия были преданы забвению большинством других механиков-экспериментаторов XIX столетия.

2.19. Исследования нелинейного кручения, включающие изучение влияния на намагничивание, проводившиеся с 1857 по 1881 г.

Одной из проблем теории упругости, которая пленила одного экспериментатора за другим от Дюло (Duleau [1813, 1]) в 1813 г. до Баушингера (Bauschinger [1881, 2]), было кручение стержней некруглого поперечного сечения. Кручение призматических стержней квадратного или прямоугольного сечения привлекало наибольшее внимание благодаря опытам Дюло и раннему интересу Коши к развитию теории для таких поперечных сечений. В 1853 г. Сен-Венан (Saint-Venant [1853, 1]) в авторском резюме представил Французской Академии свое классическое исследование кручения в рамках теории упругости при инфинитезимальных деформациях. Полный текст статьи (Saint-Venant [1856, 2]) не появлялся до 1856 г., когда комиссия Академии в составе Коши, Понселе, Пьобера и Ламе [2]) горячо рекомендовала ее опубликование

---

[1]) *Открытие* «эффекта Баушингера» на самом деле не принадлежит Баушингеру, но должно быть связано с именем Густава Генриха Видемана (Wiedemann [1859, 1]), обнаружившего его в 1859 г.; эффект временного запаздывания был открыт Робертом Генри Тарстоном (Thurston [1874, 1]) в 1874 г. Как будет описано ниже, в разделе 4.5, усилия Баушингера утвердить в какой-то форме свой незаслуженный приоритет были замечательно успешными.

[2]) Следует заметить, что Сен-Венану, родившемуся в 1797 г., был 71 год в 1868 г., когда он был, наконец, избран во Французскую Академию. Его антивоенная активность, выразившаяся в оппозиции Наполеону в 1814 г., в бытность его студентом, неблагоприятно повлияла на всю его карьеру. Можно предположить, что его избрание было связано не только с его огромной известностью, но и с сильными нападками на Французскую Академию со стороны ученых других стран в связи с затянувшимся непризнанием заслуг у себя на родине такого всемирно известного ученого-упругиста.

Год публикации знаменателен в свете того, что равная ему по значению статья Вертгейма (Wertheim [1857, 2]) была представлена в 1855 г. и опубликована в 1857 г. Вертгейм был сильно раздражен тем, что он рассматривал как неэтичное использование Сен-Венаном данных предварительных экспериментов, сообщенных ему в личной переписке. Сен-Венан опубликовал их с враждебными комментариями, что, очевидно, и привело в бешенство Вертгейма. Поэтому содержание выдающихся статей по этому вопросу, одна из которых была посвящена эксперименту, а другая — теории (опубликованных с разрывом всего в год), не было согласованным. Вертгейм ограничил свое сравнение с теорией исключительно попыткой ввести никак не поясненный эмпирический коэффициент, уточняющий теорию Коши, которую, как он считал, Сен-Венан только слегка видоизменил, но фактически Вертгейм был первым, кто обосновал необходимость нелинейной теории кручения.

Эксперименты Вертгейма по кручению в свете сегодняшнего дня можно считать превосходящими по важности эпохальную теорию Сен-Венана. Вертгейм обнаружил, что при малых квазистатических деформациях сплошных и полых латунных, железных и стальных цилиндров кругового и некругового поперечного сечения функция отклика при кручении была нелинейной. Поэтому он отказался от представления результатов опытов с использованием модуля сдвига. Он совсем не был удивлен, когда нашел, что изменение объема пропорционально квадрату закручивания и что изменение осевых размеров не пропорционально углу закручивания. Такие аномалии в контексте линейной функции отклика были объяснимы, поскольку он установил, что исследуемая проблема нелинейна.

То, что он наблюдал нелинейные функции отклика при кручении призм из материалов, которые в составе растягиваемых стержней, по его наблюдениям, вели себя линейно, Вертгейм приписал бóльшей точности, которая могла быть достигнута при измерении угла, чем при измерении удлинений. Это был факт, продемонстрированный Баушингером (Bauschinger [1881, 2]) 24 года спустя, когда он обнаружил нелинейную физическую зависимость для железа при аналогичном сравнении результатов опытов по кручению и растяжению призм [1]). Вертгейм заметил, что нелинейность, обнаруживаемая в квазистатических опытах, согласовывалась с наблюденной в динамических опытах, поскольку в опытах с колебаниями частота увеличивается, в то время как звук затухает [2]).

[1]) В 90-х гг. XIX века Фохт отказался прииять нелиией ность, которую он наблюдал в некоторых опытах по кручению в случае испытания по меньшей мере одного монокристаллического и одного поликристаллического образцов. Он приписал такое отклонение от линейности аппаратуре и недостаткам образцов.

[2]) Коиечно, с точки зрения сегодняшнего уровня знаний нелинейной механики, аргументы Вертгейма неубедительны. Важно то, что, прежде чем экспериментальное изучение нелинейных явлений стало банальным, он понял, что нелинейная физическая зависимость могла с точки зрения линейной теории привести к неожиданностям даже для квазилинейных проблем.

Вертгейм провел опыты с 65 образцами: шестью сплошными цилиндрами из стали, латуни, железа и стекла; десятью полыми цилиндрами, из них шестью латунными и четырьмя железными; четырьмя сплошными образцами эллиптического сечения, из них двумя стальными и двумя латунными; двенадцатью железными призмами, из них тремя квадратного поперечного сечения и десятью прямоугольного поперечного сечения с одной стороной, равной 24 мм и другой, меняющейся от 1 до 24 мм; пятью призмами из литой стали с прямоугольным основанием и отношением сторон, меняющимся от 1 до 36; 21 прямоугольными призмами из стали, железа, листового железа, латуни и разных видов стекла; тремя полыми прямоугольными призмами из латуни и четырьмя призмами из дуба и ели. Изменение объема полых трубок, измерение которого было единственным в своем роде предвестником инструментальных наблюдений в опытах XX столетия, Вертгейм определял с помощью капиллярных трубок [1]), присоединенных к заполненным водой образцам. Поскольку он решил не представлять свои результаты в виде значений модуля упругости E или касательного модуля, а из-за наличия нелинейности дать их в виде многочисленных таблиц, содержащих размеры призм и значения измеренных углов, трудно подвести итог характерным результатам этих экспериментов, изложенным на 172 страницах его мемуара (Wertheim [1857, 1, 2]).

Прежде чем приступить к измерениям в опытах на кручение, Вертгейм для каждого образца определял модуль упругости E при растяжении и устанавливал величину сопутствовавших ему изменений объема полых стержней. Он ожидал, что изменения объема будут иметь место, и нашел, что результаты его измерений для латунных образцов весьма приблизительно согласуются с ожидавшимися им значениями. То, что согласованность результатов его измерений для железных и стальных образцов была иной, он приписал условиям, в которых находились образцы до проведения опытов. Его опыты по кручению со стеклом сопровождались наблюдениями эффекта фотоупругости. Несмотря на осложнения при экспериментах, затруднившие получение количественных результатов, и вопреки тому, что нагружение, вызывающее кручение, сделало невозможным сравнение с теорией Неймана, описание Вертгеймом явления фотоупругости в процессе нагружения представляет интерес.

При испытании всех цилиндров Вертгейм заметил, что, в дополнение к наблюдаемой нелинейности зависимости между крутящим моментом и углом закручивания, обнаруживается зависимость от длины образца уровня отклонения от линейной аппроксимации. Только при сравнении очень длинных образцов достигалась незави-

[1]) Эти исследования побудили Вертгейма в 1854 г. заняться важным экспериментальным изучением проблемы капиллярности в целом (Wertheim [1854, 2], [1861, 1]).

симость от длины, предполагаемая элементарной теорией. Вертгейм включил в программу экспериментов исследование листового железа и деревянных образцов с целью изучения эффектов анизотропии при наличии трех плоскостей упругой симметрии. В этих пионерных экспериментах по кручению он обнаружил, что для обеспечения какой-либо корреляции между измерениями и своими оценками того, как анизотропия должна повлиять на результаты, должен был считать постоянные упругости зависящими от направления, но и при этом согласованность была еще далека от удовлетворительной.

Необходимость определения эмпирических коэффициентов, позволяющих уточнить теорию Коши (Cauchy [1830, 1]), для того чтобы добиться корреляции с его собственными результатами, вероятно, казалась Вертгейму делом первостепенной важности. В действительности же его наблюдения того, что изменения объема пропорциональны квадрату радиуса и квадрату угла закручивания, были более важными. Не было предложено никакой теории, объясняющей такое, по уровню значения, изменение объема, имеющее место в описанных выше условиях. Он наблюдал его для всех форм поперечных сечений и писал о своих безуспешных попытках дать соответствующую расчетную оценку. Он тщетно надеялся, что его наблюдения при экспериментах побудят других попытаться найти достаточно общее решение проблемы кручения, позволяющее описать наблюдавшиеся им явления.

Заключительный раздел замечательной работы Вертгейма посвящен связи между кручением и намагничиванием железа, вопросу, представлявшему в XIX веке большой интерес. В своем историческом введении, предпосланном, как и в других его работах, той части статьи, в которой излагались результаты его собственных исследований, Вертгейм ссылается на наблюдения Баден Пауэлла в 1829 г., относящиеся к потере намагниченности при ударе, на Гей-Люссака, сообщившего, что закручивание не влияет на остаточный магнетизм, а разгрузка влияет, и на Беккереля, который предположил, что нагружение внешним крутящим моментом в любом направлении индуцирует электрический ток одного и того же знака, в то время как разгрузка из закрученности в любом направлении вызывает ток противоположного знака. Затем Вертгейм излагает дискуссию, возбужденную Маттеуччи по поводу наблюдений Вертгейма в 1844 и 1852 гг. Маттеуччи утверждал, что кручение не влияет на направление индуцированного электрического тока. Вертгейм показал, что кручение намагниченной железной проволоки в любом направлении вызывает потерю намагниченности, которая восстанавливается при разгрузке. Если образец был закручен в одном направлении до появления остаточных деформаций, то последующее нагружение в этом же направлении вызывало намагничивание, а разгрузка — размагничивание. Насколько Вертгейм был озабочен этими трудными опытами, видно из того, что он изготовил аналогичную установку из дерева, чтобы быть уверенным в

отсутствии влияния металлического прибора, предназначенного для осуществления кручения, на размагничивание образца. Наконец, он указал на то, что утверждение Маттеуччи о пропорциональности между магнитной индукцией и относительным увеличением объема не подтверждается собственными наблюдениями Вертгейма, согласно которым объем меняется пропорционально квадрату угла закручивания, в то время как магнитная индукция меняется линейно. Вертгейм также обсуждает менее чем удовлетворительную согласованность между теоретическими объяснениями Ампера и его собственными наблюдениями в 1857 г. эффектов влияния деформирования на намагничивание железа и стали.

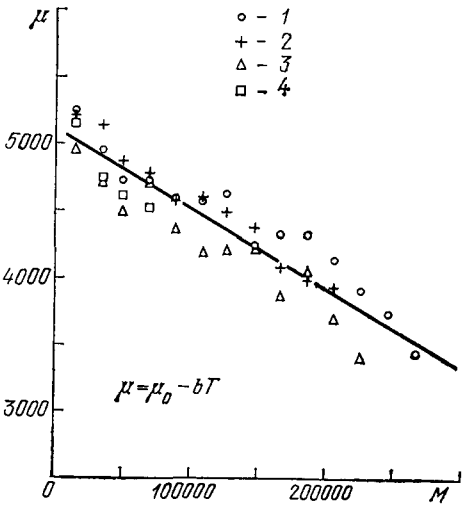


Рис. 2.37. Опыты Баушингера (1881) (кручение чугунных образцов). Уменьшение μ — модуля упругости при сдвиге с увелнчением крутящего момента M при испытании чугунных образцов различного поперечиого сечения: *1* — круглого, *2* — эллиптического, *3* — квадратного, *4* — прямоугольного; значения μ даны в кгс/мм², значения M — в кгс·см.

Эксперименты Баушингера (Bauschinger [1881, 2]), в которых он также изучал кручение призматических стержней круглого, эллиптического, квадратного и прямоугольного поперечных сечений, имели преимущество быть выполненными четверть века спустя после создания теории Сен-Венана. Тем не менее и Баушингер нашел, что измерения при кручении достаточно чувствительны для того, чтобы легко обнаружить существенную нелинейность, однако он не был настроен против представления результатов своих опытов в виде таблицы значений касательного модуля при сдвиге. На рис. 2.37 приведены значения касательного модуля при сдвиге, найденные Баушингером при различных формах поперечного сечения чугунных призматических образцов.

Как будет показано ниже в разделе 2.23, эмпирическое описание уменьшения по линейному закону значения касательного модуля при сдвиге с увеличением крутящего момента

$$\frac{dT}{d\gamma} = \mu_0 - bT$$

опередило обобщение Хартигом (Hartig [1893, 1]) переменности касательного модуля E более чем на десятилетие. Баушингер просто затабулировал полученные им результаты; он был больше заинтересован сравнением модулей E и μ со значениями коэффициента

Пуассона, найденными при одноосном нагружении идентичных образцов.

Используя свой зеркальный экстензометр, Баушингер измерил поперечную деформацию в процессе опытов на растяжение и сжатие. Он заметил, что по мере увеличения нагрузки не только увеличивался коэффициент Пуассона, но в то же самое время уменьшались

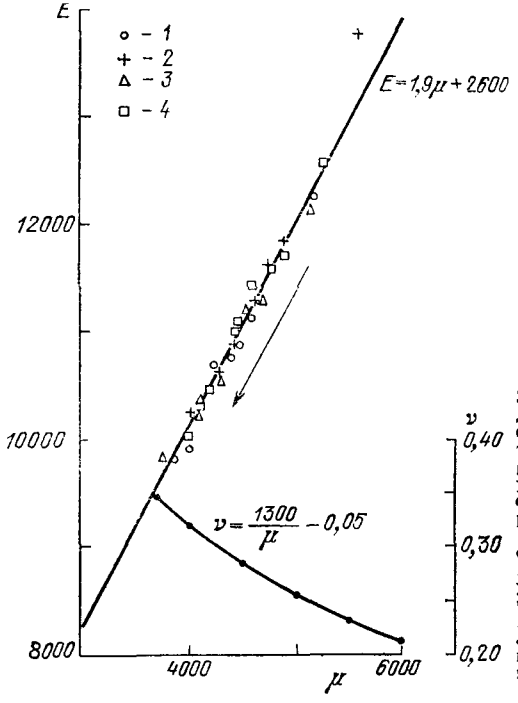


Рис. 2.38. Опыты Баушингера (1881). Зависимости экспериментально найденных значений модуля E и коэффициента Пуассона ν от экспериментально найденных значений модуля μ при разных уровнях деформации; уровень деформации для точек графика $E=E(\mu)$ играет роль параметра (стрелка рядом с графиком $E=E(\mu)$ указывает направление возрастания значений этого параметра). Видна близость экспериментально установленных зависимостей для всех четырех типов поперечного сечения: *1* — круглого, *2* — эллиптического, *3* — квадратного и *4* — прямоугольного (обозначены кружками, крестиками, треугольниками и квадратиками соответственно).

касательный модуль E и касательный модуль при сдвиге μ, точно так же как и при выполненных им опытах на кручение. Можно сравнить эти результаты, представленные на рис. 2.38. С увеличением деформации сжатия модули E и μ уменьшаются, как показано; в то же время представлено найденное увеличение коэффициента Пуассона. Наблюдавшееся соотношение

$$E = 1{,}9\mu + 2600 \text{ кгс/мм}^2$$

дало, в предположении изотропии,

$$\nu = \frac{1300}{\mu} - 0{,}05,$$

—зависимость для коэффициента Пуассона при кручении в виде нелинейной функции модуля при сдвиге.

Последущие наблюдения Баушингера устойчивости при кручении образцов различных поперечных сечений, так же как и заключительная серия опытов в первой части замечательной работы Вертгейма по устойчивости и разрушению, были в основном исследованиями пластических деформаций.

2.20. Уменьшение модулей с увеличением остаточной деформации: эксперименты Вертгейма (1844—1848), Кельвина (1865), Томлинсона (1881) и Фишера (1882) с металлами

Перси Вильямс Бриджмен однажды заявил, что подлинное открытие в экспериментальной физике редко достигается путем получения следующей верной значащей цифры после запятой за счет улучшения существующей установки, но скорее в результате новых и творческих подходов к проблеме, которые позволяют получить желаемое уточнение как побочный продукт [1]). Было бы трудно оспорить эту точку зрения. С другой стороны, за многие годы все же встречались отдельные экспериментаторы, которые доводили ранее известный эксперимент до более высокой степени точности и которые, возможно, не сделав собственных открытий, способствовали лучшему пониманию относительной важности или неважности ранее наблюдавшегося явления. Таким человеком был Герберт Томлинсон (Tomlinson [1883,1]), который между 1881 и 1886 гг. опубликовал четыре громадные статьи, описывающие около 70 экспериментов с многочисленными повторениями каждого, и достиг точности измерения более чем на порядок величины выше, чем в исследованиях Вертгейма 1844 г.

Исследование Томлинсона, которое стало возможным благодаря правительственной субсидии в 4000 фунтов стерлингов, имело

---

[1]) (Bridgman [1943, 1], стр. 14—15; также статья № 140 в [1964, 1], стр. 3518—3519).

«В физике всегда было известно, что новые явления лежат скрытыми за следующим десятичным знаком и эти явления могут быть чрезвычайно значительны или даже революционны по важности, как показывает вся область квантовых явлений. Эта ситуация встречается и в области высоких давлений; в сущности, я давно обнаружил, что для жидкостей существуют микроявления, характерные для каждой отдельной жидкости, и позднее обнаружил огромное изобилие микроявлений в поведении твердых тел со сложными структурами, таких, как сплавы с переходами типа «порядок — беспорядок». Тем не менее, вопреки несомненным возможностям, я лично не был столь темпераментен, чтобы смотреть с энтузиазмом на эксплуатацию феномена следующего десятичного знака, особенно если это должно быть сделано просто путем усовершенствования техники, уже применявшейся мною, хотя для этого имеется неоспоримое поле деятельности. Я думаю, что в этом своем мнении я не очень сильно отличаюсь от многих коллег физиков. Можно вспомнить тот ужас, с которым многие физики в 90-х годах XIX века размышляли о скучной перспективе будущего, посвященного исследованию следующего десятичного знака. На самом деле к следующему десятичному знаку стремились редко, за исключением тех случаев, когда он достигался попутно с развитием существенно новой техники».

целью определить влияние напряжений и деформаций на все известные тогда тепловые, электрические, магнитные и механические свойства не только обычно используемых металлов, но также серебра, платины, алюминия, олова и свинца. Он перепроверил и обсудил почти каждый аспект явления деформации, обнаруженный в предыдущие пятьдесят лет.

Установка, использованная Томлинсоном [1]), была основана на разработанной в 1865 г. Кельвином (Kelvin (Sir William Thomson) [1865,1]) экспериментальной установке, в которой две длинные проволоки подвешивались к общей опоре и загружались одинаковыми небольшими грузами, чтобы выпрямить их. Проволоки Кельвина имели длину, равную 24 м, проволоки же Томлинсона — равную 30 футам (9,196 м). Эксперимент последнего был осуществлен внутри закрытой башни, чтобы минимизировать тепловые воздействия. Одна проволока использовалась, чтобы контролировать удлинение и укорочение, производимые тепловыми изменениями, тогда как вторая проволока являлась образцом, который нагружался для изучения основной деформации. Измерения растяжения делались посредством микроскопа, действовавшего как оптический катетометр. На своих проволоках Томлинсон мог измерять удлинение, равное 1/100 мм, и, таким образом, мог наблюдать деформацию порядка $1 \cdot 10^{-6}$. Он выделял тепловые эффекты, сравнивая удлинения двух проволок при каждом снятии показаний. После эксперимента он разрезал проволоку на ряд кусков, которые затем испытывал по отдельности для проверки однородности.

Для каждого изучавшегося металла Томлинсон наблюдал: «Отклонения от закона Гука при рассмотрении мгновенных удлинений, имевшие место более или менее определенно всякий раз после того как происходили остаточные удлинения, даже если для создания мгновенного удлинения использовалась нагрузка, не превышающая одну десятую разрушающей проволоку нагрузки». (Tomlinson [1883,1], стр. 36). После серии опытов, в которых он попеременно нагружал и разгружал проволоки, наблюдая явления упругой и остаточной деформации, Томлинсон продолжал исследовать отклонения от закона Гука, сравнивая наблюдавшиеся приращения удлинения, соответствующие равным приращениям нагрузки. Некоторые из его результатов для мягкой меди и отожженного железа показаны на рис. 2.39. Он утверждал, что получил аналогичные результаты для отожженного платинирован-

[1]) Томлинсон (Tomlinson [1883, 1]) достиг большей точности путем повторения большого числа измерений, используя очень длинные проволоки. Достигнутая им чувствительность к удлинеиию 0,01 мм, такая же как у Вертгейма, была далеко превзойдена несколькими годами ранее — в 1877 г.— Иоганном Баушингером (Bauschinger [1879, 1]). Как видио из раздела 2.18, с помощью оптического рычага Баушингер достиг чувствительности 0,0002 мм, что позволило ему впервые исследовать деформации коротких образцов как при сжатии, так и при растяжении.

ного серебра, алюминия, нейзильбера и цинка. Он утверждал далее, что во всех трех опытах проволоки возвращались к нулевым деформациям после снятия грузов, т. е. имела место идеальная упругость.

Исследовавшаяся в первом эксперименте Томлинсона, обозначенном как эксперимент VIII, медная проволока сильно нагружалась и многократно испытывалась в течение трех недель, прежде чем производился опыт. Во втором эксперименте, обозначенном номером IX, образец подвергался таким же воздействиям в течение только шести дней, потому что Томплинсон тогда изучал ранние наблюдения, выполненные Кельвином и состоявшие в том, что на упругость металлов, даже в области малых деформаций, определенно влияют предыдущие механические «истории», включая колебания с малой амплитудой в течение нескольких дней. Также, согласно Кельвину, на упругость особенно влияли продолжительные периоды состояния покоя, предшествующие опыту. Каждый из опытов Томлинсона, отраженных на рис. 2.29, состоял из двадцати наблюдений. Интересно, что, когда бы он ни ссылался на закон Гука или модуль Юнга, Томлинсон всегда заключал эти термины в кавычки.

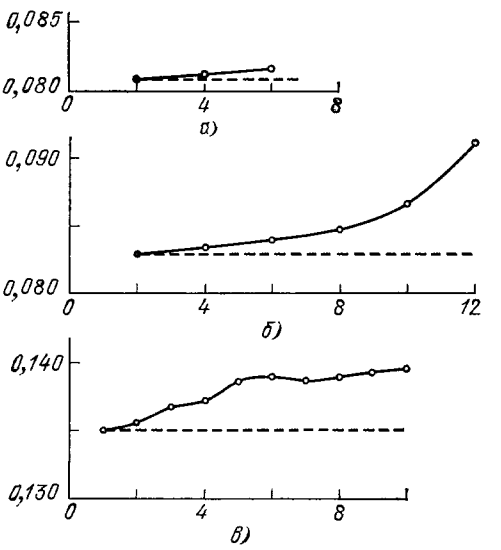


Рис. 2.39. Опыты Томлинсона [(1883). Результаты точных измерений (сплошная линия) при испытаниях на растяжение тридцатифутовых металлических проволок, показывающие отклонение от линейности зависимости σ — ε; штриховой линией изображены данные, отвечающие закону Гука. Во всех опытах остаточная деформация после снятия нагрузки не наблюдалась. По оси абсцисс отложена нагрузка в кгс; по оси ординат — приращение удлинения (среднее по результатам 20 измерений), соответствующее приращению нагрузки на единицу измерения в мм/кгс. *а*) Опыт XIII с проволокой из мягкой меди; *б*) опыты IX с проволокой из мягкой меди; *в*) опыт X с проволокой из отожженного железа[1].

Эти немногие опыты из серий экспериментов Томлинсона (Tomlinson [1883,1]) описаны здесь просто для того, чтобы показать, что по мере увеличения точности экспериментов неизменно продолжала наблюдаться у всех изучавшихся металлов нелинейность зависимости между напряжением и деформацией, сопровождалась ли она при этом остаточной деформацией или нет.

В свете изложенного главным вкладом Томлинсона было, во-первых, признание им важности различия между «дефектом упругости» и «дефектом закона Гука» и, во-вторых, признание им того

факта, что широко использовавшиеся значения квазистатических модулей, полученные Вертгеймом, были средними значениями результатов измерений, сделанных вслед за разгружениями при различных уровнях остаточной деформации. Поскольку во всех твердых телах, изучавшихся Вертгеймом, эти значения модулей уменьшались с увеличением остаточной деформации, средняя величина, как указал Томлинсон, не имела частного значения. Например, для определения удельных теплоемкостей среднее значение, полученное Вертгеймом, было представлено как изотермический параметр, чтобы сравнить его с полученным Вертгеймом из вибрационных опытов модулем как адиабатическим параметром. (Эта неудача при оценке сложностей, усугубленная разными порядками деформаций у сравниваемых динамических и статических данных, постигла и Вертгейма, и его оппонента Клаузиуса, критика же Клаузиусом ошибочного использования Вертгеймом трехмерной теории в одномерном случае — только отголосок полемики 120-летней давности, который уцелел только для нынешних ссылок.)

Данные Вертгейма 1844 г. по модулям упругости металлов стали экспериментальной основой для многих дискуссий и исследований последующих шестидесяти лет. Вертгейм провел опыты по продольным колебаниям стержней для всех многочисленных металлов с различными предыдущими термическими обработками, которые он исследовал; он отдельно изучил поперечные колебания стержней и, таким образом, определил два динамических модуля. Эти исследования были добавлением к квазистатическому определению модуля упругости E, полученного им при нагружении и многократных разгрузках и повторных нагружениях до более высокого уровня в области пластических деформаций. До того, как Томлинсон подчеркнул, что в описании подразумевается квазистатический модуль E как среднее значение всех данных, было расхождение во мнениях по поводу того, какая система значений модулей более точна, динамическая или квазистатическая.

Томлинсон (Tomlinson [1883,1]; стр. 14) цитирует следующую выдержку из статьи Кельвина «Упругость» в Британской энциклопедии (*Encyclopaedia Britannica*) 1880 г.: «Вероятно, что его (Вертгейма) модули, определенные при статическом растяжении, совершенно точны; отличия модулей, найденных в процессе колебаний, вероятно, возникают из-за несовершенства устройств для осуществления вибрационного метода (Kelvin [1880,1]). Двадцатью пятью годами позднее Эдуард Август Грюнайзен (Grüneisen [1907,1]) экспериментально показал, что динамические модули удивительно точны и что, когда квазистатические измерения производились при наименьших деформациях, полученные значения модуля E были близки к динамическим. Такое же соответствие между динамическими и квазистатическими значениями модуля упругости при очень малых деформациях было установлено Вертгеймом. Однако Вертгейм предпочитал использовать средние значения, в которых учитыва-

лись изменения в зависимости от уровня остаточных деформаций.

Изменение модулей упругости металлов в зависимости от уровня остаточной деформации, или, может быть, точнее, изменение касательного модуля при малых деформациях, является очень важным для современных исследований пластической деформации кристаллических тел, когда атомистические гипотезы ввели в употребление ошибочное предположение о том, что модуль упругости при сдвиге μ для упругого поля вокруг дислокации постоянен, несмотря на увеличивающуюся остаточную деформацию. Эта зависимость модуля упругости от предшествовавшей деформации была обнаружена Кулоном (Coulomb [1784,1]) в 1784 г., как показано

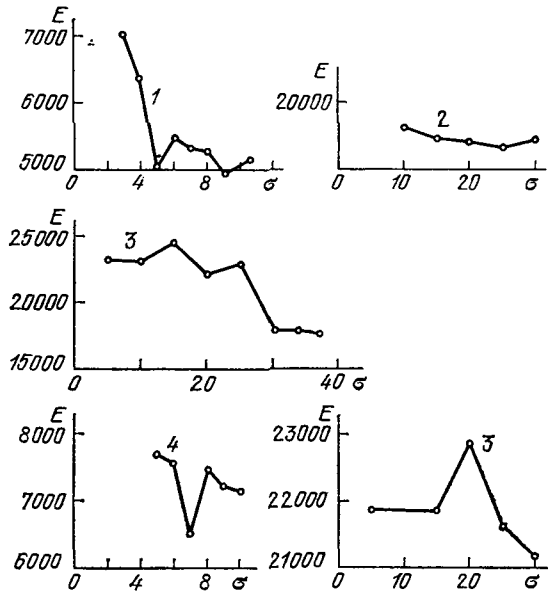


Рис. 2.40. Опыты Вертгейма (1842). Уменьшение значения модуля E с ростом остаточных деформаций при повторяющихся квазистатических испытаниях. Испытывались: *1* — золото, *2* — английская сталь для рояльных струн, *3* — железо, *4* — чистое серебро. Все материалы перед экспериментом были отожжены; E — модуль упругости в кгс/мм², σ — напряжение в кгс/мм².

в разделе 3.3, где будут описаны его данные по кручению. Изменения модулей в зависимости от уровня остаточной деформации, обнаруженные Вертгеймом, показаны на рис. 2.40 для некоторых из металлов, для которых он (Wertheim [1844,1 (a)]) определил значение модуля E. Данные получены из квазистатических опытов [1]). Динамические данные, полученные Кельвином (Kelvin [1865,1])

[1]) И Вертгейм, и Кельвин знали, что они должны были учитывать изменения площади поперечного сечения в зависимости от остаточной деформации в опытах с одноосным напряженным состоянием. Они ссылались на эксперименты Каньяра де Латура (Cagniard de Latour [1828, 1]) при описании их озабоченности тем, что изменение объема в процессе пластической деформации также может вносить свой вклад в наблюдавшееся уменьшение модуля.

при исследовании крутильного маятника, которые были, по существу, повторением в 1865 г. опытов Кулона, выполненных на 90 лет раньше, показаны на рис. 2.41 для меди, мягкого железа и латуни.

Численные значения этих модулей, как функций остаточной деформации, могут быть, как обнаружил Кельвин, изменены путем изменяя предыдущей механической «истории» образца. Так, модуль образца, который выдерживался в течение нескольких дней под грузом, вызывающим остаточную деформацию, был заметно меньше, чем у образца, который был нагружен до того же напряжения и разгружен до нулевого напряжения за несколько дней до определения динамических модулей; оказалось, что значение модуля восстанавливается со временем.

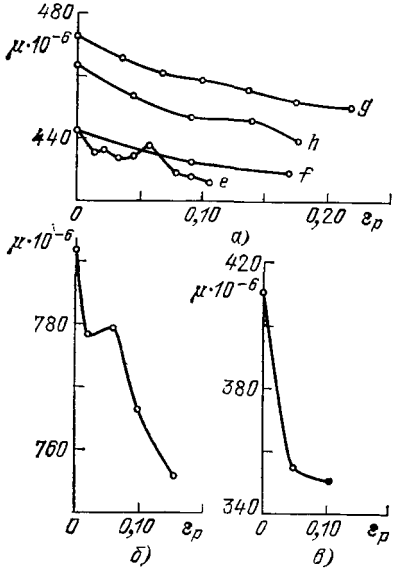


Рис. 2.41. Опыты Кельвина (1865). Уменьшение μ — модуля упругости при сдвиге с ростом остаточной деформации ε_p при повторяющихся динамических испытаниях. *а*) Результаты опытов с медью; *б*) результаты опытов с мягким железом; *в*) результаты опытов с латунью.

На вид зависимости модулей от остаточной деформации также влияла продолжительность наличия или отсутствия в образце непрерывных колебаний с малой амплитудой. В 1882 г. в опытах с проволоками из фосфористой бронзы Фридрих Хуго Роберт Фишер (Fischer [1882,1]) изучал эти явления в рамках рассмотрения зависимости модуля от предварительных разгрузки и повторного нагружения при различных значениях остаточной деформации. Испытывая проволоки длиной 5,5 м и желая добиться нужной точности, он использовал машину для растяжения с автоматической записью, так что в его опыте без перерыва могли выполняться циклы разгрузки и повторного нагружения до уровня, соответствующего появлению новых долей остаточной деформации, производимые, таким образом, с отдельным образцом очень большое число раз вплоть до разрушения[1]). Фишер

[1]) Вслед за созданием в 1872 г. Робертом Генри Тарстоном в Стивенсовском технологическом институте первой машины для испытаний с автоматической записью нагрузки и деформации, в последующие двадцать лет возник огромный интерес к автоматической записи во всех типах испытательных машин для всех видов механических испытаний. Машина Тарстона была установкой для кручения. Та, которую использовал Фишер, была с самозаписывающим устройством, созданным в Дрезденском техническом институте Ройшем в 1880 г. Скорость карандаша, записывающего результаты непрерывных испытаний, показанные на рис. 2.42, была 0,3 мм/с.

наблюдал, что функции отклика в процессе разгрузки и повторного нагружения были нелинейны, как может быть видно на рис. 2.42, взятого из его статьи.

Циклы, показанные на рис. 2.42, были просто первыми немногими из большой серии, в которой напряжение P_1 в конечном счете

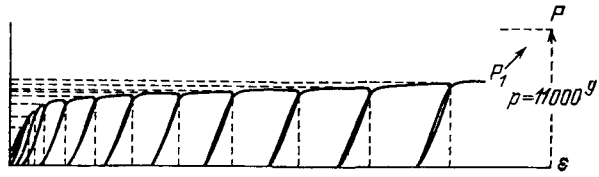


Рис. 2.42. Опыт Фишера (1882). Автоматически зарегистрированные результаты непрерывного циклического нагружения образца из фосфористой бронзы длиной 5,5 м. Видно постепенное изменение петлеобразных участков диаграммы напряжение–деформация при разгрузках и повторных нагружениях.

достигало значения P. Фишер заметил постепенное увеличение отличия между ветвями циклов, соответствующих разгрузке и повторному нагружению, по мере увеличения остаточной деформации. Он был убежден, что не следует придавать никакого особого значения тому, что обычно называют пределом упругости материала. Скорее он считал важной «упругость» тела непосредственно перед

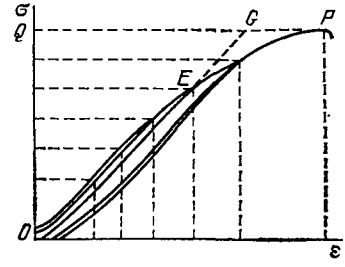


Рис. 2.43. Опыт Фишера (1882). α — отношение начальной упругой (обратимой) деформации к неупругой деформации как функция числа циклов, N — число циклов; 1 — ордината, соответствующая начальной остаточной деформации.

Рис. 2.44. Опыт Фишера (1882). Изменение закона деформирования фосфористой бронзы при разгрузке и повторном нагружении с увеличением числа циклов. σ — напряжение, ε — деформация.

разрушением в противоположность «неупругости», связанной с остаточной деформацией. Фишер построил график зависимости отношения начального упругого восстановления к неупругой деформации от числа циклов, получив кривую, показанную на рис. 2.43, из которого видно — это должен был обнаружить Кулон (Coulomb [1781, 1]) для кручения в 1784 г. и Иоганн Баушингер (Bauschinger [1886, 1]) для растяжения и сжатия четырьмя годами позднее Фишера, — что значение «упругой» составляющей остается постоянной.

На рис. 2.44 показаны сравнения Фишером графиков зависимостей между напряжением и упругой деформацией при различных значениях остаточной деформации, включая область, близкую к разрушению. Он считал эти данные демонстрирующими основные «упругие» свойства тела, которые, по существу, и должны изучаться как функции различных деформационных и тепловых «историй» тела, имевших в нем место. Нулевая точка для таких исследований должна была бы быть установлена в состоянии полного отжига. Действительно, с этой целью Фишер еще раз подвергал отжигу свои проволоки.

2.21. Циклическое нагружение шелка-сырца: Мюллер (1882)

Машина Ройша в Дрездене с автоматической записью для непрерывных испытаний, которая была основой для исследований Фишера, использовалась и Эрнстом Мюллером (Ernst Müller [1882,1]) в 1882 г., чтобы подчеркнуть различие во влиянии, которое оказывают на нелинейность упругое последействие и остаточная деформация при растяжении шелка-сырца. Без какой-либо ссылки на изящные эксперименты с шелковыми нитями, в которых Вебер почти на пятьдесят лет раньше обнаружил упругое последействие (Weber [1835, 1]), Мюллер во введении к своей статье объяснил проведение своих экспериментов возникновением желания распространить на органические ткани исследования этих интересных явлений, обнаруженных в металлах. Его образцы длиной от 250 до 300 мм имели различные поперечные сечения от круглого и эллиптического до имеющих форму боба. Он использовал удельный вес и высоту модуля Юнга, чтобы выразить растягивающую нагрузку в сравнимых единицах длины. Как и в некоторых более ранних исследованиях органических тканей, описанных выше, деформации не были ограничены малыми значениями, представляющими для нас здесь главный интерес. Тем не менее, так как остаточные деформации не возникали вплоть до значения полной деформации, равного 0,025, при начальном нагружении и до 0,08 при последующих нагружениях, эксперименты Мюллера сделали возможным изучение упругого последействия и распределения энергии в условиях, не требующих крайне высокой точности. Зависимость между напряжениями и деформациями для шелка-сырца при циклическом нагружении в том виде, как она описана Мюллером, показана на рис. 2.45 (обратите внимание: 33 км соответствуют 44,8 кгс/мм²).

Разгрузкам в этом непрерывном опыте соответствуют точки с номерами *1*, *2*, *3*, *4*. На рис. 2.45 для первой разгрузки, в пределах наблюдения, была получена идеальная упругость. Разгрузка во всех остальных случаях приводила к остаточной деформации, которая выявилась не к моменту полного снятия напряжений, а после протекания процесса упругого последействия при разгрузке, при

нулевых напряжениях, спустя некоторый промежуток времени. (Я добавил стрелки, показывающие направление развития деформации.) Степень уменьшения деформации при нулевом напряжении для двух различных начальных грузов показана на рис. 2.46, где отмечены промежуточные продолжительности упругого восстановления при нулевых напряжениях.

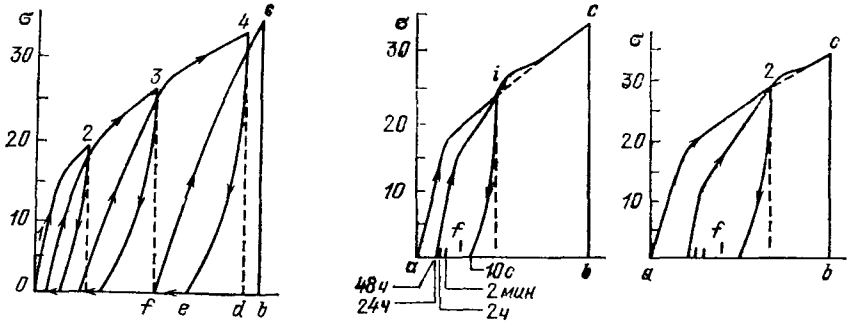


Рис. 2.45. Опыт Мюллера (1882). Циклическое нагружение шелковой нити. Автоматическая запись, показывающая значение остаточной деформации, σ — напряжение в км (1 км ~ ~1,3(57) кгс/мм²; объяснение причины, по которой напряжение имеет размерность длины, смотрите в тексте).

Рис. 2.46. Опыт Мюллера (1882). График циклического нагружения шелковой нити, демонстрирующий упругое последействие. σ — напряжение в км (1 км=1,3(57) кгс/мм²; объяснение причины, по которой напряжение имеет размерность длины, смотрите в тексте). Стрелками к точкам на оси абсцисс показывается их положение на диаграмме через указанный у стрелки промежуток времени после снятия нагрузки (перемещение точки диаграммы вдоль оси абсцисс происходит вследствие упругого последействия при разгрузке).

Уровень напряжения, от которого начата разгрузка, влияет не только на значение остаточной деформации и на значение устраненной упругой деформации к десяти секундам после окончания разгрузки, но и на изменение очертания кривых разгрузки и повторного нагружения. Во всех случаях кривая повторного нагружения проходила через точку, в которой началась разгрузка, и затем продолжалась так, как если бы до этого вообще не было никакого цикла разгрузки и повторного нагружения.

Мюллер (Müller [1882,1]) провел исследование поведения образца при повторном нагружении, показанного на рис. 2.47. Каждую кривую разгрузки он получал, используя отдельный образец, точно учитывая изменения размеров поперечных сечений и длины. Среднее разрушающее напряжение было равно 33 км, так что максимальное напряжение, отмеченное на рис. 2.47, было близко к предельному.

На рис. 2.47 также показана величина остаточной деформации и обратимых упругих деформаций для каждой разгрузки. Начальная нелинейность зависимости между напряжением и деформацией появлялась еще до того, как при полной деформации 0,025 возникала первая остаточная деформация. Наблюдавшаяся нели-

нейность должна быть частично приписана незарегистрированным временным подробностям упругого последействия. Как было показано на рис. 2.46, история такого восстановления менялась в зависимости от предшествовавшего нагружения. Каждому следующему повторному нагружению соответствовало возвращение в точку на графике, изображенном на рис. 2.47, откуда была начата предшествующая разгрузка. Подобно Фишеру (Fischer [1884,1]) в его исследованиях металлов, Мюллер был заинтересован в определении максимальной меры упругости при последнем повторном нагружении непосредственно вблизи разрушения. На рис. 2.47 можно заметить, что кривые повторных нагружений, имеющих место после разгрузок от достаточно больших уровней напряжений, характеризуются наличием точки перегиба, выше которой эти кривые поворачивают к оси напряжений (на кривой имеется точка перегиба, за ней при увеличении напряжений первая производная функции $\sigma=\sigma(\delta)$ начинает возрастать. — *А. Ф.*). Во всех опытах Вебера (Weber [1835, 1], [1845,1]) с шелком, осуществленных 47 годами ранее, можно заметить, что образцы предварительно нагружались до напряжения, намного превосходящего те значения, которые достигались в проводившихся после этого опытах. График зависимости отношения упругой деформации δ_e к полной деформации δ от полной деформации, показан на рис. 2.48.

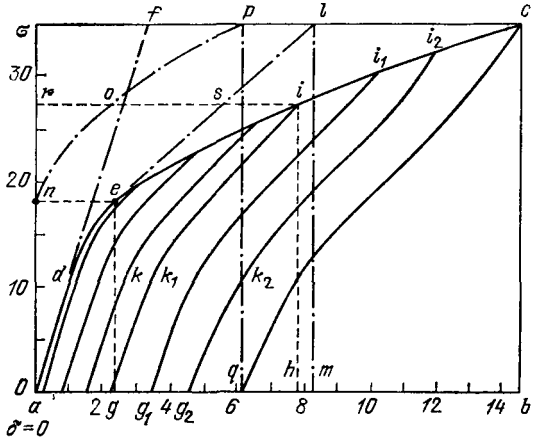


Рис. 2.47. Опыт Мюллера (1882). Повторное загружение предварительно напряженных шелковых нитей. Каждой кривой нагружения соответствует свой образец. Разгрузочные кривые не показаны, σ — напряжение в км (1 км=1,3(57) кгс/мм²; объяснение причины, по которой напряжение имеет размерность длины, смотрите в тексте); δ — удлинение в % от первоначальной длины образца.

В дополнение к графику этого отношения Мюллер изобразил и графики измеренных значений δ и δ_e в функции от δ; при этом в терминах концепции Фишера максимальное значение ординаты графика δ_e, соответствующее разрушению, рассматривалось в качестве фундаментальной характеристики упругого поведения материала. Кроме того, Мюллер рассматривал энергетические соотношения, выраженные через отношение площадей, рассматривал проблемы, которые могли возникнуть вследствие изменений поперечных сечений в процессе деформирования, наконец, рассматривались спо-

собы, которыми при желании могло быть определено уменьшенное напряжение при постоянном объеме (Müller [1882,1]).

Этот выполненный в 1882 г. анализ полной деформации, остаточной деформации и упругого последействия, включая наблюдения, осуществляемые после разгрузки тела в диапазоне продолжительностей от 10 с до 48 ч, в течение которых такие явления проявлялись очень отчетливо, представляет собой полный качественный аналог, родственный исследованиям Фишера (Fischer [1882,1]). Вместе с описанными выше статьями Вебера 1835 и 1841 гг. статья Мюллера 1882 г. служит весьма совершенным экспериментальным введением к тому, что в современной терминологии называют неупругостью твердых тел.

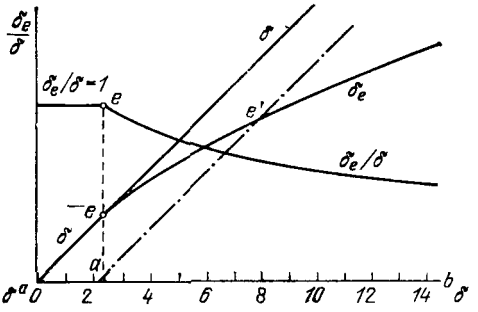


Рис. 2.48. Опыт Мюллера (1882). Отношение упругой деформации δ_e к полной деформации δ как функция полной деформации в испытаниях на растяжение шелковых нитей.

Двумя годами позднее Фишер (Fischer [1884,1]) распространил свои исследования, выполненные с фосфористой бронзой, на ряд других металлов. Эта более подробная статья вместе с его более ранней работой представляется началом двадцатипятилетнего периода экспериментальных исследований нелинейных зависимостей между напряжениями и деформациями у металлов при малых деформациях, периода, увенчавшегося двумя кульминациями: чрезвычайно точными оптическими экспериментами Грюнайзена (Grüneisen [1906, 1], [1907,1], [1908,1]) 1906—1908 гг. и опытами по нелинейному кручению Дж. Генри Пойнтинга (J. Henry Poynting [1909,1], [1912, 1]), проведенными между 1909 и 1912 гг.

2.22. Первое точное инструментальное наблюдение нелинейности металлов при инфинитезимальных деформациях: Джозеф Томпсон (1891)

Наиболее известными экспериментаторами, которые изучали нелинейную упругость при малых деформациях, были Карл Бах, Эрнст Карл Хартиг, Джозеф Осгуд Томпсон, Рудольф Мемке и Эдуард Август Грюнайзен, работы которых были выполнены между 1887 и 1906 гг. [1]). В ряде экспериментов, выполненных Георгом

[1]) Широко распространенное руководство по сопротивлению материалов Карла Баха, озаглавленное «Упругость и прочность» (*«Elasticität und Festigkeit»*), которое к 1911 г. выдержало шесть изданий, напоминало решение Королевской комиссии 1849 г., касавшееся закона Гука и инженеров. Книга Баха была единственной в своем роде в том отношении, что в ней, как основа для обсуждения, вво-

Страдлингом (Stradling [1890,1]) [1]), которыми еще до их проведения интересовался его профессор Фридрих Кольрауш [2]), возник вопрос о нелинейном поведении металлов при малых деформациях. Кольрауш побудил еще одного из своих прежних студентов, Джозефа Осгуда Томпсона (Thompson [1891,1]), осуществить вторую серию опытов со специально приготовленными проволоками длиной 27 м из различных металлов, чтобы с достаточной точностью экспериментально решить вопрос о том, применим ли закон Гука к какому-либо из кристаллических тел.

Сам Томпсон, как представляется, не знал, что проблема, которую предложил ему его бывший профессор Кольрауш, серьезно рассматривалась когда-либо прежде. «Насколько я знаю, вплоть до сегодняшнего дня все считали старый закон (закон Гука) хорошо обоснованным, и он никогда не подвергался строгой критике» (Thompson [1891,1], стр. 555). Очевидно, что Томпсон также ничего не знал о том, что эксперименты, которые он осуществил, чтобы изучить вопрос, впервые были поставлены Кельвином двадцатью пятью годами ранее и проводились по обширной программе Томлинсоном в предыдущем десятилетии. Поскольку Томпсон в своем варианте эксперимента преуспел в получении результатов, которые должны рассматриваться как наиболее точное определение зависимости между напряжением и деформацией, выполненное в XIX столетии, и которые все еще сравнимы с лучшими результатами, полученными в наши дни, представляется интересным остановиться здесь на некоторых деталях его экспериментов.

Оптические катетометры Томпсона позволяли находить удлинения с точностью до 0,005 мм. Для измерения деформаций, меньших чем 10^{-6}, он применял образцы длиной 27 м. Чтобы минимизировать

дился параболический закон, обобщенный так, чтобы соответствовать свойствам миогих материалов в области инфинитезнмальных деформаций или в «диапазоне значений напряжений, используемых в технике». Август Эдвард Хью Ляв в своем классическом труде «Математическая геория упругости» [1892. . . 1927] даже в четвертом издаиии 1927 г. сохранил следующее высказывание по вопросу эксперимента и теории:

«Известно, что многие материалы, используемые в инженерных конструкциях, например чугун, строительный камень, цемент, не подчиияются закону Гука при значениях деформаций, достаточных, чтобы их можно было наблюдать... Хотя накоплеи большой запас экспериментальных знаний в отношении поведения тел, не находящихся в условнях, к которым применима известная математическая теория, все же кажется, что соответствующее расширение теории, которое включало бы в нее такие зиания, не может быть выполнено, пока не будут получены более полные экспериментальные данные».

[1]) Целью этих опытов было повторение исследоваиий Вильгельма Якоба Шторма Гравесанда (Gravesand [1720, 1]) по определению значений модулей в рамках формулы, выведенной Кольраушем. Значения удлинений для проволок длиной 23 м в контрольном опыте были не пропорциональны нагрузке, и с увеличеиием нагрузки модули заметно уменьшались (см. раздел 3.2).

[2]) Я обсуждал выше, в разделе 2.17, эксперименты Кольрауша, выполненные в лаборатории Вебера почти тридцатью годами ранее, в которых он открыл релаксацию напряжений в твердых телах.

перепады температуры, он проводил эксперименты в башне физического института в Страсбурге, где были выполнены первоначальные опыты Страдлинга. Шесть термометров, расположенных в башне на различных уровнях, показывали, что разница температур во время утренних опытов была не более 0,5 °С. Однако для проволоки длиной 27 м даже это небольшое изменение температуры окружающей среды приводило к значительному изменению длины. Поэтому, как до него делали Кельвин и Томлинсон, Томпсон ввел термометрическую эталонную проволоку, которая была закреплена в той же самой подвешивающей системе, что и образец, и оставалась в процессе опыта под постоянной нагрузкой [1]). Эталонная проволока была достаточно близка к проволоке такой же длины, служившей образцом, так что ее удлинение, вызванное флуктуациями температуры окружающей среды в то время, когда производились измерения, могло быть измерено тем же самым оптическим катетометром. Обе проволоки были прикреплены к большой балке на верху башни. Эта опорная балка была предварительно подвергнута воздействию нагрузки, в четыре раза превышающей максимальную, применявшуюся в экспериментах. Оптический катетометр, расположенный у точки закрепления проволок под балкой, показал, что измеряемый прогиб опоры при этом был порядка 0,013 мм; таким образом, для максимальной нагрузки в эксперименте, равной по величине только одной четвертой указанной выше пробной нагрузки, прогиб опоры был пренебрежимо мал. Тем не менее в течение всего эксперимента показания оптического катетометра, расположенного в верхней части проволоки, сравнивались с показаниями неподвижного оптического катетометра, установленного на нулевой отметке, т. е. двадцатью семью метрами ниже (это был репер), что позволяло следить за изменениями уровня подвеса, вызываемыми нагрузкой, прикладываемой к образцу. Третий оптический катетометр на нижнем конце образца использовался для определения перемещения этого конца. Термометрическая эталонная проволока Томпсона была достаточно длинной для того, чтобы он мог измерять изменения температуры в 1/40 °С и оценивать изменения в 1/80°С.

Томпсон, подобно всем своим предшественникам и последователям в опытах с нагружением мертвой нагрузкой, испытывал затруднение в вопросе выбора момента регистрации деформаций. Вертгейм ждал от 5 до 10 минут прежде, чем приступить к записи деформаций, так, чтобы тепловое и упругое последействия достигли состояния, близкого к устойчивому. Андреас Миллер (Miller [1882,1]) был подвергнут критике Томпсоном за то, что он измерял удлинения через две секунды после приложения нагрузки, т. е., как заметил Томпсон (Thompson [1891,1]), в тот момент, когда тепловое состояние еще не стало стационарным. Полтора десятилетия

[1]) Томпсон применил эту методику по предложению профессора Кольрауша.

спустя сам Томпсон критиковался Грюнайзеном (Grüneisen [1906, 1]) за то, что он измерял деформации точно через 13 с после приложения нагрузки, т. е., как заметил Грюнайзен, тогда, когда упругое последействие еще не достигло стационарного значения и его величина менялась вместе с нагрузкой. Томпсон, однако, привел пример, в котором изменение длины в 0,07 мм имело место в первые 10 или 12 с; в последующую минуту дальнейшее изменение составило только 0,01 мм. Во всяком случае, следуя предписанию Вертгейма в этом сложном вопросе, Томпсон точно сообщает нам, что́ он делал.

Чтобы повысить точность своих измерений деформаций, пороговая чувствительность которых была $2 \cdot 10^{-7}$, Томпсон выполнял 20 точных повторений каждого опыта, внося температурную поправку по своей термометрической эталонной проволоке и всегда проверяя, что, после снятия нагрузки, проволока возвращалась точно к начальной нулевой точке, которая определялась по неподвижному катетометру и которая корректировалась, если имело место какое-либо небольшое изменение температуры, с помощью термометрической проволоки.

В дополнение к этим предосторожностям Томпсон использовал термопару железо — нейзильбер, чтобы фиксировать с ее помощью кратковременные изменения температуры, которые происходили в процессе нагружения, получая промежуток времени, необходимый для возвращения к равновесию, равный 6,5 с, сравнимый с 6 с, полученными Вебером (Weber [1830,1]) на шестьдесят лет раньше.

Томпсон критиковал значения, полученные экспериментально Эриком Эдлундом (Edlund [1865,1]) и Джеймсом Прескоттом Джоулем (Joule [1859,1]). Джоуль установил приближенную корреляцию экспериментально обнаруженной зависимости с теоретическим соотношением, полученным Кельвином, между приращением температуры Δt, вызванным приращением нагрузки Δp, и самим этим приращением нагрузки. Эдлунд получил значения, которые были приблизительно на 40% меньше предсказанных Кельвином. Томпсон имел возможность исследовать то же самое явление, используя результаты Эдлунда, которые предсказывали бы применительно к его Томпсона данным тепловые эффекты, вызывающие удлинение до 0,10 мм. Значение же, которое Томпсон получил в описанном выше случае, было намного меньше, а именно равнялось 0,07 мм.

Томпсон выполнял опыты (Thompson [1891,1]) с латунными, медными, стальными и серебряными проволоками. Он пришел к заключению, что касательный модуль изменяется вместе с нагрузкой у любого из этих металлов. Измеренные им величины были на два порядка точнее тех, которые получил Вертгейм почти на пятьдесят лет раньше. Тем не менее, как отмечает Томпсон, во многих случаях прослеживается корреляция между его данными и данными Вертгейма, характеризующими изменение модуля с ростом напряжений. Он привел два примера такого сравнения для поликристал-

лических серебра и золота. В табл. 19 показана воспроизводимость в подборке отдельных данных для серий из десяти измерений для латунной проволоки. Томпсон предложил простую кубическую за-

Таблица 19

Дж. О. Томпсон (1891)

кгс	мм										Среднее (мм)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0,2	7,10	7,13	7,12	7,11	7,105	7,12	7,11	7,11	7,12	7,09	7,111
0,4	14,25	14,265	14,26	14,28	14,285	14,27	14,265	14,27	14,28	14,27	14,269
0,6	21,47	21,50	21,50	21,50	21,485	21,495	21,49	21,475	21,49	21,49	21,489
0,8	28,76	28,775	28,78	28,77	28,75	28,785	28,77	28,77	28,79	28,77	28,772
1,0	36,11	36,125	36,14	36,145	34,115	36,13	36,13	36,11	36,12	36,12	36,124
1,2	43,53	43,57	43,56	43,55	43,555	—	43,57	43,55	43,545	43,56	43,554
1,4	51,05	51,07	51,065	51,07	51,065	51,06	51,065	51,09	51,055	51,08	51,067
1,6	58,66	58,71	58,685	58,71	58,66	58,69	58,675	58,68	58,69	58,675	58,683
1,8	66,33	66,355	66,335	66,36	66,32	66,35	66,31	66,32	66,34	66,32	66,334

висимость между напряжением и деформацией, описывающую данные, относящиеся ко всем четырем металлам:

$$\varepsilon = a\sigma + b\sigma^2 + c\sigma^3. \qquad (2.24)$$

В табл. 20 приведены средние значения, полученные на основе восемнадцати опытов с латунью. Используя три эксперименталь-

Таблица 20

Дж. О. Томпсон (1891)

P (кгс)	X Наблюденное удлинение (мм)	X_1 Вычисленное удлинение (мм)	$X-X_1$ (мм)	P (кгс)	X Наблюденное удлинение (мм)	X_1 Вычисленное удлинение (мм)	$X-X_1$ (мм)
0,2	7,111	7,110	+0,001	1,2	43,554	43,554	±0
0,4	14,272	14,271	+0,001	1,4	51,076	51,071	+0,005
0,6	21,488	21,488	±0	1,6	58,679	58,681	—0,002
0,8	28,770	28,770	±0	1,8	66,341	—	—
1,0	36,119	36,122	—0,003				

Средняя температура	9°
Длина проволоки	22 700 мм
Площадь поперечного сечения	0,0627 мм²
Плотность материала проволоки	8,42 гс/см³
Начальная нагрузка	0,665 кгс

P — дополнительная (к начальной) нагрузка,
X — удлинение.

ные точки для определения a, b и c, Томпсон сравнил значения, наблюденные и вычисленные по формуле (2.24).

Аналогичные сравнения для средних данных по меди, стали и серебру приведены в табл. 21.

Таблица 21

Дж. О. Томпсон (1891)

P (кгс)	X Наблюденное удлинение (мм)	X_1 Вычисленное удлинение (мм)	$X - X_1$ (мм)
	Медь		
0,2	5,531	5,529	+0,002
0,4	11,084	11,086	—0,002
0,6	16,671	16,673	—0,002
0,8	22,298	22,294	+0,004
1,0	27,949	27,951	—0,002
1,2	33,646	33,646	±0
	Сталь		
0,2	7,078	7,077	+0,001
0,4	14,196	14,197	—0,001
0,6	21,358	21,358	±0
0,8	28,558	28,558	±0
1,0	35,792	35,793	—0,001
	Серебро		
0,2	7,898	7,896	+0,002
0,4	15,820	15,822	—0,002
0,6	23,775	23,776	—0,001
0,8	31,758	31,756	±0,002
1,0	39,762	39,762	±0

	Медь	Сталь	Серебро
Средняя температура °C	13,5	13	14
Длина проволоки (мм)	22 690	22 700	22 690
Площадь поперечного сечения (мм²)	0,0641	0,03263	0,0687
Плотность материала проволоки (гс/см³)	8,99	7,74	10,00
Начальная нагрузка (кгс)	0,192	0,491	0,593

Придавая равенству (2.24) форму зависимости нагрузки P от удлинения X, Томпсон получил эмпирические значения коэффициентов a, b, c, приведенные для четырех металлов в соотношениях (2.25):

$$\begin{aligned} \text{сталь:}\quad & X = 34{,}672P + 0{,}6498P^2 - 0{,}0525P^3, \\ \text{латунь:}\quad & X = 34{,}924P + 0{,}2386P^2 + 0{,}1487P^3, \\ \text{серебро:}\quad & X = 38{,}907P + 0{,}4462P^2 - 0{,}313P^3, \\ \text{медь:}\quad & X = 27{,}461P + 0{,}2883P^2 + 0{,}0538P^3. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Модуль упругости E, или, точнее сказать, касательный модуль[1]), может быть, конечно, получен как производная функции (2.24) при соответствующем значении напряжения [1]. Чтобы подчеркнуть количественное отличие в значениях модулей, имеющее место при отсутствии остаточных деформаций (т. е. в каждом случае, когда разгрузка приводит к возвращению к нулевой деформации), Томпсон сравнивал модуль упругости E при наименьших нагрузках с секущим модулем [2]) E_{I} и касательным модулем E_{II} для последнего приращения нагрузки. В табл. 22 показано это сравнение.

Таблица 22

Дж. О. Томпсон (1891)

	Плотность (гс/см³)	Площадь поперечного сечения (мм²)	Модули (кгс/мм²)		
			E	E_{I}	E_{II}
Сталь	7,74	0,03263	20 050	19 430	19 230
Латунь	8,42	0,0627	10 370	9 820	9 450
Серебро	10,00	0,0687	8 490	8 300	8 250
Медь	8,99	0,0641	12 890	12 620	12 420

2.23. Нелинейный закон Хартига: общая функция отклика в случае малых деформаций твердых тел (1893)

Контрастом к точным экспериментам Джозефа Томпсона были почти одновременно с ними проводившимися в 1893 г. исследования Эрнста Карла Хартига (Hartig [1893,1]). Проводя исследования в конце века, который теперь иногда пренебрежительно называют веком феноменологической физики, он имел представление о разумной согласованности экспериментальных данных с эмпирическими зависимостями, напоминающими предложенные два столетия тому назад Лейбницем (Leibniz [1690,1]) и Бюльфингером (Bülffinger [1729,1]). Тем не менее упор Хартига на изучение касательного модуля при растяжении и при сжатии, с целью отыскания величины E при напряжении, равном нулю, и установление закона его изменения при малых изменениях напряжения в обе стороны от этого нулевого значения, привел к новому подходу в осмысливании нелинейности при малых деформациях. Это предложение и содержащаяся в нем формула Хартига для касательного модуля

[1]) Касательный модуль есть тангенс угла наклона касательной к кривой зависимости между напряжением и деформацией при определенном уровне напряжения или деформации в опыте по одноосному растяжению или сжатию или в опыте по простому кручению.

[2]) Секущий модуль — это отношение напряжения к деформации независимо от формы характеристики, полученной в опыте по одноосному растяжению или сжатию или в опыте по простому кручению.

металлов привели через 13—15 лет к исчерпывающему точному экспериментальному результату Грюнайзена, описывающему нелинейность при малых деформациях.

Хартиг, мимолетно указав на важность работы Ходкинсона пятидесятилетней давности, удовлетворился этим, не касаясь других, далеких по времени, предшественников, и проанализировал только экспериментальные исследования нелинейности при малых деформациях, проведенные в пределах пятнадцати лет, предшествовавших его собственному вкладу. Изучая экспериментальные данные за последующую четверть века, можно видеть, что основной факт, выясненный Хартигом, заключается в том, что, согласно имевшимся тогда данным, относящимся к напряжениям в металлах, касательный модуль при растяжении убывал с увеличением напряжения, а при сжатии увеличивался с увеличением напряжения. Данные Карла Баха (Bach [1897,1]) для чугуна, полученные в 1897 г. и приведенные в табл. 23, ясно показывают уменьшение модуля с увеличением напряжения. Якоб Иоганн Вейраух (Weyrauch [1888,1], стр. 94) в 1888 г. наблюдал аналогичное убывание значения E от 956 400 до 672 300 кгс/см² при возрастании напряжений от 148 до 1040 кгс/см².

Таблица 23

Бах (1897)

Пределы растягивающих напряжений σ (кгс/см²)	Модуль упругости E (кгс/см²)
0—100	1 220 000
100—200	1 115 000
200—300	1 085 000
300—400	1 020 000

Арман Габриэль Консидер (Considere [1888,1], стр. 78) описал эксперименты с серым чугуном лейтенанта Буббе (Bubbé), в которых модуль изменялся от первоначального значения $E=950\,000$ кгс/см² до $E=180\,000$ кгс/см² вблизи разрыва. Данные из книги Консидера и результаты Роберта Генри Тарстона [1]) (Thurston [1878, 1]), полученные на испытательной машине с автоматической записью в 1878 г., представлены на рис. 2.49, взятом из работы Хартига 1893 г. На рис. 2.50, взятом также из работы Хартига (Hartig [1893,1]), приведены данные о напряжениях при растяжении — сжатии для чугуна, полученные Александром Блеки Вильямом Кеннеди [2]) (Kennedy [1887,1]) в 1887 г. (сплошная линия), и данные для чугуна, опубликованные Хьюдсоном Биром (Beare [1892,1]) в 1892 г. (штриховая линия). В обеих системах данных остаточная деформация исключена. Кеннеди использовал описанную Уильямом Кауторном Анвином [3]) (Unwin [1910,1]) испытательную маши-

[1]) Тарстон был профессором инженерного дела Стивенского технологического института в США.

[2]) Кеннеди был широко известным английским инженером, одно время председателем Британского общества инженеров-механиков.

[3]) Машина фактически была запроектирована на основе испытательной машины с автоматической записью, изобретенной Тарстоном в 1872 г. Анвин был

ну, которая была сконструирована так, чтобы позволять исключать остаточную деформацию при каждом напряжении; Бир использовал предварительно напряженный образец.

На основе своих данных Хартиг предложил как для растяжения, так и для сжатия зависимость

$$E=\frac{d\sigma}{d\varepsilon}=E_0-b\sigma, \qquad (2.26)$$

где E_0 — модуль при нулевом напряжении. Интегрирование приводит к следующей зави-

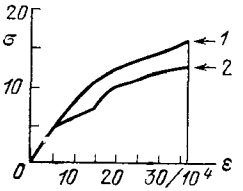


Рис. 2.49. Данные по испытанию чугуна на растяжение при малых деформациях, использованные Хартигом в его анализе (1893). *1* — результаты испытаний, полученные Тарстоном (1878), *2* — результаты Коисидера (Буббе) (1888); σ — напряжение в кгс/мм², ε — деформация.

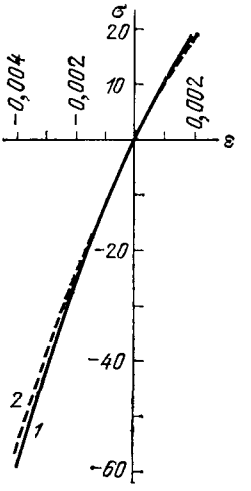


Рис. 2. 50. Данные по испытанию чугуна на растяжение и сжатие, использованные Хартигом в его анализе (1893). *1* — результаты испытаний Кениеди (1887), *2* — результаты Хьюдсона Бира (1892), σ — напряжение в кгс/мм², ε — деформация.

симости напряжения от деформации (уравнение (2.27)):

$$\sigma=\frac{E_0}{b}(1-e^{-b\varepsilon}), \qquad (2.27)$$

которая может быть переписана в виде

$$\sigma=E_0\varepsilon-\frac{bE_0}{2}\varepsilon^2+\frac{b^2E_0}{6}\varepsilon^3+\ldots \qquad (2.28)$$

Сохранение лишь двух членов в формуле (2.28) приводит к зависимости напряжения от деформации, данной Герстнером [1]) для

профессором гражданского строительства в Центральном Инженерном Колледже, Англия, и главным консультантом А. Лява по «технической» теории упругости.

[1]) Однако «закон Герстнера», предложенный им в 1824 г., относился в первую очередь к малым остаточным деформациям, а соотношение Дюпена между силой и прогибом для деревянных брусьев, данное в 1811 г. уравнением (2.2), может быть переписано в той же форме, как и (2.28), т. е.

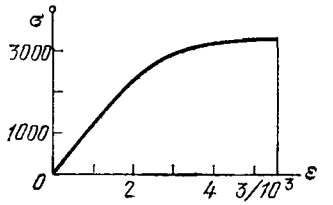
$$F=\frac{1}{a}\delta-\frac{b}{a^3}\delta^2+\frac{2b^2}{a^5}\delta^3\ldots$$

и, таким образом, это была первая экспериментальная зависимость, представленная в такой форме.

фортепианной струны, а также с эмпирической формулой Ходкинсона для чугуна, опубликованными более чем на полстолетия ранее, соответственно в 1824 и 1839 гг. [1]).

Хартиг отметил, что результаты Баха по растяжению медных образцов показывали уменьшение касательного модуля упругости от $1{,}1 \cdot 10^6$ до $0{,}704 \cdot 10^4$ кгс/см^2, когда напряжение возрастало от 100 до 600 кгс/см^2. Хотя зависимость (2.24) Томпсона имела эмпирическую форму, отличную от формулы (2.27) Хартига, касательный модуль при растяжении, найденный по этой формуле, разумеется уменьшался как для меди, так и для стали.

Результаты, полученные для фосфористой бронзы Фишером (Fischer [1882,1]), который был коллегой Хартига в Дрездене, были проанализированы в данном контексте. Наблюдается уменьшение



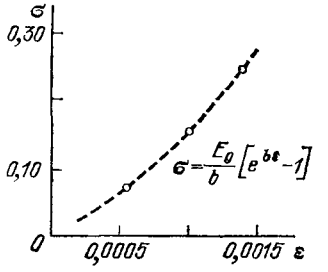


Рис. 2.51. Данные Фишера по испытанию на растяжение фосфористой бронзы (1882), использованные Хартигом (1893) в его анализе, σ — напряжение в кгс/см^2, ε — деформация.

Рис. 2.52. Сравнение экспериментальных результатов Баха (опыты с кожей) с напряжениями, вычисленными по формуле Хартига, σ — напряжение в кгс/мм^2.

E от значения $1{,}165 \cdot 10^6$ кгс/см^2 в интервале напряжений между 0 и 1270 атм [2]) до гораздо меньшего значения, равного 90 000 кгс/см^2, в интервале от 3130 до 3300 атм, с плавным переходом между этими значениями. Хартиг видел необходимость делать различие между экспериментальными данными типа фишеровских, которые содержали остаточные деформации и, к примеру, томпсоновскими, которые их не содержали; но он использовал оба типа данных с целью отыскания значения E_0 при нулевом напряжении путем интерполяции на основе эмпирической формулы. Данные Фишера по фосфористой бронзе, взятые из статьи Хартига, приведены на рис. 2.51.

Обширные экспериментальные работы Баха по зависимости напряжения от деформации для кожи при растяжении показали увеличение касательного модуля с увеличением напряжения. Как показано выше [3]), такое поведение характерно для органических тканей вообще. Хартиг предположил, что результаты Баха, показан-

[1]) См. выше разделы 2.6 и 2.7. Третий член в формуле (2.28) не служит цели уточнения, а определяется однозначно теми же данными, которые дают функцию Герстнера — Ходкинсона.

[2]) 1 атм=14,7 фунт/дюйм^2=1,03 кгс/см^2.

[3]) См., например, разделы 2.13, 2.14 и 2.15.

ные на рис. 2.52, могут быть согласованы с уравнением (2.26) при помощи изменения знака при экстраполяции к E_0:

$$E=\frac{d\sigma}{d\varepsilon}=E_0+b\sigma, \tag{2.29}$$

которое приводит к формулам (2.30) и (2.31), записывающим зависимость напряжения от деформации в случае кожи:

$$\sigma=\frac{E_0}{b}\left(e^{b\varepsilon}-1\right), \tag{2.30}$$

$$\sigma=E_0\varepsilon+\frac{bE_0}{2}\varepsilon^2+\frac{b^2E_0}{6}\varepsilon^3+\ldots \tag{2.31}$$

Данные, относящиеся к сжатию и растяжению вулканизированной резины, полученные Эмилем Винклером [1]) (Winkler [1878,1]) в 1878 г., показаны на рис. 2.53 в форме графиков как условных, так и истинных напряжений, определенных в предположении несжимаемости. Хартиг пришел к выводу, что формула (2.26), относящаяся к коже, для зависимости напряжения от деформации, которой соответствует график, поворачивающийся в сторону оси деформаций, здесь неприменима. Он отметил, что из эмпирической формулы для резины (2.32), полученной А. Эмбером (Imbert [1880,1]) в 1880 г., следует выражение (2.33) для касательного модуля [1]

$$\varepsilon=e^{n\sigma}-1, \tag{2.32}$$

$$E=\frac{d\sigma}{d\varepsilon}=\frac{1/n}{1+\varepsilon}. \tag{2.33}$$

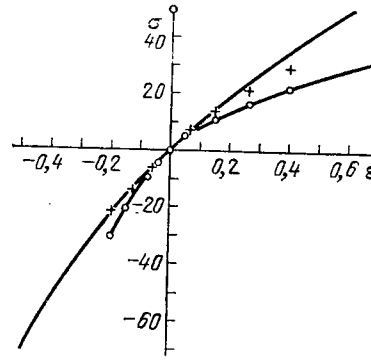


Рис. 2.53. Анализ Хартига (1893) результатов Винклера (1878) по испытанию вулканизированной резины на растяжение. Экспериментально найденные напряжения обозначены кружками (условные напряжения) и крестиками (истинные напряжения). Жирная линия отвечает напряжениям, полученным аналитически по формуле $\sigma=10\cdot\varepsilon(1+\varepsilon)$: σ — напряжение в кгс/мм², ε — деформация.

Последнее уравнение аппроксимирует данные в области малых деформаций при $E_0\cong 10$ кгс/см². Хартиг считал существенно важным определить, является ли нелинейная зависимость между напряжением и деформацией гладкой при прохождении через точку нулевого напряжения. Если зависимость гладкая и в графике, ей соответствующем, не наблюдалось никакой точки излома, то сама по себе точка нулевого напряжения не имела особого значения[2]).

[1]) Деформация измерялась в течение длительного времени, чтобы учесть последействие.

[2]) Интересно сравнить эти идеи Хартига с идеями, введеннымн Трусделлом через шестьдесят лет в его теории гипоупругостн (Truesdell [1955, 1], стр. 85)

Что касается его собственного экспериментального вклада в попытку показать нелинейность при малых деформациях по обе стороны от нулевого напряжения (т. е. в области и растяжения, и сжатия), то Хартиг (Hartig [1893,1]) представил свои результаты по сжатию «практически безупречного» воздушно-сухого образца бутылочной пробки высотой в 2,52 см и площадью поперечного сечения 6,895 см². Он дважды сжимал этот образец до больших деформаций с тем, чтобы устранить в дальнейшем остаточные деформации и минимизировать упругое последействие. Поскольку последнее имело место еще через 36 часов, он проводил свои измерения деформаций как можно быстрее после приложения нагрузки. Эти результаты, приведенные на рис. 2.54, он рассматривал как приблизительно представимые формулой (2.34), в соответствии с которой он получал сомнительную оценку E_0 в начальной точке. Из соотношения

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} e^{m\varepsilon} \qquad (2.34)$$

получаем[2]

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{(m+1)}{(1+\varepsilon)^2} e^{m\varepsilon}, \qquad (2.35)$$

что приводит к значению $E_0 = 11$ кгс/см². Он отметил, что при сжатии до 50% ненагруженной высоты касательный модуль для пробки возрастает до $E' = 6595$ кгс/см².

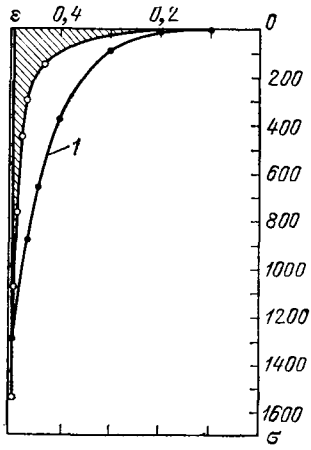


Рис. 2.54. Опыт Хартига (1893). Сопоставление данных испытания на сжатие цилиндрического образца из воздушно-сухой бутылочной пробки (светлые кружки) с результатами вычислений по формуле Хартига (2.34) (при $m=10$) в области малых деформаций (черные кружки). Наблюдается недостаточно хорошая их согласованность. σ — напряжение в кгс/мм², ε — деформация. (*1* — график зависимости $\sigma = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot e^{m\varepsilon}$ $(m=10)$).

Изучение Хартигом (там же) нелинейности при малых деформациях вместе с точными результатами Джозефа Огуда Томпсона (Thompson [1891,1]), полученными на два года ранее, проложили путь для интенсивного изучения вопроса в течение последующих пятнадцати лет. С точки зрения абсолютного большинства данных главный вклад внес Карл Бах (Bach [1884,1], [1887,1], [1897,1]), который проводил эксперименты между 1884 и 1897 гг. и выполнил тысячи опытов в области малых деформаций, стараясь найти общую зависимость между напряжением и деформацией, могущую заменить закон Гука при малых деформациях. Бах имел в виду потребности техники

В отношении обобщения уравнения (2.29) интересно также обратить внимание на работы В. Прагера, выполненные между 1938 и 1942 гг. (Prager [1938, 1], [1941, 1], 1942, 1]).

2.24. Закон Баха — Шюле (1897): переоткрытие параболической функции отклика Якова Бернулли (1695) и Ходкинсона (1824)

Для всех твердых тел, которые наблюдал Бах, он обнаружил отклонение от линейности в зависимости напряжений от деформаций. Он утверждал, что закон Гука, образующий основу линейной теории упругости, верен только для меньшей части материалов, и притом только в определенных пределах. В 1897 г. на основании своих собственных экспериментов и анализа весьма тщательных экспериментов Дж. О. Томпсона Бах (Bach [1897,1]) заключил, что было бы весьма нереалистичным рассматривать линейность как общий закон. Это замечание стало исходным пунктом для его более исчерпывающего изучения упругого поведения. Он подчеркнул, что при очень тщательных испытаниях важные конструкционные материалы, например чугун и сталь, для которых обычно предполагается справедливость закона Гука, ведут себя не так, как предписывается этим законом.

Обширные эксперименты Баха на растяжение, сжатие, кручение и изгиб включали опыты с чугуном, медью, гранитом, чистым цементом, цементным раствором, бетоном, кожей и песчаником. По прошествии десяти лет экспериментирования он попросил своего бывшего студента доктора Вильгельма Шюле использовать результаты эксперимента для попытки установить общее нелинейное соотношение между напряжением и деформацией, пригодное для всех этих твердых тел, поскольку он полагал, что поиск такого нелинейного соотношения имел больше смысла, чем отыскание приближенного значения модуля упругости E. Довольно быстро Шюле, как и другие до него, переоткрыл параболический закон Бернулли [1]), предложенный в 1694 г.:

$$\varepsilon = \alpha\sigma^m, \tag{2.36}$$

в котором величины α и m различны для разных твердых тел. В табл. 24 даны величины α и m, полученные Шюле.

В конце статьи, описывающей его открытие, Бах (Bach [1897,1]) с большим энтузиазмом утверждает, что он нашел искомый закон упругости, относящийся к области малых напряжений, допускаемых в технике и, таким образом, установил достаточно прочный базис для более полного изучения. Опыты Баха проводились не только на растяжение и сжатие, учтенные Шюле, но также и на кручение и изгиб, и он выразил огорчение по поводу того, что, по общему мнению, общая нелинейная зависимость не была распространена на кручение и изгиб.

---

[1]) В конце XIX века стало обычным отсутствие ссылок на параболический закон Бернулли 1694 г., не говоря уже о наблюдениях Ходкинсона в 1824 г.

Таблица 24

Бах — Шюле (1897)

	$1/\alpha$	m
Чугун (сжатие)	1 381 700	1,0663
Чугун (растяжение)	1 132 700	1,395
Медь (растяжение)	2 084 000	1,093
Гранит I (сжатие)	249 540	1,13207
Гранит II (сжатие)	339 750	1,1089
Гранит III (растяжение)	234 600	1,374
Чистый цементный камень I (сжатие)	254 841	1,0903
Чистый цементный камень II (сжатие)	259 134	1,0950
Чистый цементный камень III (сжатие)	231 416	1,09282
Цементный раствор (сжатие)		
Состав: 1 часть цемента, 1,5 части песка *)	355 942	1,10984
1 часть цемента, 3 части песка *)	315 239	1,14732
1 часть цемента, 4,5 части песка *)	229 026	1,16871
Бетон		
Состав: 1:5:5 (цемент, песок *), гравий **))	297 820	1,14478
1:2,5:5 (цемент, песок ***), известняковый гравий)	456 910	1,15749
1:5:6 (цемент, песок *), гравий **))	279 981	1,13713
1:3:6 (цемент, песок *), известняковый гравий)	380 283	1,16075
1:5:10 (цемент, песок *), гравий **))	217 260	1,15662
1:5:10 (цемент, песок ***), известняковый гравий)	367 018	1,20677

*) Дунайский песок.
**) Дунайский гравий.
***) Эггингеровский песок.

Размерность величины $1/\alpha$ такая же, как и у напряжения в степени m. При этом для $1/\alpha$ в формуле (2.36) и в настоящей таблице используются те же единицы измерения, что и для σ. — *Прим. ред. перев.*

Энтузиазму Баха суждено было иметь недолгую жизнь. В конце того же 1897 г. Рудольф Мемке (Mehmke [1897,1]), как и Шюле, использовал данные Баха для малых деформаций, но рассмотрел несколько различных видов зависимости между напряжением и деформацией. Доказательство Мемке, что другие функции различного вида также могут давать хорошее соответствие с данными, еще раз указывает на внутреннюю опасность подгонки данных, полученных для единичных экспериментальных ситуаций, к определенным кривым. В своей работе Мемке приводит таблицы зависимости напряжения и деформации, отвечающие различным законам упругости для одноосного случая при инфинитезимальных дефор-

мациях, предложенным до 1897 г. На рис. 2.55 дано сравнение отмеченных различных зависимостей между напряжениями и деформациями с экспериментальными данными Баха [1]), выполненное Мемке. Нужно подчеркнуть, что данные Баха — это средние из сотен испытаний, начавшихся с его усилий определить модуль упругости для кожи в 1884 г.

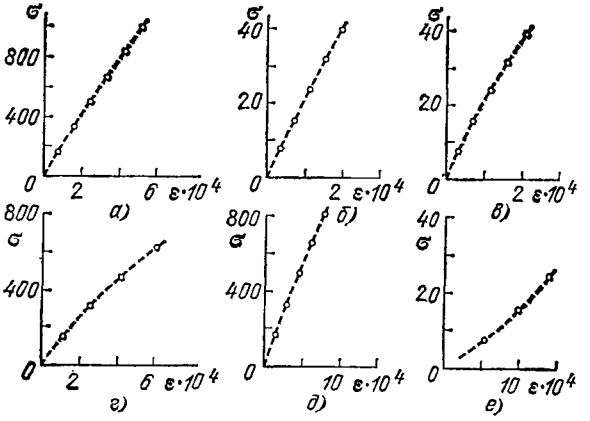


Рис. 2. 55. Экспериментальные данные Баха для различных твердых тел, сопоставленные Мемке с данными, полученными при помощи различных эмпирических соотношений. Расхождения столь незначительны, что их не представляется возможным изобразить в масштабе построения этих графиков. Испытывались: *а*) чугун (сжатие) $\left(\varepsilon=\frac{75\cdot600}{1\,381\,700}\sigma^{1,0663};\quad \varepsilon=0,04661\sigma+0,000004969\sigma^2;\ \varepsilon=\frac{0,04685\sigma}{1-0,0000918\sigma};\ \varepsilon=0,04385\sigma+0,00001343\sigma^2-0,000000005970\,\sigma^3\right)$; *б*) чистый цемент (сжатие) $\left(\varepsilon=\frac{75\cdot600}{259131}\sigma^{1,0950};\quad \varepsilon=\frac{1,6998}{8,0}\sigma+\frac{0,05136}{8,0^2}\sigma^2\right)$; *в*) бетон (сжатие $\left(\varepsilon=\frac{75\cdot600}{367\,018}\sigma^{1,20677};\quad \varepsilon=\frac{1,4415}{7,9}\sigma+\frac{0,1294}{7,9^2}\sigma^2\right)$; *г*) чугун (растяжение) $\left(\varepsilon=\frac{15\cdot1000}{1\,132\,700}\sigma^{1,295};\quad \varepsilon=0,01112\sigma+0,00001017\sigma^2\right)$; *д*) медь (растяжение) $\left(\varepsilon=\frac{10\cdot1000}{2\,084\,000}\sigma^{1,093};\quad \varepsilon=\frac{1,3537}{160,75}\sigma+\frac{0,0219}{160,75^2}\sigma^2\right)$; *е*) кожа (растяжение) $\left(\varepsilon=\frac{780,7}{415}\sigma^{0,7};\ \varepsilon=\frac{3,092}{3,88}\sigma-\frac{0,0954}{3,88^2}\sigma^2\right)$; σ — напряжение в кгс/см²; ε — деформация.

Рудольфа Мемке побудило заняться изучением данных Баха — Шюле его беспокойство по поводу того, что степенная зависимость (2.36) при всей ее «чарующей элегантности» (Mehmke [1897,1], стр. 321) приводила к трудностям при определении модуля упруго-

[1]) Пренебрегая ясной ссылкой самого Бюльфингера на Вариньона (Varignon [1702] (см. Труселл (Truesdell [1960, 1], стр. 102) и Бернулли (Bernoulli [1695, 1])), Мемке неправильно приписывает параболический закон Бюльфингеру (Bülffinger [1729, 1]) [1].

сти или тангенса угла наклона касательной к кривой при нулевом напряжении. Мемке принадлежит одна из наиболее сильных атак того времени на безоговорочное признание физиками линейного закона Гука. Эта попытка заинтересовать научный мир существенной нелинейностью металлов и других материалов напоминает аналогичные попытки Вика, сделанные на 65 лет ранее. Мемке подчеркнул, что закон Гука всегда подвергался сомнениям и что он был подтвержден только условно экспериментами нескольких физиков [1]), начиная с Вертгейма в 1848 г., что тем не менее существовала «угроза, что он обратится в догму и будет представляться как «самоочевидный закон» (Mehmke [1897,1], стр. 327).

«Мы наблюдаем здесь особый случай, когда физики на некоторое время мешали прогрессу восприятия истины и косвенным образом тормозили развитие важной ветви инженерного дела» (там же, стр. 328).

Обзор Мемке зависимостей напряжения от деформации, накопленных его предшественниками, приведенный в табл. 25, был опубликован с целью предостеречь инженеров и ученых от повторения старых и забытых исследований, и с явно выраженной надеждой, что этот обзор будет стимулировать изучение упругости без предположения о справедливости закона Гука.

В масштабе кривых, показанных на рис. 2.55, вычисленные значения для различных рассмотреиных эмпирических функций слишком близки для того, чтобы соответствующие им графики можно было различать. Но из таблиц в работе Мемке видно, что во всех указанных случаях степенной закон Бернулли — Бюльфингера —

---

[1]) Экспериментаторы, конечно, включают Фохта и Кельвина. Вертгейм приписывал обнаруженное им изменение модуля с развитием остаточных деформаций только изменению плотности; это предположение, как показал Грюнайзен, неверно, далее в разделе 2.25 будет приведено соответствующее обсуждение. Кельвин, как и Фохт, предпочитал иметь дело с линейностью для математической простоты. Кельвин пишет по поводу собственных данных о кручении:

«Результаты показывают, что отклонение от закона Гука, соответств ющее уменьшеиию жесткости при кручении, происходит примерно на 1,6% при подвешивании к проволоке груза в 112 фунтов. Из них 1,2% связаны с удлинением проволоки и уменьшением ее диаметра, 0,4% — с уменьшением модуля жесткости» (см. Кельвин (Kelvin [1878, 1], стр. 23)).

Тем не менее в той же статье Кельвин просто утверждает без доказательства, что линейность должна иметь место при инфинитезимальных деформациях. Кельиин пишет:

«Результат, к счастью для математиков и инженеров, таков, что закон Гука выполняется настолько точно, насколько это можно сказать на основании всех выполненных до сих пор экспериментов, для всех металлов и твердых тел во всей области в пределах их упругости, что же касается дерева, пробки, каучука, желе, то тогда, когда удлинение не превосходит двух или трех процентов или угол поворота (сечения при кручении стержня) не более нескольких сотых радиана (или не более двух или трех градусов)» (там же, стр. 9).

Кельвин затем добавил в скобках, что эксперименты, проведенные в его лаборатории его ассистентом МакФарланом, были выполнены после того, как предыдущая часть статьи была набрана. (Несомненно, обширные данные по нелинейностн с 1811 до 1878 гг. были ему доступны.)

Таблица 25

Мемке (1897)

1.	Линейный закон: $\varepsilon = a\sigma$	Гук (1678)
2.	Экспоненциальный закон: $\varepsilon = a\sigma^m$	Яков Бернулли (1694) *), Бюльфингер (растяжение; 1729), Ходкинсон (1822), Бах — Шюле (1897)
3.	Параболический закон: $\sigma = a\varepsilon - b\varepsilon^2$	Ходкинсон (чугун; 1849), Хартиг (чугун, чисто цементный камень, цементный раствор; 1893), Герстнер (рояльная струна; 1824) **)
4.	Гиперболический закон: A. $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{a - b\sigma}$ B. $\varepsilon^2 = a\sigma^2 + b\sigma$	Кокс (чугун; 1850), Лэнг (чугун, камни, раствор; 1896), Вертгейм (органические ткани; 1847)
5.	Кубический и четвертой степени параболический законы: A. $\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3$ $\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2 + \gamma\sigma^3$ B. $\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3 + d\varepsilon^4$	Кокс (чугун; 1850) Дж. О. Томпсон (металлы при растяжении; 1891) Ходкинсон (чугун; 1849)
6.	Экспоненциальный закон: A. $\sigma = ce^{-1/\varepsilon}$ B. $\varepsilon = e^{m\sigma} - 1$ C. $\sigma = c\,(e^{m\varepsilon} - 1)$ D. $\varepsilon = \sigma\,(a + be^{m\sigma})$ E. $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} e^{m\varepsilon}$	Риккати (1731) Эмбер (инднйская резина; 1880) Хартиг (растяжение кожи, сжатие обожженной красной глины; 1893) Понселе (растяжение латуни; 1839) Хартиг (сжатие пробки; 1893)

*) Напомним, что Мемке ошибочно приписывал экспоненциальное соотношение (2.1) Бюльфингеру (1729 г.).

**) Опущено Мемке; Мемке также упустил из виду соотношение (2.3) Дюпена (1811 г.).

Ходкинсона — Баха — Шюле дает наилучшую согласованность с экспериментом. Мемке отметил, что даже кубическая парабола с тремя константами не дает лучшего соответствия [1]). Только в слу-

[1]) Мемке (Mehmke [1897, 1]) указал, что после проведения этих расчетов он узнал о работе Хомершема Кокса, показавшего, что его гиперболическая зависи-

чае сжатия гранита (график не показан) степенной закон давал большее отличие от экспериментальных данных.

Важный вывод, отмеченный как Мемке, так и Бахом, состоял в том, что степенная зависимость между напряжением и деформацией описывала малые деформации таких несходных материалов, как медь, чисто цементный камень или кожа. Им казалось совершенно естественным считать, что это открытие было столь же фундаментальным, как открытие закона Гука более двухсот лет тому назад.

В конце XIX века устрашающие предсказания Баха, Мемке и других по поводу продолжавшегося использования линейной теории упругости в технике не смогли остановить тех, кто принимал участие в фантастическом росте огромного промышленного комплекса XX века, от использования линейного приближения в инженерных расчетах, соответствовавших малым деформациям. С точки зрения экспериментальной физики сплошной среды, однако, точно так же как и с позиций усилий по согласованию микроскопических и макроскопических концепций в терминах атомной физики, а, возможно, также и с точки зрения техники XXI века сохранение нелинейности вплоть до нулевого напряжения имеет немаловажное значение. Баху принадлежит, по-видимому, единственное изложение сопротивления материалов для инженеров, основанное на нелинейной зависимости между напряжением и деформацией. Его «Упругость и прочность» (Bach [1902,1]), выдержавшая шесть изданий между 1889 и 1911 гг., содержала большой раздел, основанный на его степенном законе [1]).

Никто из участников этой дискуссии конца столетия, по-видимому, не был настолько хорошо знаком с тонкостями механики сплошных сред для того, чтобы изучить далеко идущие следствия, вытекающие из принятия нелинейной зависимости между напряжением и деформацией при инфинитезимальных деформациях в области перехода от растяжения к сжатию через нулевую точку. Примерно в одно и то же время мы видим попытки Вильгельма Шюле (Schüle [1902,1]) обобщить степенной закон для изучения изгиба и Марселя Бриллюэна (Brillouin [1898,1]), пытающегося использовать герцевскую теорию контакта для доказательства того, что влияние захватов и соответствующее смещение точки приложения нагрузки может объяснить получающуюся нелинейность, т. е. что закон Гука только кажется нарушенным. Эти доводы Бриллюэна (там же), по-видимому, не заинтересовали никого, а эксперименты

мость дает лучшую согласованность с экспериментальными результатами Ходкинсона для железа, чем параболическая зависимость. По экспериментальным данным Б ха для того же твердого тела Мемке заметил, что гиперболический и параболнческий законы дают почти одно и то же. Мемке чувствовал, что это разлнчие данных Ходкинсона и Баха нуждается в разъяснении.

[1]) Этот раздел содержится в четвертом издании, вышедшем в 1902 г.

Грюнайзена (Grüneisen [1906,1]) [1]), проведенные восемью годами позднее, по существу, если даже не намеренно, покончили с ними.

Шюле предположил, что при изгибе плоские сечения остаются плоскими и что константы α и m в уравнении (2.36) различны для растяжения и сжатия, как на это указывали результаты опытов Баха. Он попытался вывести формулу для прогиба в середине пролета свободно опертой чугунной балки [2]. Сравнение, проведенное Шюле, показало близость полученного по этой формуле значения для прогиба в середине пролета, как функции нагрузки, к его экспериментальным данным, что заставило его поверить, что он сделал важный первый шаг к развитию удовлетворительно подтверждаемой экспериментом общей теории изгиба, базирующейся на том, что, как он должен был знать, представляло собой нелинейную зависимость напряжения от деформации, предложенную Яковом Бернулли в 1695 г.

Одним из физиков, определенно иной категории, чем Мемке, был Кольрауш, который, как может припомнить читатель, стимулировал исследования своего бывшего студента Джозефа Осгуда Томпсона в 1891 г. Отметив, что касательный модуль в случае закона Баха — Шюле при нулевом напряжении может быть либо нулем, либо бесконечностью, кроме случая $m=1$, Кольрауш провел в 1901 г. вместе с Грюнайзеном серию экспериментов с чугунными стержнями, имевшими ширину 20 мм, толщину 2 мм и длину 922 мм, нагруженными посередине изгибающими силами со значениями в пределах всего лишь от 0,1 до 50 гс, которые вызывали максимальные напряжения в пределах от 0,173 до 86,5 кгс/см^2. Они пришли к выводу, что для этого случая чрезвычайно малых деформаций чугуна наилучшей формулой, избегающей парадокса Баха — Шюле при нулевом напряжении, является

$$\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^{1,5}. \tag{2.37}$$

Эта статья Кольрауша и Грюнайзена (Kohlrausch und Grüneisen [1901,1]) устанавливает исторический факт, согласно которому Грюнайзен, произведший через 5 или 6 лет исчерпывающие эксперименты, с самого начала отдавал предпочтение нелинейной зависимости между напряжением и деформацией при малых деформациях [2]).

Шюле (Schüle [1902,1]) упорно отклонял все виды нелинейной зависимости напряжения от деформации, кроме собственной. Например, он отклонил зависимости, данные Томпсоном, Кольраушем и Грюнайзеном, и Хартигом единственно на основе скорее курьезного довода, что такие зависимости напряжения от деформации не

---

[1]) Эти эксперименты будут описаны далее в разделе 2.25.

[2]) В более поздней литературе Грюнайзену ошибочно приписывается окончательный отказ от озабоченности нелинейностью при малых деформациях, перешедшей от XIX века (см., например, Тимошенко (Timoshenko [1953, 1]).

могут быть включеиы обычным образом в теорию изгиба. С не слишком большим успехом Шюле пытался согласовать данные Кольрауша и Грюнайзена для очень малых деформаций со степенной формулой Баха — Шюле, допуская линейность вплоть до напряжений 0,1 кгс/мм². Соотношение, предложенное Кольраушем и Грюнайзеном, разумеется, приводило к конечному значению модуля при нулевом напряжении.

2.25. Эксперименты Грюнайзеиа (1906) с использоваиием интерферометра, установившие закон Хартига для инфинитезимальных деформаций металлов

В своих экспериментах 1906 и 1907 гг. Эдуард Август Грюнайзен (Grüneisen [1906,1], [1907,1]) произвел исчерпывающее и достигшее наиболее высокого уровня изучение нелинейиости в металлах при малых деформациях, успешно измеряя напряжения и деформации в пределах для последних от $1{,}7\cdot10^{-6}$ до $7\cdot10^{-6}$ с точностью до $2\cdot10^{-8}$. Этого он достиг с помощью использования интерференционных полос и посеребренных с одиой стороны параллельных плоских стеклянных пластинок, прикрепленных к стержию способом, показанным на рис. 2.56. Используя зеленую линию ртутной дуги 5461 Å и длину образца, равную примерно 16,5 см, он был в состоянии измерять деформацию в $1\cdot10^{-6}$ с указанной точностью в 1%, т. е. до $\varepsilon=10^{-8}$.

В первой серии экспериментов Грюнайзена с железом в 1906 г. образцы были предоставлены Бахом и были теми же самыми [1]), на которых Бах определял зависимость между напряжением и деформацией при деформациях в пределах примерно в 200 раз более широких, чем изучавшиеся Грюнайзеном. Главной целью Грюнайзена было сравнение предсказаний степенного закона Баха (2.36) при малых деформациях вблизи нулевого напряжения с формулой Хартига (2.26), которая, несомненно, была предпочтительнее, поскольку она давала угол наклона касательной к графику зависимости между напряжением и деформацией при нулевом значении напряжения $<\pi/2$.

Опуская увлекательные детали интерференционной техники Грюнайзена и его обсуждение изучения им упругого последействия, термического последействия и проблем, возникающих при встрече с требованием точного центрирования, мы видим в первой части столбцов 1 и 2 табл. 26, полученные им результаты для чугуна GK и чугуна A. Таблица содержит также данные Баха по напряжениям и деформациям в области высоких деформаций для тех же

[1]) Это сотрудничество, которое привело к, быть может, самому важному после опытов Р. Гука эксперименту при малых деформациях в кристаллических твердых телах и которое при окончательном анализе привело к отказу от предварительных гипотез обоих участников, должно быть отмечено теми, кто предлагал расширять установление экспериментальных связей на институтской основе.

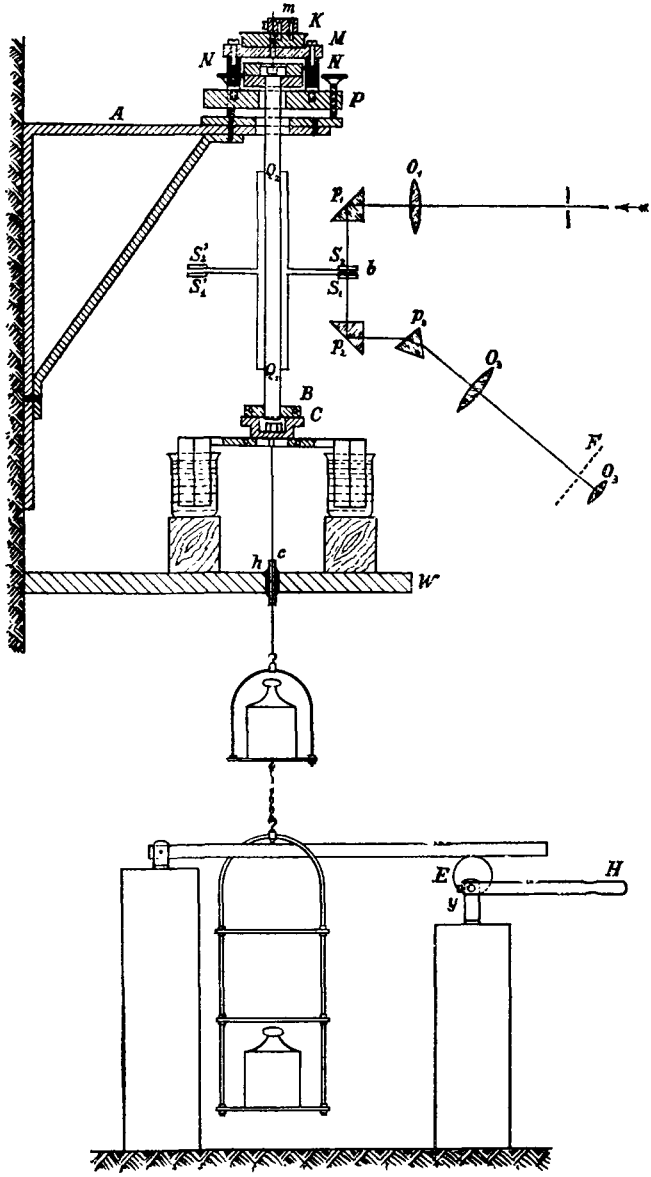


Рис. 2.56. Экспериментальная установка Грюнайзена, в которой для точного измерения осевой деформации использовалась оптическая интерференционная техника.

Таблица 26

Грюнайзеи (1906)

σ (кгс/см^2)	Наблюденная деформация $\Delta\varepsilon \cdot 10^6$	Вычисленная деформация (по формуле (2.27)) $\Delta\varepsilon \cdot 10^6$	Вычисленная деформация (по формуле (2.26)) $\Delta\varepsilon \cdot 10^6$	Наблюденное значение $\Delta E \cdot 10^{-3}$	Вычисленное значение $\Delta E \cdot 10^{-3}$
1	2	3	4	5	6
		Чугун GK			
Грюнайзен					
0	—	—	—	—	10 603
1,576	Начальное нагружение	—	—	—	10 588
3,457	1,79	1,78	0,09	—	10 571
5,332	3,56	3,55	0,22	10 540	10 554
7,215	5,33	5,34	0,39	(17,3° C)	10 536
9,042	7,09	7,08	0,58	—	10 520
Бах					
159,2	Начальное нагружение	—	—	—	9 133
—	—	—	—	7 500	—
477,7	425	421	425	—	6 193
—	—	—	—	4 610	—
796,2	1115	1 118	1 115	—	3 253
1114,6	(2077)	3 651	2 030	—	—
		Чугуи A			
Грюнайзен					
0	—	—	—	—	14 019
1,587	Начальное нагружение	—	—	—	14 011
4,049	1,84	1,76	0,32	13 290	13 999
6,467	3,68	3,49	0,72	(16,4° C)	13 986
8,893	5,50	5,22	1,18	—	13 974
Бах					
159,2	Начальное нагружение	—	—	—	13 215
—	—	—	—	12 740	—
477,7	250	257	239	—	11 607
—	—	—	—	10 520	—
796,2	553	553	551	—	9 998
—	—	—	—	9 150	—
1114,6	901	899	914	—	8 390
—	—	—	—	7 560	—
1433,1	1 322	1 321	1318	—	6 782
1751,6	1 862	1 857	1757	—	5 173

образцов. В третьем столбце Грюнайзен проводит сравнение с предсказаниями для малых деформаций, полученными из зависимости (2.27) между напряжениями и деформациями Дюпена—Герстнера—Ходкинсона — Хартига, а в столбце 4 приводит данные, полученные на основе степенного закона (2.36) Бернулли — Баха —Шюле для сравнения с экспериментальными данными для той же области малых деформаций.

На основе этих сравнений Грюнайзен отверг степенной закон Баха [1]), которому соответствует столбец 4. Что касается столбцов 2 и 3, важное значение с экспериментальной точки зрения имеет почти точное согласие, полученное для малых деформаций, с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций, данной Хартигом. В столбцах 5 и 6 Грюнайзен сравнивает полученные на основании экспериментальных данных значения касательного модуля со значениями, вычисленными по формуле Хартига (2.26) для этого модуля, причем вновь обнаруживается очень близкое соответствие.

В табл. 27 даны значения констант, использовавшихся Грюнайзеном.

Таблица 27

Грюнайзен (1906)

Чугун	$E_0 \cdot 10^{-2}$	b	$\frac{1}{\alpha} \cdot 10^{-2}$	m
GK	10 603	923	674 170	1,691
A	14 019	505	153 250	1,371

Странно что в более поздних литературных источниках часто приводятся ссылки на Грюнайзена такого содержания, как будто он не сделал ничего, кроме проверки справедливости закона Гука при достаточно малых деформациях [2]). На самом же деле он пола-

---

[1]) Точно так же была отвергнута без объяснений зависимость (2.37) Кольрауша — Грюнайзена для чугуна.

[2]) См., например, Тимошенко. История науки о сопротивлении материалов ([1953, 1], стр. 355—356), где он ограничивает обсуждение этого важного спора таким комментарием:

«Большая точность в определении модуля упругости была достигнута Е. Грюнайзеном (Grüneisen [Verhandl. Phys. Ges. Vol. 4, p. 469, 1906]) [1]. Используя интерференцию света для измерения малых удлинений, он показал, что такой материал, как чугун, точно следует закону Гука при малых напряжениях (ниже 140 фунт/дюйм^2 и что степенной закон $\varepsilon = \alpha\sigma^m$, предложенный Г. Б.Бюльфингером (G. B. Bülffinger [Comm. Acad. Petrop. Vol. 4, p. 164, 1729]) и Е. Ходкинсоном (E. Hodgkinson [Mem. Proc. Manchester Lit. Phil. Soc. Vol. 4, p. 225, 1824]) и широко использовавшийся К. Бахом (C. Bach [Abhandl. u. Ber. Stuttgart, 1897]) и В. Шюле (W. Schüle [Dinglers Polytechn. J. Vol. 317, p. 149, 1902]), совершенно неудовлетворителен при очень малых деформациях».

гал, что установил справедливость предложенной Хартигом нелинейной зависимости напряжения от деформации вплоть до нулевого напряжения [1]). Для деформаций между $1{,}7\cdot10^{-6}$ и $7\cdot10^{-6}$ отклонение зависимости Хартига от линейной меньше, чем предел точности интерференционной аппаратуры Грюнайзена [2]), соответствующий 1% от замеряемой деформации или деформации, равной 10^{-8}.

Здесь имеют большое значение два факта. Во-первых, то, что одна прогнозирующая зависимость напряжения от деформации, как было показано, может описать качественно и количественно связь напряжения и деформации от самых больших до самых малых деформаций в области, рассматриваемой как область малых деформаций, и, во-вторых, как будет показано ниже [3]), значение E_0, полученное экстраполяцией к нулевому напряжению, хорошо согласуется со значением динамического модуля, полученного из опытов с продольными колебаниями, сопровождавшимися деформациями того же порядка, а именно 10^{-6}.

Грюнайзен обнаружил, что при увеличении деформации сверх установленного им верхнего предела $\varepsilon=7\cdot10^{-6}$ интерференционные полосы начинали блуждать из-за неразделяемой комбинации упругого и термического последействий. Поэтому, как выдающийся экспериментатор, он ограничил свое исследование областью, в которой обе величины были пренебрежимо малы. Интересно, что в верхней части рассмотренной им области деформаций он нашел, что в зависимости от исследуемого образца значения комбинаций последействий иногда были заметными, а иногда пренебрежимо малыми; объяснения этому факту ему найти не удалось. Чтобы учитывать температуру окружающей среды, он выбрал металлические цилиндры, поддерживающие стеклянные пластинки, подчиняющимися условию, чтобы коэффициент теплового расширения был таким же, как и у изучаемого образца, имевшего такую же длину.

Интерференционная техника, которую Грюнайзен использовал для измерения коэффициентов теплового расширения, приводила к затруднениям при нулевой нагрузке. Чтобы преодолеть эту трудность он ввел небольшие начальные напряжения, равные 1,576 и 1,587 кгс/см^2 (см. табл. 26), которые давали начальные деформации порядка $1\cdot10^{-6}$. На рис. 2.57,*а* и 2.57,*б* показано сравнение предсказанного и действительного поведений при больших и малых

[1]) Грюнайзен изложил этот вывод в 1906 г. в статье о чугуне; в своей работе 1907 г. он сообщает, что распространил изучение малых деформаций на более чем 20 металлов, для которых он получил те же результаты.

[2]) Корню в 1869 г. был первым, использовавшим оптическую интерференцию для измерения параметров деформации, соответствующих напряжению. За Корню последовали Кантоне в 1888 г., а в 1899 г. Шекспир и Штраубель. Физо в 1864 г. и многие вслед за ним использовали интерференционную оптику для определения коэффициента теплового расширения твердых тел (Корню (Cornu [1869, 1]), Кантоне (Cantone [1881, 1]), Шекспир (Shakespeare [1899, 1]), Штраубель (Straubel [1899, 1])).

[3]) См. раздел 3.27.

деформациях, начиная с обозначенного начального напряжения. В своих вычислениях Грюнайзен учитывал смещение начала.

В статье, опубликованной в следующем году, Грюнайзен (Grun-eisen [1907,1]) распространил эти исследования малых деформаций на большое число металлов. Ему пришлось подчиниться необходимости измерять малые и большие деформации на разных образцах,

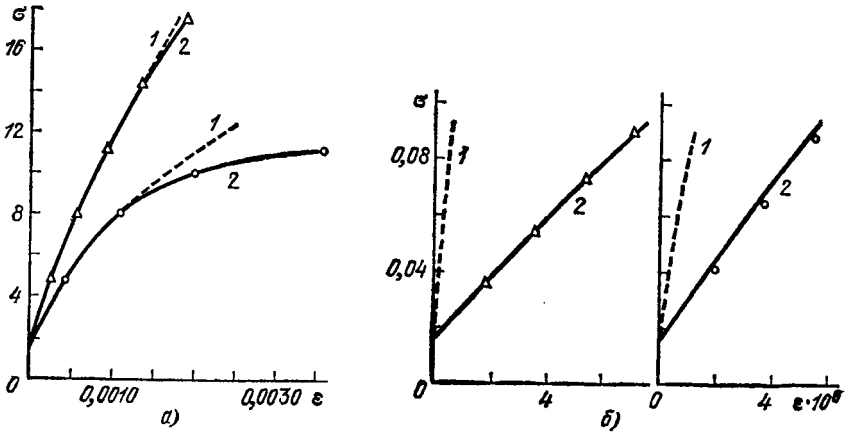


Рис. 2.57. Опыты Грюнайзена с чугунными образцами (1906). *а)* Хорошая согласованность экспериментальных данных с данными, получаемыми по формулам Бернулли—Баха ($\varepsilon=\alpha\sigma^m$) и Герстнера — Хартига ($\varepsilon=\frac{1}{b}\ln\left[\frac{E_0}{E_0-b\sigma}\right]$ при сравнительно больших деформациях; *б)* сравнение инфинитезимальных деформаций, экспериментально найденных Грюнайзеном, с определяемыми по двум приведенным выше формулам, показывающее хорошую согласованность экспериментальных данных с найденными по формуле Хартига. *1* — формула Бернулли—Баха, *2* — формула Герстнера—Хартига; кружками отмечены данные для чугуна GK, треугольниками — для чугуна A, σ — напряжение в кгс/см², ε — деформация.

в отличие от тех случаев, когда он имел возможность сравнивать малые и большие деформации для одних и тех же образцов, как это он делал в сотрудничестве с Бахом для чугуна. Используя именно формулу Хартига (2.26) для касательного модуля, Грюнайзен сравнил свои данные с данными Дж. О. Томпсона (Thompson [1891,1]), приведенными выше. Его результаты таковы:

$$\left.\begin{aligned} E&=10\,603-923\sigma && \text{GK 3 чугун}\\ E&=14\,019-506\sigma && \text{A 15 чугун}\\ E&=11\,732-184{,}7\sigma && \text{мягкая медь}\end{aligned}\right\}\ \text{К. Бах}$$

$$\left.\begin{aligned} E&=10\,576-29{,}829\sigma && \text{бронза}\\ E&=12\,920-23{,}665\sigma && \text{медь}\\ E&=8\,462-9{,}786\sigma && \text{серебро}\\ E&=19\,975-17{,}730\sigma && \text{сталь}\end{aligned}\right\}\ \text{Дж. О. Томпсон} \qquad (2.38)$$

Грюнайзен получил статические значения E_0, прилагая нагрузку в 1 кгс, производившую измеримые приращения деформации от

менее чем $1 \cdot 10^{-6}$ до примерно $3 \cdot 10^{-6}$. Эти значения E_0 можно сравнить со значениями постоянного члена в формулах (2.38); были получены значения: 10 540 кгс/см^2 для чугуна GK; 13 200 кгс/мм^2 для чугуна A; 12 500 кгс/мм^2 для меди; 8056 кгс/мм^2 для серебра и 21 320 кгс/мм^2 для стали. Таким образом, видно, что хотя предсказанные значения для модуля при нулевом напряжении были получены из данных Томпсона для образцов из тонкой проволоки длиной 27 м, в то время как образцы Грюнайзена имели длину около 16 см (и диаметр от 1 до 2 см), тем не менее обе группы данных согласуются с нелинейной зависимостью Хартига [1]) между напряжением и деформацией.

Грюнайзен также заинтересовался сравнением своих данных с полученными ранее Фохтом (Voigt [1893,1], см. также [1910,1]) и Кольраушем (Kohlrausch [1905,1], см. также Kohlrausch [1872,1]). Он заметил, что, вообще говоря, при весьма малых деформациях значения E, полученные этими экспериментаторами, были меньше, чем его собственные, более точно (аккуратно) найденные. Разности были больше, чем можно было ожидать, сравнивая касательный модуль при больших деформациях с тангенсом угла наклона касательной к кривой $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ к оси ε при нулевом напряжении. На самом деле, Грюнайзен указал, что данные Фохта отличались на бóльшую величину, чем та, которую можно было бы приписать различиям в уровне чистоты образцов и способам их изготовления. Он подчеркнул, что при очень точных опытах по определению значений модуля, малые вариации для отдельных образцов отражают влияние предыстории образца, термической и механической.

Так как границей его эксперимента была деформация, равная 10^{-8}, Грюнайзен был в состоянии рассматривать проблемы, связанные с определением деформации, до того их уровня, с которого начинает оказывать доминирующее влияние на данные, делая результаты невоспроизводимыми, наличие таких факторов, как микроскопическая пористость поверхности, окислы, малые неоднородности и небольшие отклонения в форме при механическом изготовлении образцов. Эти опыты будут обсуждены более подробно в следующей главе. Здесь мы отметим только, что в добавление к квазистатическим данным примерно для 20 металлов Грюнайзен получил также E из опытов с продольными колебаниями и поперечными колебаниями с учетом инерции поворота сечений, при которых величина динамических деформаций была тоже порядка от $1 \cdot 10^{-6}$ до $3 \cdot 10^{-6}$. Он обнаружил, что значение E, найденное в динамических опытах с продольными колебаниями стержня, точно совпадало со значением, полученным в квазистатических опытах, в то время как значения модуля, найденные из опытов с поперечными колебаниями, были почти всегда слегка больше. Эту разницу он приписал наличию мак-

[1]) Очевидно, представляло бы интерес повторить эти эксперименты на тех же самых образцах, подобно тому, как это было сделано для чугуна.

симальных напряжений при поперечных колебаниях, возникающих на поверхности; он полагал, что свойства материала на поверхности могут отличаться от свойств внутри твердого тела.

Факт невозможности обнаружения различия между адиабатическим и изотермическим значениями модуля даже при очень точных измерениях подобный факту невозможности обнаружить различие в случае сравнения значений модуля, найденных при продольных колебаниях и в условиях продольного квазистатического воздействия, не так удивителен, как может показаться. Как указал Грюнайзен, при отношении удельных теплоемкостей, столь близком к единице, как это имеет место для большинства металлов, экспериментальное обнаружение различия между адиабатическим и изотермическим модулями лежало на пределе возможностей его собственной, весьма точной, техники эксперимента. Цинк и кадмий, отличающиеся от других металлов тем, что обнаружение неодинаковости значений модулей представляется возможным, не годились для таких опытов по другим причинам [1]).

Несмотря на то, что нелинейность зависимости между напряжением и деформацией в кристаллических твердых телах при напряжениях, близких к нулю, имеет далеко идущие последствия как в отношении внутренней структуры твердого тела, так и в отношении явлений механики сплошной среды таких, как устойчивость и распространение волн; экспериментальное изучение такого нелинейного поведения подверглось практическому забвению после исчерпывающих работ Грюнайзена. При тщательном изучении литературы по экспериментальной физике сплошной среды, равно как в области металлофизики и металлургии, не удается обнаружить почти никаких ссылок на его работы даже тогда, когда появлялись, очевидно, изолированные переоткрытия нелинейности при малых деформациях. История разработок этого вопроса в XX веке должна была бы уделить внимание этому факту, чтобы понять, почему нелинейное поведение перестало привлекать к себе то внимание, которого, по-видимому, требовала его важность.

Большие неясности, связанные с нелинейными зависимостями между напряжением и деформацией при малых деформациях, отражены в комментариях Сирла (Searle [1908,1]) во введении к его монографии, изданной в 1908 г. и озаглавленной «*Экспериментальная упругость*».

«В пределах той области, где закон Гука удерживает свои позиции, мы можем говорнть о теле как об идеально упругом. При возрастании сил, действующих на тело, достигается более или менее определенный уровень напряжений, при котором закон Гука теряет силу. Когда закон Гука теряет силу, мы можем сказать, что предел упругости тела пройден» (там же, стр. 2).

---

[1]) В настоящее время цинк и кадмий изучаются как примеры неустойчивых твердых тел, подверженных изменениям модуля, исключительно чувствительных к малым вариациям в предшествовавших термической и механической историях и в методе испытаний. См. Белл (Bell [1968, 1]).

Предостережение Томлинсона, сделанное на 27 лет ранее, чем было установлено различие между «нарушением закона Гука» и «нарушением упругости», было бы все-таки уместно учесть в монографии, в которой много страниц посвящено обсуждению нелинейности *при инфинитезимальных деформациях* меди.

Эксперименты Сирла были основаны на бифилярном [2] методе измерений Кельвина. Проволока имела длину 285,7 см и площадь поперечного сечения — около 0,0119 см^2. Разница в удлинении двух одинаковых по длине проволок, имевших одинаковый уровень точек подвеса, была равна 0,001 мм, что позволяло измерять деформации с точностью до $3 \cdot 10^{-7}$. Сирл был в состоянии строить петли гистерезиса меди при растяжении. Чтобы представить на графике найденную нелинейность зависимости между напряжением и деформацией, Сирл рассматривал параметр

$$d = z - w\,(Z/W),$$

где Z было удлинением, вызванным сравнительно большой нагрузкой W, а z — удлинением от малой нагрузки w. В случае линейности величина d должна быть равна нулю при любом w. Два из полученных Сирлом циклов нагружения и разгрузки показаны на рис. 2.58, где $W=6$ кгс, $Z=0{,}1159$ см и $Z/W=0{,}01932$ см/кгс для первого цикла нагружения и разгрузки и $W=4$ кгс, $Z=0{,}0763$ см и $Z/W=0{,}01908$ см/кгс для второго цикла.

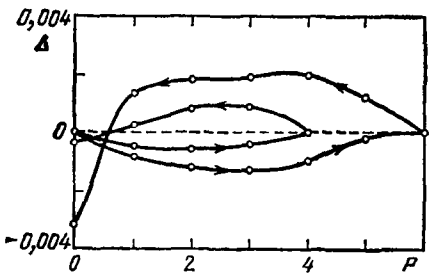


Рис. 2.58. Опыты Сирла (1908) с медной проволокой. Отклонение Δ от линейности зависимости σ — ε при растяжении (нагружение) и разгрузке в длинных медных проволоках. P — нагрузка в кгс, Δ — отклонение от линейности в см.

Циклическая нелинейность зависимости между напряжением и деформацией при малых деформациях меди демонстрирует еще раз отклонения от закона Гука в этих, с другой стороны, показывающих почти совершенную упругость очень точных измерениях.

Эксперименты Грюнайзена (Grüneisen [1906, 1], [1907, 1], [1908, 1], [1910, 1, 2, 3]) образуют водораздел между XIX и XX столетиями: в экспериментальной механике твердого тела произошло смещение интереса и смещение акцента. С тех пор и до настоящего времени почти все исследования модуля или вообще констант упругости, точные или нет, базировались на динамическом методе их определения, будь то опыты с продольными, поперечными или крутильными колебаниями или в последнее время опыты с распространением ультразвуковых волн. В экспериментах с колебаниями значения деформаций были обычно порядка 10^{-5}, в то время как в ультразвуковых экспериментах амплитуды пульсаций соответствовали деформациям порядка 10^{-7}.

Как показал Грюнайзен [1]), точность эксперимента для деформаций порядка от 10^{-6} до 10^{-5} должна быть более высокой чем 10^{-8}, чтобы обнаружить нелинейность в хорошо изготовленном поликристаллическом металлическом образце, в то время как в области деформаций от 10^{-5} до 10^{-4} точность должна быть порядка 10^{-7}. Мы видели, что выводы Грюнайзена о нелинейности при малых деформациях металлов, очевидно, вытекали из того, что он был в состоянии предсказать количественно значение модуля при напряжениях, близких к нулю, имея значение касательного модуля, найденное в области деформаций от 10^{-4} до 10^{-3}.

---

[1]) Если для одноосного напряжению-деформированного состояния нелинейная зависимость между напряжением и деформацией соответствует касательному модулю, который уменьшается по линейному закону с увеличением напряжения, что дает зависимость наподобие (2.26), предложенной Хартигом, то несложно, используя формулу (2.28), определить разницу в деформациях $\Delta\varepsilon$ при заданном напряжении, соответствующую нелинейной и линейной зависимостям между напряжением и деформацией, имеющим одинаковый касательный модуль при нулевом напряжении. Из этого соотношения $\Delta\varepsilon=(b/2)\varepsilon^2$ последняя величина может определить точность измерения, необходимую для обнаружения нелинейности в заданной области деформаций при принятом значении b. Экспериментальные значения для b лежат в пределах от примерно 10 для серебра до приблизительно 1000 для чугуна.

Таким образом, мы видим, что при $b=20$ необходима точность порядка 10^{-5}, если значение ε имеет порядок 10^{-3}, в то время как потребовалась бы для того же b точность 10^{-9}, чтобы обнаружить нелинейность в области значений ε порядка 10^{-5}. С другой стороны, для чугуна или бетона при значении b порядка 1000 нужна точность только 10^{-3}, чтобы обнаружить нелинейности в области $\varepsilon=10^{-3}$, или только точность 10^{-7}, чтобы обнаружить нелинейность в области $\varepsilon=10^{-5}$. Однако даже при таком относительно большом значении b потребовалась бы точность 10^{-9} для обнаружения нелинейности в области значений ε порядка 10^{-6}. Таблица, приводимая ниже, содержит области значений ε при принятых значениях b и соответствующие требуемые точности измерений $\Delta\varepsilon$.

Порядок значений наблюдаемой деформации ε	Требуемая точность измерений $\Delta\varepsilon$		
	$b=20$	$b=200$	$b=2000$
10^{-3}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
10^{-4}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}
10^{-5}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}
10^{-6}		10^{-10}	10^{-9}

Очевидна поэтому справедливость утверждений экспериментатора, что положение границы области, в которой соотношение между напряжением и деформацией линейно, зависело от доступной ему точности.

Вышеприведенная таблица, естественно, показывает пределы, справедливые для опытного экспериментатора, который успешно минимизировал все остальные трудности. Баушингер (Bauschinger [1886, 1]) был первым, кто заметил, что так называемый в технике «предел пропорциональности» уменьшается с увеличением точности измерения деформации, и, таким образом, является не параметром материала, а мерой разрешающей способности, обеспечиваемой техникой эксперимента.

Ввиду важности достаточной разрешающей способности деформаций для надежного обнаружения отклонений от линейного приближения, я включил табл. 28, которая дает оценки разрешающей способности удлинений, разрешающей способности деформаций и длины образцов для некоторых экспериментов, выполненных между 1811 и 1970 гг. (все они упомянуты в этой книге). Это были эксперименты, достижение цели которых зависело от получения заданной точности определения деформации.

Таблица 28

Год	Исследователь	Удлинеине (мм)	Длина образца (база измерений) (мм)	ε	Измерительный прибор
1811	Дюпен	0,2	2 000	$1 \cdot 10^{-4}$	
1830	Вика	0,01	63 500	$1{,}5 \cdot 10^{-7}$	
1844	Ходкинсон	0,0025	15 240	$1{,}6 \cdot 10^{-7}$	Микрометр
1844	Вертгейм	0,020	800	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$	Микроскоп-катетометр
1879	Баушингер	0,001	150	$6{,}6 \cdot 10^{-7}$	Оптическое зеркало
1881	Томлинсон	0,020	9 000	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$	Микрометр-катетометр
1891	Дж. О. Томпсон	0,005	27 000	$1{,}5 \cdot 10^{-7}$	Микроскоп-катетометр
1906	Грюнайзен	0,00000273	165	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$	Интерференционная оптика
1923	Такерман	0,000051	50	$1 \cdot 10^{-7}$	Оптическое зеркало
1930	Сэйр	0,0050	15 450	$3{,}2 \cdot 10^{-7}$	Микроскоп-катетометр
1935	Челмерс	0,00000273	30	$9 \cdot 10^{-8}$	Интерференционная оптика
1940	С. С. Смит	0,000050	50	$1 \cdot 10^{-6}$	Оптический датчик Такермана
1952	Миллер	0,000005	25,4	$2 \cdot 10^{-7}$	Оптический датчик Такермана
1956	Лауриент и Понд	—	3,2	$2{,}5 \cdot 10^{-8}$	Самокалибрирующий потенциометр с электрорезисторами
1970	Электрорезисторная тензометрия	—	3—25	от 10^{-7} до 10^{-8}	Промышленное оборудование

2.26. О некоторых примерах независимого переоткрытия в XX веке нелинейных явлений, впервые наблюдавшихся в XIX веке

Чрезвычайный упор в XX веке на динамически определяемые модули, которые соответствуют крайне малым амплитудам деформации, был не единственно ответствен за то, что после первой миро-

вой войны экспериментальные исследования XIX и начала XX века в области нелинейной механики были позабыты [1]). Среди инженеров-испытателей международное соглашение о форме и размерах образцов, типе машины и методе проведения испытаний привело к стандартизованным спецификациям материалов, определяемым потребностями технологии и, следовательно, ограниченным немногими конструкционными материалами. Большая информация была получена о свойствах немногих таких материалов, но относительно мало было изучено вопросов, связанных со свойствами неконструкционных материалов, которые с научной точки зрения являлись определенно более интересными.

Для квазистатических опытов фактором, наиболее ответственным за существенное изменение направления после 1920 г., был отказ от испытательных машин с нагружением мертвой нагрузкой, индивидуально изготовленных в лабораториях, в пользу промышленно изготавливаемых, стандартизованных «жестких» испытательных машин. Как я уже указывал в другом месте этой книги, «жесткие» испытательные машины, какова бы ни была их точность, сконструированы так, чтобы дать образцу предписанную историю деформирования. Измеряемая же величина — это история напряжений, испытываемых нагружаемым элементом, соответствующая предписанной информации — истории деформаций. При экспериментах с мертвой нагрузкой задается напряжение и производимая им измеряемая история деформаций описывает приспосабливание материала к приложенной нагрузке. Каждый, кто проводил оба типа испытаний и сравнивал их результаты, знает, что для многих твердых тел различия между этими результатами далеко не тривиальны и указывают на фундаментальные изменения в поведении материала.

Открытие дифракции рентгеновских лучей в начале XX столетия и его большое значение для изучения деформации монокристаллов дало начало многим новым интересным проблемам. Возможность анализировать кристаллографическую ориентацию и структуру в результате позволила рассматривать пластичность кристаллов в терминах несовершенств и дислокаций. С 1925 г. бóльшая часть литературы о больших деформациях кристаллических тел представляла макроскопические деформации как побочный факт при исследовании или как факт для подтверждения той или иной атомной модели при большом разнообразии параметров материалов, включая чистоту, размеры зерен, ориентацию, предшествовавшие испытанию термическую и механическую истории, диффузию и т. д. и т. п.

[1]) Эксперименты Джордано Рикатти, Кулона и Хладни в XVIII веке, а также Юнга и Бно в первой декаде XIX века ограничивались динамическими измерениями. Начиная с Дюло, во второй декаде XIX столетия квазистатические опыты с использованием мертвой нагрузки, проводившиеся в течение ста лет, дали начало многочисленным проблемам и подходам к проблемам. Внезапное и почти полное возвращение к динамическим методам определения модуля в XX веке демонстрирует связь между концепциями и модой в науке.

По какой бы то ни было причине, были ли это новые технические возможности, иные подходы или новые интересы, фактом легко различимым, если изучать литературу, вышедшую после первой мировой войны, является то, что все экспериментальные открытия XIX века в области нелинейной упругости были забыты в той же мере, в какой в конце XIX века существовало всеобщее согласие инженеров и ученых во мнении о том, что линейная характеристика недостаточна для описания малых деформаций твердых тел. Систематическое изучение технической и научной литературы прошедшего полустолетия, в области физики и механики твердого тела, позволяет обнаружить много экспериментаторов, которые, живя в атмосфере широкого использования линейности, тем не менее наблюдали нелинейные явления, не имея представления о том, что такая нелинейность ранее широко исследовалась. Когда я буду излагать работы некоторых из этих более поздних экспериментаторов, мне нужно будет отметить тот интересный факт, что их наблюдения, вообще говоря, выражались или в форме параболы Баха (Bach [1897, 1]), или закона Хартига (Hartig [1893, 1]), предложенных в девяностых годах прошлого столетия. Эти экспериментаторы не ссылались на зависимости ни Баха, ни Хартига, ни на более ранние формы тех же зависимостей, ни на экспериментальное противопоставление этих двух формул Грюнайзеном. Иллюстрирующие примеры, приведенные мною ниже в хронологическом порядке, это лишь немногие из примеров, составляющих список достаточно больших размеров; они демонстрируют напрасно потраченные усилия в науке, являющиеся платой за почти всеобщую привычку сосредоточиваться почти исключительно на исследованиях и модных интерпретациях собственного десятилетия.

2.26а. Закон для красок и лаков: Нельсон (1921).

Параболическая функция отклика, предложенная в 1694 г. Яковом Бернулли, как я уже показал, переоткрывалась снова и снова в течение прошедших 275 лет, и авторы этих переоткрытий претендовали на описание при ее помощи отклика для широкого разнообразия твердых тел, от кишок до чугуна и меди. В XX столетии независимое переоткрытие этого соотношения было сделано Харлеем А. Нельсоном (Nelson [1921, 1], [1923, 1,2]) в 1921 г. в сериях простых опытов на растяжение высохших пленок масел, красок и лаков. Для плоских образцов длиной 40 мм, шириной 10 мм и толщиной от 0,075 мм до 0,180 мм из различных красок функция отклика описывалась эмпирически формулой (2.39). Данные, на которых основывалось это принятие закона Бернулли

$$y = ax^n \tag{2.39}$$

для зависимости между удлинением и нагрузкой, пока аны в двойной логарифмической шкале на рис. 2.59.

Эти данные, как и полученные из экспериментов Вертгейма, Вундта и Фолькмана с тканями организмов, относятся, возможно, скорее к последующей главе о больших деформациях. Однако здесь

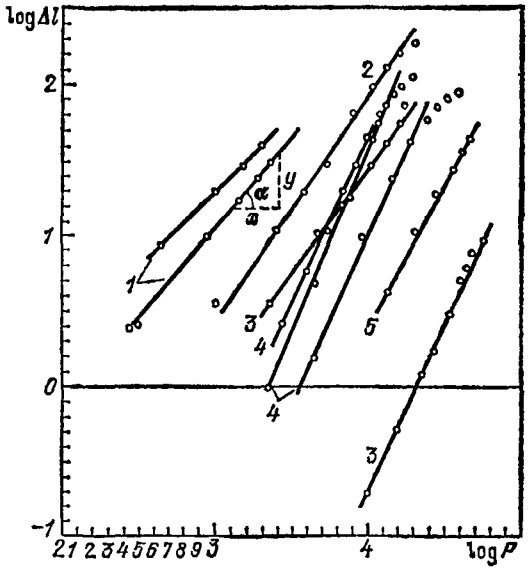


Рис. 2.59. Опыты Нельсона (1921). Графики результатов испытаний резины и красок в логарифмической системе координат, показывающие их согласованность с результатами, полученными по экспоненциальной формуле Ходкинсона и Баха, описывающей зависимость между напряжениями и деформациями при различных значениях параметров. *1* — льняное масло, *2* — резина, *3* — краска, *4* — лак, *5* — эмаль.

мы должны обратить внимание на вывод Нельсона о том, что в данном случае не только нет никаких подтверждений наличия измеримого предела упругости, но нет уверенности в существовании (такое весьма маловероятно) какого бы то ни было малого участка линейности, т. е. участка, где справедлив закон Гука. Значения n и a для рассмотренных масел, красок, лаков и эмалей даны в табл. 29.

Таблица 29

Нельсон (1921)

Номер опыта	Материал	n	a
	Резина		
1	Лак	1,6	0,000040
2	Лак	2,5	0,0000000048
3	Лак для внутренних работ	2,4	0,0000000031
4	Краска	2,2	0,000000083
5	Краска (высокооксидная)	1,5	0,000032
6	Эмаль	2,2	0,00000000038
7	Котельное полимеризованное масло	1,8	0,00000023
8	Котельное полимеризованное масло	1,0	0,0218
9		1,2	0,0032

2.26б. Нелинейный закон Сэйра для малых деформаций стали (1930).

Переоткрытие закона Хартига (Hartig [1893, 1]) было сделано Мортимером Фримэном Сэйром (Sayre [1930, 1]), который добавил свое имя к длинному списку сооткрывателей, включающему Дюпена (Dupin [1811], опубликовано в 1815 г.), Герстнера (Gerstner (1824), [1831, 1]), Ходкинсона (Hodgkinson [1824, 1], [1839, 1], [1843, 1], [1844, 1]). Сэйр также использовал тот самый эксперимент, который был введен Кельвином (Kelvin [1865, 1]) в 1865 г. и позже использовался в течение последующих трех десятилетий Томлинсоном (Tomlinson [1881, опубликовано в 1883, 1]), Страдлингом (Stradling [1890, 1]), Дж. О. Томпсоном (Thompson [1891, 1]) и Сирлем (Searle [1900, 1], [1908, 1]) среди прочих.

Сэйр, профессор в Юнион колледже, Буффало, Нью Йорк, применял два способа испытаний на растяжение. Первый с зеркальным экстензометром, который был разработан им самим и позволял измерять удлинения с точностью $2 \cdot 10^{-6}$; этот тензометр он использовал на сравнительно коротких образцах. Во второй серии экспериментов с длинными проволоками он смог получить разрешающую способность для удлинения, равную лишь 0,005 мм с помощью микрометрического микроскопа, но так как он использовал образцы длиной 15,75 м, разрешающая способность при определении деформаций, которая-то и является существенной, равнялась 10^{-7}. Эта разрешающая способность меньше, чем в интерференционных экспериментах Грюнайзена (Grüneisen [1907, 1]) с образцами длиной 16 см. Эксперименты Сэйра, на которые он ссылался при устном обсуждении статьи Сирила Стенли Смита в 1940 г. как на «предмет, который был моим хобби в течение нескольких лет» [1]), проводились со стальными и алюминиевыми проволоками.

Сэйр, не ссылаясь на работы Кельвина [2]), повторил эксперименты Кельвина, сделанные в 1865 г. с двумя проволоками в закрытой башне. Одна проволока была образцом, а вторая использовалась для температурной компенсации методом, предложенным Кельвином. Проволоки из алюминия и термически обработанной углеродистой стали (C=0,78%), использованные Сэйром, имели длину несколько менее 16 м. Он поместил как образец, так и проволоку для контроля температуры в вертикально расположенную трубу лаборатории колледжа, имевшую диаметр 5 футов и высоту 50 футов. Используя катетометр с микрометрическим микроскопом, имевшим деления шкалы по 0,005 мм, он мог определять деформации того же порядка, что и Дж. О. Томпсон, т. е. $\varepsilon = 10^{-7}$.

---

[1]) См. Смит (Smith [1940, 1], стр. 874). Вероятно, к 1940 г. такой подход был типичным для общепринятого взгляда на проблему нелинейности в металлах при малых деформациях.

[2]) Сэйр не ссылался ни на одного из своих предшественников в XIX веке. Создается впечатление, что он считал проведенные им такие эксперименты оригинальными.

Основной результат исследований Сэйра состоял в том, что если деформации измерялись с достаточной разрешающей способностью, то касательный модуль углеродистой стали, никелевой стали, алюминиевого сплава и холоднокатаной фосфористой бронзы линейно убывал с возрастанием напряжения, т. е. подчинялся закону Хартига. Результаты из первой серии экспериментов с короткими образцами даются в табл. 30 для указанных там твердых тел.

Таблица 30

Сэйр (1930)

Номер образца	Материал	Температура °C	Температура °F	Модуль упругости (фунт/дюйм²) *)
481	Проволока из углеродистой горячеобработанной стали (0,67% углерода; диаметр 0,0281 дюйма)	16,8	62,6	30 040 000—6,6 S **)
479	Проволока из углеродистой горячеобработанной стали (0,67% углерода; диаметр 0,0465 дюйма)	20,7	69,8	30 160 000—6,5 S **)
111	Проволока из углеродистой горячеобработанной стали (0,68% углерода; диаметр от 1/8 до 1/2 дюйма)	24,4	76	29 700 000—7,7 S
112	Проволока из углеродистой горячеобработаниой стали (0,68% углерода; диаметр от 1/8 до 1/2 дюйма)	24,4	76	30 100 000—6,8 S
113	Проволока из углеродистой горячеобработанной стали (0,68% углерода; диаметр от 1/8 до 1/2 дюйма)	24,4	76	29 500 000—8,3 S
530, 538	Никелевая сталь (3,5% никеля; диаметр 1/2 дюйма)	25,6	78	29 140 000—4,3 S
476	Никелевая сталь (3,5% никеля; диаметр 1/2 дюйма)	22,8	73	28 930 000—10,9 S
306	Пружинная закаленная фосфористая бронза (диаметр от 1/8 до 1/2 дюйма)	22,2	72	14 680 000—10,8 S
483	Проволока из алюминиевого сплава 17 SRT (диаметр 0,065 дюйма)	22,5	72,5	10 280 000—10,9 S **)

*) S — единица растягивающих напряжений (фунт/дюйм²).
**) Эти данные, полученные при нагружении мертвой нагрузкой длинных образцов, несколько более достоверны, чем все остальные.

В гораздо более точных опытах, в которых использовался метод Кельвина с двумя проволоками, Сэйр получил результаты для углеродистой стали и алюминиевого сплава, изображенные на рис. 2.60. Можно видеть, что касательный модуль на самом деле линейно убывает с возрастанием напряжения в испытаниях на простое растяжение.

Сэйр сделал одно наблюдение, которое не было рассмотрено в более ранних исследованиях, а именно, что это линейное убывание касательного модуля в испытаниях на растяжение не зависит от

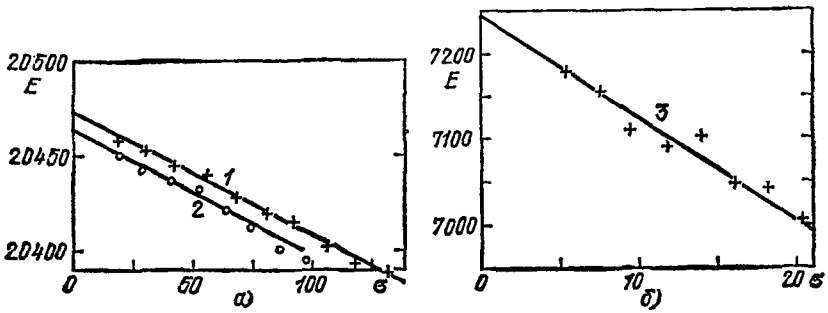


Рис. 2.60. Опыты Сэйра (1930). Сравнение данных испытаний стальной и алюминиевой проволок с данными, полученными по формуле Хартига. Наблюдается высокая степень согласованности этих данных. *а*) Горячекатанная стальная (углеродистая) проволока (0,67% углерода); *1* — образец № 479 (17°С), *2* — образец № 481 (20°С); *б*) проволока из алюминиевого сплава 17 SRT, *3* — образец № 483, σ — напряжение в кгс/мм², *E* — модуль упругости в кгс/мм².

уровня предварительного напряжения. Результаты, полученные им для фосфористой бронзы, показаны на рис. 2.61.

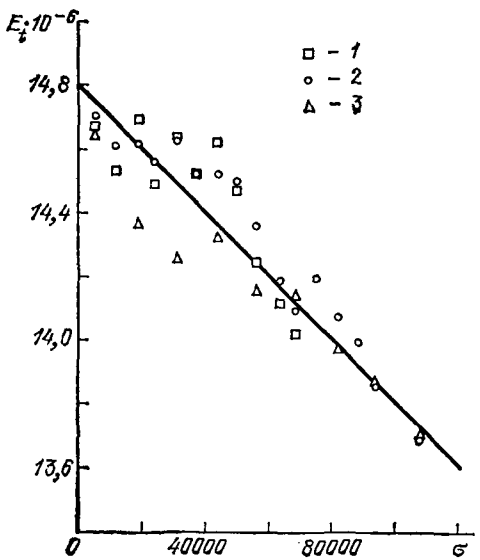


Рис. 2.61. Опыты Сэйра (1930) с фосфористой бронзой. Сравнение уменьшения касательного модуля при увеличении напряжений, наблюдаемого в эксперименте, с предсказываемым на основе формулы Хартига. Результаты для непреднапряженного образца и для образцов преднапряженных до разного уровня напряжений оказались близкими. *1* — данные для ненапрягаемых образцов, *2* — для образцов, предварительно напряженных до напряжения 75600 фунт/дюйм² и *3* — до 107100 фунт/дюйм², σ — напряжение в фуит/дюйм², *E* — модуль упругости в фуит/дюйм², *1* — линия, уравнение которой $E = 14{,}8 \cdot 10^6 - 10\sigma$.

Используя свою аппаратуру, Сэйр установил, что в процессе этих испытаний имелась пренебрежимо малая остаточная деформация. Он также описал довольно детально наличие петли гистерезиса, наблюдение которой стало возможно благодаря его точным измерениям. Докладывая об этих наблюдениях, включая также те,

которые обнаружили наличие пренебрежимо малой остаточной деформации при циклической нагрузке, он был, по-видимому, совершенно незнаком с относящейся к XIX столетию длинной историей исследования упругого последействия [1]), открытого Вебером в 1831 г.

Очень важным моментом является то, что Сэйр рассматривал нелинейную зависимость не только для напряжения Пиолы — Кирхгофа (условного или номинального, или технического напряжения), но также для напряжения Коши («истинного» напряжения). Нелинейность в обоих случаях опровергает высказываемое часто вскользь спорное положение, что нелинейность, появляющаяся при малых деформациях, может быть исключена введением небольшой поправки на поперечную деформацию образца.

2.26в. Нелинейность, обнаруженная в экспериментах по растяжению сплавов меди: Смит (1940—1948).

В 1940 г., используя оптический «рычаг», известный как оптический экстензометр Такермана, созданный несколькими годами ранее, Сирил Стенли Смит (Smith [1940, 1]) на двухдюймовых образцах из поликристаллических медных сплавов, позволявших получить разрешающую способность по деформациям до $1 \cdot 10^{-6}$, вновь изучал нелинейность при малых деформациях. Смит изучал отклонение от линейности как функцию напряжения.

Смит использовал стандартную испытательную машину и нагрузки, прокалиброванные с помощью кольцевых динамометров, точность которых достигла 0,1%, что позволило ему дать оценку, согласно которой погрешности в нагрузке были несущественны вплоть до того, как было достигнуто напряжение в 35 000 фунт/дюйм [2]. Проводя прямую линию как касательную к диаграмме зависимости между напряжением и деформацией в начальной (нулевой) точке, Смит затем регистрировал отклонения в значениях касательного модуля от значения, соответствующего указанной прямой, имевшие место при различных уровнях предварительно заданных деформаций в сериях экспериментов с бронзой 70—30 α. Эти отклонения от первоначально принятого модуля показаны на рис. 2.62 для образца, отжигавшегося в течение 2 часов при 400°C, в результате чего были получены зерна размером 0,008 мм.

Можно заметить, что при заданном значении разрешающей способности по деформациям, равном $4 \cdot 10^{-6}$, отклонения от нелинейности незаметны до достижения некоторого уровня напряжения, который изменяется в зависимости от уровня остаточной деформации.

---

[1]) Другим указанием на относительно малый интерес, проявляемый к вопросу о нелинейности при малых деформациях, может служить то, что в большом томе «*Proceedings... of the American Society for Testing and Materials*» (Известия... Американского общества испытаний и металлов, см. Сэйр (Sayre [1930, 1]) работа Сэйра одна из очень немногих, которые не сопровождались ни письменным, ни устным обсуждением.

Если такое поведение определяется только касательным модулем по Хартигу, то, объединяя характеристику, задаваемую соотношением (2.28), с формулой $\Delta\varepsilon = (b/2)\varepsilon^2$, нетрудно определить не только значение b для состояния, соответствующего наблюдавшейся точке начала отклонения от линейности, но и форму кривой отклонения за этой точкой. Как можно видеть для начальной кривой, показанной на рис. 2.62, значение остаточной деформации таково, что имеет смысл рассматривать только первые разности. Я добавил на рис. 2.62 крестики, соответствующие первым разностям, высчиленным при подстановке в формулу Хартига (2.28) величины b, найденной экспериментально.

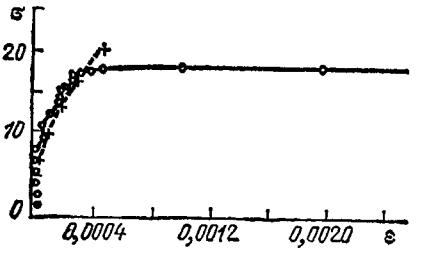


Рис. 2.62. Опыты Смита (1940). Наблюдение отклонений от начальных значений модулей в опытах на растяжение образцов из латуни марки 70=30α. Крестики, соответствующие формуле Хартига, добавлены на рисунке автором настоящей книги. Предварительная остаточная деформация в опыте составляла 0,006. σ — напряжение в кгс/мм², ε — деформация.

Среди тех, кто сделал замечания во время устного обсуждения статьи Смита, был Сэйр (см. Smith [1940, 1], стр. 874), который подчеркнул, что в его собственных экспериментах (описанных выше) только тогда, когда он дошел до разрешающей способности для деформаций на порядок выше, чем наблюдавшаяся Смитом, явления нелинейности стали ясно заметными. Луи Брайант Такерман (см. там же, Smith, стр. 875) также высказал несколько интересных мыслей в отношении ограничений и преимуществ его оптического экстензометра и, наконец, Артур Роланд Андерсон (там же Smith, стр. 877) сделал ряд длинных замечаний, которые достаточно курьёзно и широко цитировались в позднейшей литературе как якобы указывающие на то, что Андерсен был первым, распознавшим что напряжения по Пиола—Кирхгофу и Коши приводили к несколько различным нелинейным зависимостям.

В следующем году Смит и ван Вагнер (Smith and van Wagner [1941, 1]) распространили эти эксперименты на большое число различных медных сплавов. Поскольку рассматривалось нелинейное отклонение от линейного изменения модуля функции отклика, они получили те же результаты, что и в предыдущих экспериментах Смита. В этих двух работах Смит получил экспериментальное подтверждение того, что нелинейная функция отклика для медных сплавов согласуется с предложенной на четыре десятилетия ранее Хартигом, хотя Смит не сравнивал свои результаты с результатами Хартига. Он рассматривал этот аспект исследований, опубликованных в указанных двух статьях: Смит (Smith [1940, 1]), Смит и ван Вагнер (Smith and van Wagner [1941, 1]), как менее существенный по сравнению с другими соображениями, касающимися металлургического

аспекта, что становится ясным из цитаты из последнего параграфа статьи Смита и ван Вагнера:

«Инженера нужно предостеречь по поводу оценки значимости точных испытаний, описываемых здесь. Незначительное отклонение от закона Гука не имеет практического значения и не имеет отношения к возможным напряжениям в рабочем состоянии. Малые отклонения от линейной зависимости редко сопровождаются эквивалентными остаточными деформациями». (Там же, стр. 845.)

Из приведенной цитаты мы видим (в деталях это становится ясным при рассмотрении других статей, на которые здесь делались ссылки), что наблюдавшаяся нелинейность происходила не в связи с наличием значительных пластических деформаций, т. е. что эти эксперименты относятся к нелинейной упругости.

2.26 г. Исчерпывающее изучение одного из твердых тел в опытах с образцами, подверженными элементарным деформациям: анализ малых деформаций бериллиевой меди, выполненный Ричардсом (1952). Несмотря на весьма очевидную истину, что широкое обобщение в физической теории должно сочетаться в конце концов со столь же широким обобщением известных физических фактов, большинство экспериментов в физике проводятся как изолированные исследования с целью проверки какой-нибудь частной детали популярной в данный момент гипотезы. Однако несколько человек за прошедшие полтора столетия выполнили критические исторические обзоры экспериментально определенных модулей, имея в виду глобальные цели [1]). По поводу опытов по нелинейности при малых деформациях Джон Т. Ричардс (John T. Richards [1952, 1]) написал одну из самых важных работ XIX и XX веков. Он не описывал каких-либо собственных экспериментов, но был единственным, кто дал обзор, анализируя результаты большого количества разнообразных динамических и квазистатических опытов по определению E, μ и ν, проделанных в лабораториях, выбранных им в разных странах, на образцах, изготовленных из одного и того же материала, материала, который он сам приготовил и предоставил лабораториям.

---

[1]) Существуют обширные таблицы данных такие, как таблицы Лаидольт-Бёрнштейна (см., например, Хирмон (Hearmon [1966, 1])), Партингтон (Partington [1952, 1]) и др. Критические обзоры больших выборок из данных более редки, хотя они тоже имеются. Примеры можно найти в работах Понселе (Poncelet [1841, 1]) для модулей; в Приложении, добавленном Сен-Венаном к новому изданию трактата Навье 1833 года (Navier [1851, 1]; [1864, 1]) в обзорах исследований предшественников, дававшихся почти во всех работах Вертгейма (Wertheim [1842, . . ., 1860]) в сборниках численных значений, составленных Анвином и Эвереттом, издававшихся между 1867 и 1890 гг. и содержавших, правда, значительно меньше критического анализа; и ближе к нашему времени, в моем собственном обзоре по модулям для изотропных тел и функциям отклика при конечных деформациях в монокристаллах и поликристаллах Белл (Bell [1968, 1]). Ричардс ссылается на сделанный им обзор опытов с медью, выполненных между 1829 и 1949 гг., который я не смог найти [1]. Мы увидим свидетельство наличия у Ричардса интереса к опытам XIX века в области механики, когда я буду обсуждать работу Кирхгофа (Kirchhoff [1850, 1], [1859, 1]) (см. ниже раздел 3.20).

Все испытания были проведены на стержнях из бериллиевой бронзы, содержащей 1,85% бериллия. Образцы первой группы, обозначенной $^1/_2H$, были холоднотянутыми; образцы второй, обозначенные $^1/_2HT$, были упрочнены при помощи осадки. Каждая

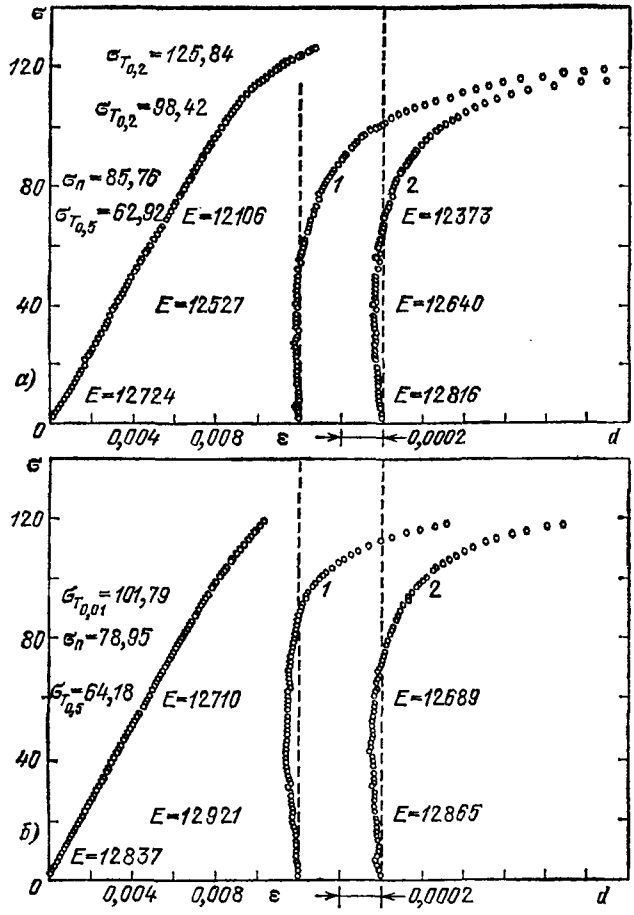


Рис. 2.63. Зависимости между напряжениями и деформациями при растяжении (*а*) и сжатии (*б*), наблюдавшиеся Миллером и полученные при помощи экстензометра Такермана. Показаны также вычисленные Ричардсом (1952) отклонения (*d*) как условных (*1*), так и истинных (*2*) напряжений от значений, соответствующих линейной зависимости σ—ε, подтверждающие то, что изменение размеров поперечного сечения образца не является причиной наблюдаемой нелинейности, $\sigma_{T_{0,2}}$ — условный предел текучести, соответствующий ε=0,2, $\sigma_{T_{0,5}}$ — условный предел текучести, соответствующий ε=0,5, $\sigma_п$ — предел пропорциональности, E — модуль упругости, ε — деформация в %, σ и E в кгс/мм².

группа была разделена на три партии в соответствии с диаметром: первую, обозначенную H (диаметр 0,091 дюйма); вторую — J (диаметр 0,219 дюйма) и третью — K (диаметр 0,560 дюйма). В статье

Ричардса перечисляются в деталях состав и свойства трех партий каждой группы. Он послал образцы каждого типа в сотрудничавшие с ним лаборатории Европы и США и потребовал, чтобы каждая лаборатория определила модуль, использовав свою наиболее точную аппаратуру. Ричардс затем собрал, объединил в таблицы и проанализировал это большое количество разнообразных данных, которые все были получены на образцах, изготовленных из предположительно одинакового материала.

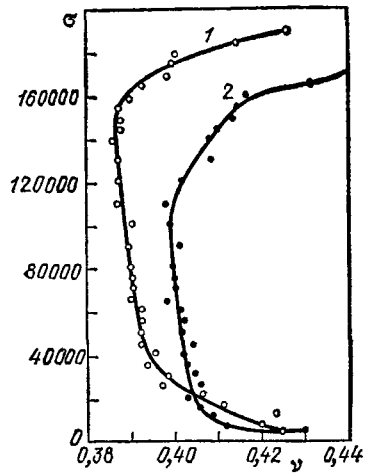


Рис. 2.64. Исследование Ричардса (1952). Изменение коэффициента Пуассона ν для бериллиевой меди при растяжении (светлые кружки) и сжатии (темные кружки) с ростом напряжений (σ — в фунт/дюйм²), найденное Ричардсом по опытным данным Мулленбруха, *1* — растяжение, *2* — сжатие.

Кроме большого рассеивания данных, полученных из разных лабораторий, которое для некоторых данных, как подчеркнул Ричардс, может быть отнесено на счет необходимости возведения в квадрат или в куб геометрических размеров, чтобы интерпретировать данные как постоянные упругости, имелось довольно много интересных моментов как в отношении сравнения техники эксперимента, так и в отношении поведения материала. С центральной для данной главы точки зрения наиболее важной тенденцией в поведении материала является нелинейность зависимости напряжения от деформации при малых деформациях для такого металлического твердого тела, как бериллиевая бронза. Последующее обсуждение будет ограничиваться этим аспектом анализа, данного в работе Ричардса.

Два из рассмотренных Ричардсом экспериментов были проведены на растяжение и сжатие стержня из бериллиевой бронзы из партии *K*, ½ *HT* Дж. А. Миллером (см. Richards [1952, 1], стр. 74—75) из национального Бюро Стандартов США, использовавшим оптический экстензометр на образце длиной 2,54 см, что давало разрешающую способность по деформации до $2 \cdot 10^{-6}$. Эти данные, изображенные на рис. 2.63, сопровождаются диаграммами, показывающими отклонение от линейности как для номинального напряжения, так и для напряжения Коши, или так называемого «истинного» напряжения, на основе вычислений Андерсона (см. Smith [1940, 1]) в его обсуждении работы Смита 1940 г.

Можно видеть, что ни зависимость между номинальным напряжением и деформацией, ни зависимость межлу «истинным» напряжением и деформацией не являются линейными ни при растяжении, ни при сжатии. Вычисление напряжений Коши для одномерных

испытаний требует знания коэффициента Пуассона. Ричардс описывает эксперименты Карла В. Муленбруха (см. Richards [1952, 1], стр. 73) из Северозападного университета в Эванстоне, Иллинойс, также полученные для партии K, $^1/_2$ HT бериллиевой бронзы, проведенные с использованием спаренных датчиков электрического сопротивления (электротензометрия). Эти данные для растяжения

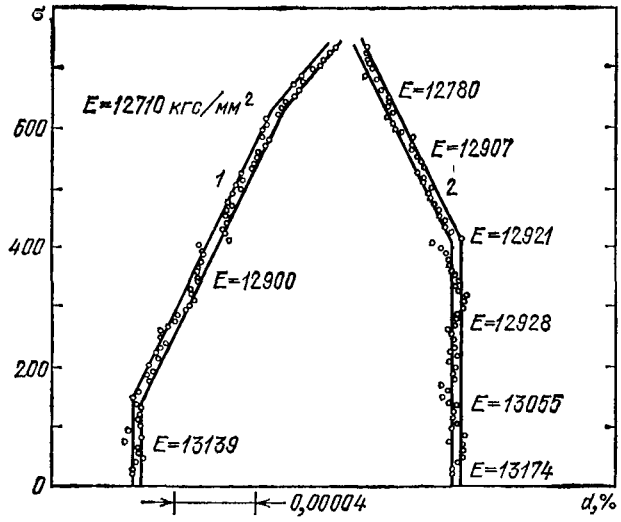


Рис. 2.65. Анализ опытных данных Миллера, выполненный Ричардсом (1952), показывающий уменьшение модулей с ростом растягивающих напряжений. Результаты испытаний бериллиевой меди на растяжение обрабатывались методом наименьших квадратов как при линейной аппроксимации (*1*), так и при аппроксимации квадратной параболой (*2*). d — отклонения деформаций от значений, соответствующих линейной зависимости σ—ε, выраженные в %, σ — напряжение в кгс/мм², E — модуль упругости в кгс/мм².

и сжатия (приведенные на рис. 2.64) показывают некоторое изменение в значении коэффициента Пуассона при возрастании напряжения.

Миллер (см. Richards [1952, 1], стр. 76) также проводил эксперименты с образцами из бериллиевой бронзы из партии J, $^1/_2$ HT, для которых Ричардс привел отклонения от закона Гука, отсчитанные от прямой, полученной по методу наименьших квадратов, а также на основе квадратной параболы, полученной тем же способом. Из этих вычислений (результаты см. рис. 2.65) можно видеть, что для напряжения в 60 000 фунт/дюйм² данные, характеризующие зависимость между напряжениями и деформациями, согласуются с квадратной параболой гораздо лучше, чем с прямой, соответствующей закону Гука.

Эксперименты на растяжение и сжатие стержней из бериллиевой бронзы с определением деформации при помощи датчиков электротензометрии (тензорезисторы) для партии K, $^1/_2$ HT, подобные тем,

результаты которых показаны на рис. 2.63, были проведены Муленбрухом (см. Richards [1952, 1], стр. 73). Его данные изображены на рис. 2.66, где *a* обозначает сжатие, *b* — растяжение, *c* — отклонение напряжений от линейного закона при сжатии, *d* — отклонение напряжений от линейного закона при растяжении.

Муленбрук получил также данные для отклонений от линейного закона зависимостей нагрузки при изгибе от перемещения и крутящего момента при кручении от угла закручивания. Последняя зависимость показала незначительное отклонение от линейности, чего

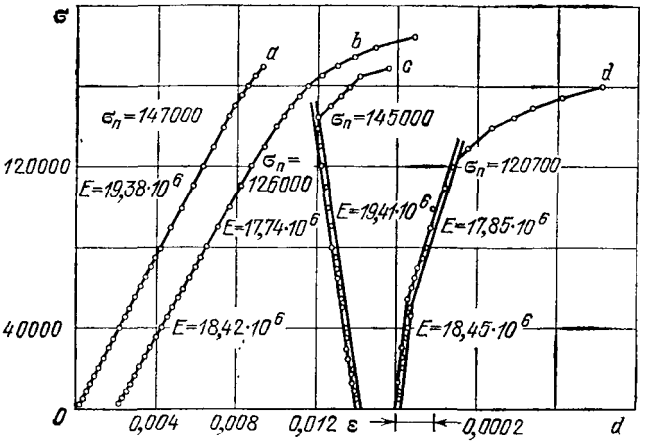


Рис. 2.66. Анализ опытных данных Муленбруха, полученных при растяжении и сжатии стержня из бериллиевой меди $\frac{1}{2}$НТ (выполнен Ричардсом в 1952 г.). Связь между напряжениями и деформациями и вычисленное Ричардсом отклонение от линейности. Испытывались образцы партии К. Деформации замерялись при помощи проволочных тензодатчиков SR-4. $\sigma_п$ — предел пропорциональности, σ — напряжение в фунт/дюйм², *E* — модуль упругости в фунт/дюйм², *a* — сжатие, *b* — растяжение, *c* — отклонение при сжатии, *d* — отклонение при растяжении.

и следовало ожидать, поскольку разрешающая способность при измерении угла не превышала 0,0001 радиана. Разумеется, если зависимость между силой (напряжением) и перемещением (деформацией) при малых деформациях нелинейна, то при недостаточной разрешающей способности для деформации становится трудно интерпретировать результаты как при изгибе, так и при кручении, получаемые в опытах с жесткими образцами. Такая же проблема возникала при интерпретации данных опытов со спиральными пружинами, описание которых содержится в статье Ричардса.

Муленбрух определял *E* при помощи экспериментов, интерпретированных с использованием формулы Эйлера для продольного изгиба колонн, примененной к данной партии *K*, $^1/_2$ *HT* стержней из бериллиевой бронзы. После каждого нового определения критиче-

ской нагрузки стержень при новом измерении длины оказывался короче. Как подчеркнул Ричардс, этот метод использовался десятью годами раньше Отто Францем Мейссером (Meisser [1939, 1]) при определении термоупругих характеристик и был описан в статье Мейссера, озаглавленной «Прогибы в тонких прямых стержнях при воздействии продольной нагрузки и использовании этого метода испытаний для определения статического модуля упругости». Полученные Муленбрухом изменения модуля при увеличении напряжения показаны на рис. 2.67. Обычно получались бóльшие значения модуля, что заставляет предположить, что с этим методом эксперимента связаны некоторые трудности. Однако данные определенно показывают тенденцию уменьшения модуля с увеличением напряжения, как получается в соответствии с формулой Хартига.

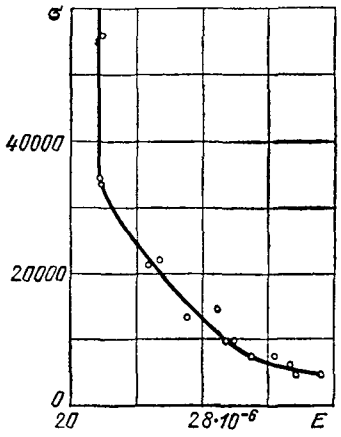


Рис. 2.67. Исследование (выполнено Ричардсом в 1952 г.) определенного Муленбрухом уменьшения модуля при возрастании напряжения в опытах (со стержнями из бериллневой меди, сжатие которых доводилось до уровня, соответствующего потере устойчивости прямолинейной формы равновесия. σ — критическое (потеря устойчивости) напряжение в фунт/дюйм², E — модуль упругости в фунт/дюйм².

Интересный вопрос возникает в отношении поведения зависимости между напряжением и деформацией в точке, где напряжения переходят от растягивающих к сжимающим. Как отмечалось выше, Хартиг считал это очень важной проблемой, хотя данные, рассматривавшиеся им, не позволяли ему изучить это явление в непосредственной близости нулевого напряжения. На схематической диаграмме рис. 2.68 показаны две возможности. Для одной из них, той, которая согласуется с формулировкой Хартига, я включил рассмотрение отклонения от линейности зависимости между напряжением и деформацией и поведения касательного модуля с возрастанием напряжения в области, где начинается значительное увеличение пластических деформаций.

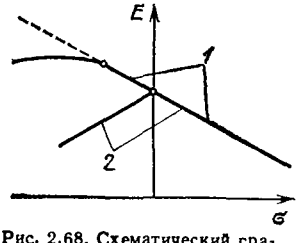


Рис. 2.68. Схематический график ожидаемого изменения модулей E при переходе через точку диаграммы с нулевым значением напряжения. *1* — график, соответствующий формуле Хартига, и *2* — график, отвечающий предположению о том, что уменьшение модуля имеет место при увеличении уровня как растяжения, так и сжатия.

Касательный модуль в случае растяжения линейно убывает с увеличением напряжения. Поэтому изменение знака в формуле Хартига при переходе к сжатию заставляет ожидать, что касательный модуль будет увеличиваться с возрастанием абсолютного зна-

чения напряжения при сжатии. Начиная с Ходкинсона в 40-х гг. XIX века, почти каждый экспериментатор, который определял значения E при растяжении и сжатии для одного и того же твердого тела, отмечал бóльшие значения при сжатии. Среди тех, кто считал это чрезвычайно важным, были Ричардс и Баушингер, причем измерения, проведенные последним в 1879 г. с помощью зеркального экстензометра, были достаточно точными, чтобы установить, что такое поведение было за пределами влияния ошибок эксперимента.

Схематический чертеж зависимости, предсказываемой формулой Хартига, показан на рис. 2.69. Обычно, если достаточная точность не достигается, определенный модуль E — это секущий модуль, как показано штриховой линией на этом графике. Поэтому всякое объединение опытов на растяжение и сжатие дает бóльшие значения E для сжатия.

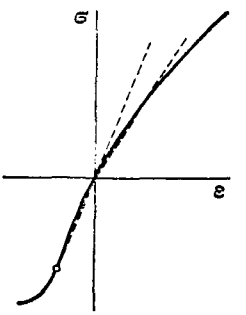


Рис. 2.69. Схематизированная ожидаемая диаграмма напряжение — деформация, соответствующая формуле Хартига (сплошная линия). При увеличении сжимающих напряжений достигается точка, после которой остаточные деформации становятся преобладающими. Штриховые линии показывают различие в значениях модулей упругости при растяжении и сжатии, если действительную кривую σ—ε аппроксимировать в этих областях прямыми линиями.

На рис. 2.70 показаны касательные модули при растяжении и сжатии, которые Ричардс получил, исходя из углов наклона на графике, построенном по данным Миллера. На рис. 2.71 я построил аналогичный график по данным Ходкинсона для чугуна, полученным в 1839 г.

Ни один из этих результатов не получен при непрерывном испытании одного образца с переходом через нулевое напряжение. Испытания Ходкинсона на сжатие производились с боковыми роликами, чтобы избежать продольного изгиба. Эти два примера, разделенные более чем столетием, помогают поддержать заключения, сделанные в XIX веке и основанные на результатах, полученных при испытаниях с нагружением мертвой нагрузкой. В современных

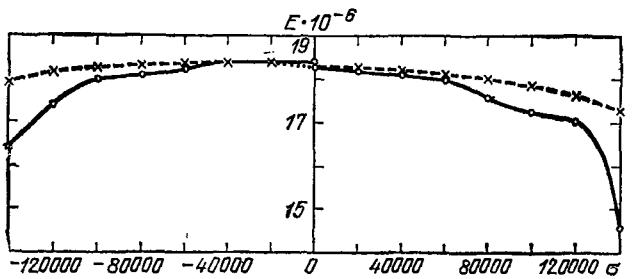


Рис. 2.70. Анализ значений модулей бериллиевой меди при растяжении (правая часть рисунка) и сжатии (левая часть), выполненный Ричардсом (1952) по результатам испытаний Миллера. Сплошная линия отвечает касательному модулю E, а штриховая — секущему. Обращают на себя внимание более высокие значения модулей при сжатии, что соответствует формуле Хартига, E — модуль упругости в фунт/дюйм², σ — напряжение в фунт/дюйм².

исследованиях колебания около нулевого напряжения с очень малой амплитудой могут продемонстрировать нелинейность функции отклика просто по наличию негармонических явлений.

Единственный эксперимент, обнаруженный мною, в котором испытание в одноосном напряженно-деформированном состоянии производилось с непрерывным переходом от растяжения через нулевое напряжение к сжатию, принадлежит С. Ф. Гроверу, У. Мунро и Брюсу Чалмерсу [1]) и относится к 1948 г. Они сначала сжимали до

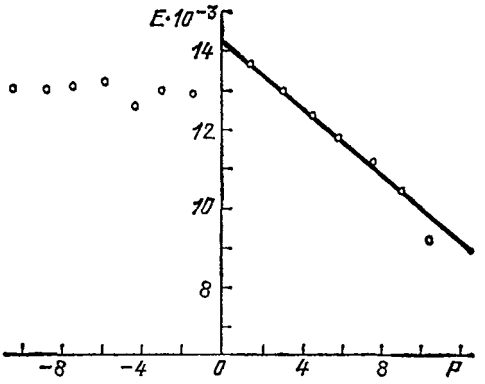


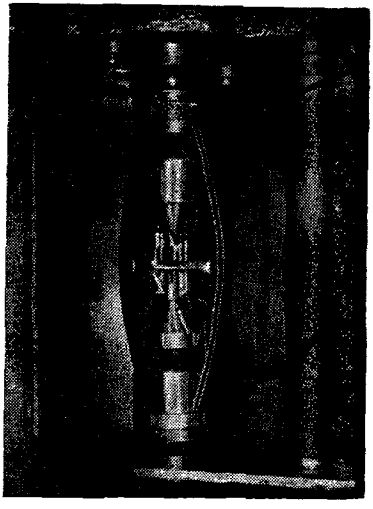
Рис. 2.71. Данные XIX века о модулях упругости, определявшихся Ходкинсоном (1839) при испытании чугуна, показывающие хорошее соответствие их значениям, полученным по формуле Хартига при растяжении и бо́льшие значения экспериментально определенных модулей при сжатии. По оси абсцисс откладывается нагрузка в кгс. E — модуль упругости в кгс/мм^2.

заданной величины цилиндрический образец из поликристаллического алюминиевого сплава с диаметром в 0,4 дюйма. Они определяли деформацию при сжатии при помощи трех механических экстензометров Гуггенбергера, расположенных с интервалами 120° вокруг образца. Затем они приклеили к испытуемому образцу три проволочных электротензометрических датчика сопротивления также с интервалами в 120°. Это прикрепление под нагрузкой являлось предосторожностью, сделанной для того, чтобы датчики сопротивления были в напряженном состоянии во все время нагружения. Затем растягивающая нагрузка прилагалась с помощью восьми выпученных (продольно изогнутых) стержней. Способ, которым стержни передавали начальную растягивающую нагрузку на образец, можно видеть из фотографии, показанной на рис. 2.72 и взятой из их работы.

[1]) Этот эксперимент описан в Приложении к статье «Модуль Юнга для сплавов алюминия» Н. Дудзинского, Дж. Р. Мюррея, Б. У. Мотта и Брюса Чалмерса (Dudzinsky, Murrey, Mott and Chalmers [1948, 1]). Приложение названо «Модули сплавов алюминия при сжатии и растяжении» Гровер, Мунро и Чалмерс (Grover, Munro, Chalmers [1948, 1]).

Гровер, Мунро и Чалмерс затем поместили всю описанную выше систему в машину для сжатия, так что они могли получить данные, относящиеся к зависимости между напряжением и деформацией, начиная с начального растяжения и переходя непрерывно через нулевое напряжение к сжатию. Результаты такого эксперимента приведены на рис. 2.73, показывающем плавный переход от растяжения к сжатию.

Поскольку в этом эксперименте разрешающая способность для деформации не превосходила 10^{-6}, обнаружить здесь нелинейность с достаточной уверенностью нельзя. Однако Гровер, Мунро и Чалмерс после утверждения, что они проводили аналогичные эксперименты с листами из алюминиевых сплавов и что ни для круглых стержней,



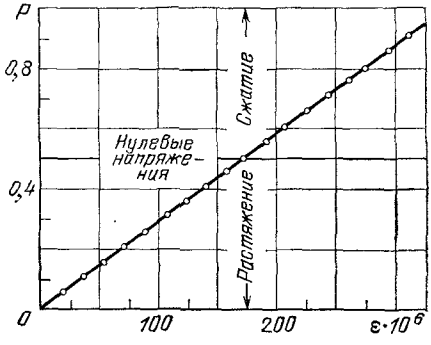


Рис. 2.72. Экспериментальная установка Гровера, Мунро и Чалмерса (1948) для наблюдения непрерывного перехода диаграммы напряжение — деформация через точку, соответствующую напряжению, равному нулю.

Рис. 2.73. Опыты Гровера, Мунро и Чалмерса (1948) на растяжение и сжатие при плавном переходе через нулевую точку диаграммы напряжение — деформация. Для измерения деформации образца диаметром 0,4 дюйма использовался экстензометр с ценой деления шкалы $4{,}68 \cdot 10^{-6}$. Вдоль оси ординат откладывается P — нагрузка в тоннах.

ни для плоских листов не могли обнаружить различия в модулях при растяжении и сжатии, тем не менее пишут:

«Статистическая кривая, согласованная с результатами испытаний, показывает, что имело место некоторое значительное отклонение от прямой линии и что оно было такого характера, который позволял считать его вызванным увеличением длины образца и уменьшением поперечного сечения. Однако этот эффект был порядка менее одного процента, в связи с чем возникала мысль, что прежде чем считаться с таким результатом, следует обратить большее внимание на экстензометрию и приложение нагрузки. Вследствие этого никаких деталей подбора кривых к экспериментальным данным в отчете не приводится (Гровер, Мунро, Чалмерс (Grover, Munro and Chalmers [1948, 1], стр. 313, 314)).

2.26д. Парабола Ходкинсона и дефект «упругости»: эксперименты Томаса и Авербаха (1959) и Билелло и Метцгера (1969) по микропластичности.

В 1843 г. Ходкинсон (Hodgkinson [1843, 1]), описывая эксперименты с железом и камнем, приведшие к его параболической зависимости между напряжением и деформацией, утверждал:

«Из вышеприведенных, а также из других выполненных экспериментов следует, что остаточные деформации, возникающие в телах, пропорциональны квадратам приложенных грузов. Поэтому не существует груза, как бы мал он ни был, который не вызвал бы остаточных деформаций и остаточных изменений в теле» (там же, стр. 24).

Описывая свою параболическую зависимость, в связи с которой он обнаружил то, что назвал «упругим дефектом», и настаивая задолго до 1850 г. на том, что с любой нагрузкой, как бы мала она ни

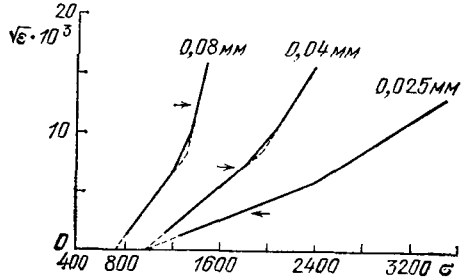


Рис. 2.74. Параболический характер зависимости между напряжениями и деформациями при растяжении поликристаллических образцов меди, обнаруженный Билелло и Метцгером (1967) на основе опытных данных Томаса и Авербаха (1959). Обращает на себя внимание переход от углов наклона нижних прямолинейных участков к углам наклона верхних, σ — напряжение в гс/мм².

была, связана некоторая остаточная деформация; Ходкинсон, как и Вертгейм и Баушингер, которые позже пришли к тому же заключению, ввел то, что обычно рассматривается как современное нововведение: «микропластичность».

В 1959 г. Томас и Авербах (Thomas and Averbach [1959, 1]), очевидно, побуждаемые наблюдениями Смита (Smith [1940, 1]) и Смита и ван Вагнера (Smith and van Wagner [1941, 1]) нелинейности при малых деформациях, сделанными почти на двадцать лет ранее, провели серию испытаний на растяжение поликристаллической меди чистоты 99,999% с использованием электротензометрических датчиков сопротивления для измерения деформаций, имеющих разрешающую способность для деформации $1\cdot 10^{-6}$; они изучали нелинейность в наблюдавшейся зависимости между напряжением и деформацией при малых деформациях как функцию размеров зерен (и, следовательно, так же как функцию термической предыстории).

Десятью годами позже, в 1969 г., Билелло и Метцгер (Bilello and Metzger [1969, 1]) уже в контексте микропластичности аналогично изучали эффекты, обнаруживаемые при испытании на растяжение образцов из поликристаллической меди чистоты 99,999% с поперечным сечением 3 мм², также с различными размерами зерен. Не обсуждая роли, которую микропластичность может играть

в анализе атомных моделей, мы можем отметить, что наблюдавшаяся ими зависимость между напряжением и деформацией при малых деформациях аналогична найденной ранее.

Используя два соединенных линейных переменных дифференциальных трансформирующих преобразователя для измерения смещения через датчик в 19 мм, Билелло и Метцгер достигли разрешающей способности для деформации в $5 \cdot 10^{-7}$, т. е. почти на поря-

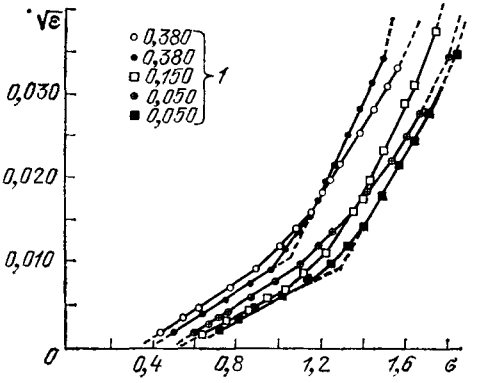


Рис. 2.75. Опыты Билелло и Митцгера (1969). Параболический характер зависимости между напряжениями и деформациями в поликристаллических образцах из меди высокой чистоты с различными размерами зерен. Видно отличие наклонов прямолинейных участков. *1* — диаметры зерен в мм, σ — напряжение в кгс/мм².

док выше, чем у Смита. По принятому в наше время обычаю они проводили все свои эксперименты на коммерческой (обычной серийной «жесткой») испытательной машине. Они изобразили свои результаты вместе с предыдущими экспериментами Томаса и Авербаха как графики зависимости σ от $\varepsilon^{1/2}$. Прямые линии на рис. 2.74 и 2.75 снова свидетельствуют о параболической зависимости, которую в течение 145 лет связывают с наличием очень малых остаточных деформаций.

2.26е. Сравнение функции отклика для волокна мышцы и всей мышцы: эксперименты Зихеля (1935).

В 1935 г. Фердинанд Й. М. Зихель (Sichel [1935, 1]) вновь поднял вопрос, обсуждавшийся Вундтом и Фолькманом более чем 75 лет до него, а именно, применим ли закон Гука в качестве зависимости между силой и удлинением для мышцы ноги лягушки. Зихель ссылается на исследования Эдуарда Вебера и Вертгейма в 40-х гг. XIX века как на первоисточники по этой проблеме. При наличии некоторой путаницы в отношении различия между инфинитезимальными и конечными деформациями, Зихель разработал аппарат, в котором растяжение мышцы при приложении нагрузки вызывало изгиб микрострелки, движение кончика которой наблюдалось по микрометрической шкале с делениями в 0,010 мм. Он использовал микроскоп для считывания показаний. Главной целью эксперимента было рассмотрение функции отклика для отдельного мышечного волокна для сравнения с функцией отклика применительно к их

агрегату или целой мышце лягушки. Зихель наблюдал и признал, что функция отклика для всей мышцы была существенно нелинейной и соответствующий ей график поворачивался в сторону оси нагрузок аналогично тому, как это наблюдали Вертгейм (Wertheim [1847, 1]), Эдуард Вебер (Eduard Weber [1846, 1]); см. также Вундт (Wundt [1858, 1]) и Фолькман (Volkmann [1859, 1]).

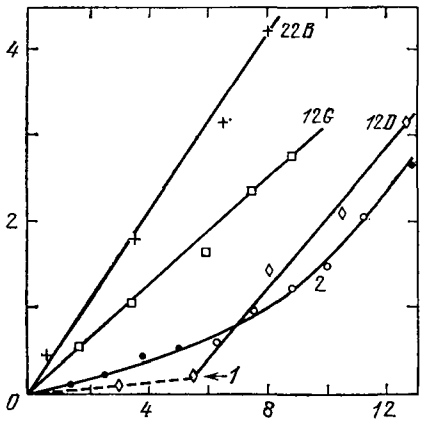


Рис. 2.76. Опыты Зихеля (1934—1935). Сравнение зависимостей между напряжениями и деформациями, полученных при испытании на растяжение отдельных волокон и всей портняжной мышцы в целом (кружочки). Поведение первых подчиняется линейному закону, тогда как сопротивление агрегата нелинейно. *1* — точка, соответствующая еще не напряженному состоянию волокна мышцы; *2* — вся мышца. Вдоль оси абсцисс отложено удлинение в %, вдоль оси ординат — напряжения в условных единицах.

В первой серии экспериментов с отдельными волокнами длины образцов у Зихеля были очень малы, в пределах от 0,1 мм до 1 мм. Во всех экспериментах, результаты которых табулированы, значение E для волокна убывало с возрастанием деформации. При сравнении численных значений модуля для различных волокон он наблюдал значительное расхождение. Область значений касательного модуля была того же порядка величины, что и у полученных Вебером в 1846 г. для целой мышцы (hyglossus) лягушки.

Во второй серии экспериментов, предусматривавшей повышение точности измерений для изучавшегося волокна, Зихель (Sichel [1935, 1], стр. 35) использовал более длинные части волокна (от 0,7 мм до 30,0 мм), большее увеличение «и самое главное . . . производство измерений только на той части длины волокна, которая в продолжение эксперимента оставалась в хорошем физиологическом состоянии». Три экспериментальных графика зависимости растягивающего усилия от удлинения в процентах показаны на рис. 2.76, где растягивающее усилие дается в произвольных единицах, и поэтому указанные графики не могут быть использованы с целью количественного сравнения с кривой растяжения для целого напряженного мускула, также показанной на рисунке.

Отклик для двух из числа отдельных волокон был приблизительно линейным. Некоторые из волокон, информация для одного из которых представлена на рис. 2.76, требовали начального растяжения, чтобы принять меры против «непрямолинейностей, вызванных локальными повреждениями» (там же, стр. 38). Выяснение Зихелем того факта, что деформация отдельного волокна была почти линейной, в то время как для всей мышцы она нелинейна, имеет

очевидное значение для проблемы образования агрегатов из органических тканей.

Эксперименты Фолькмана (Volkmann [1859, 1]) были на порядок величины более точны, чем Зихеля, и, как я указал выше, Фолькман мог также изучать историю удлинения во времени и, следовательно, мог принимать во внимание упругое и термическое последействия. Зихель не отмечает в своей работе ни упругого, ни термического последействия. Так как он не указывает промежутков времени, прошедших от момента приложения нагрузки до момента снятия показаний приборов, трудно сравнивать его данные с данными экспериментов середины XIX века, где эти эффекты рассматривались как очень важные.

2.26ж. Нелинейная функция отклика для искусственного камня: эксперименты Пауэрса (1938).

В 1938 г. Тривал К. Пауэрс (Powers [1938, 1]) сравнил E для образцов бетона и известкового раствора, полученные в динамических и квазистатических опытах. Он производил измерения при изгибе в динамических опытах при помощи пьезоэлектрических кристаллов кварца, прикрепленных к образцам. Он сохранял деформации столь малыми, сколь это было возможно сделать, и в его вычислениях E по измеренной частоте учитывались инерция поворота сечений и инерция, связанная с поперечными сдвигами в стержне. Данные Пауэрса были получены на балках со следующими размерами в дюймах: $5\times5\times18$. Данные статических испытаний получены в опытах с цилиндрами длиной в 12 дюймов и диаметром в 6 дюймов, которые были изготовлены (и просушены) из этого же замеса бетона, который использовался для динамических испытаний. Он определял деформации при помощи экстензометров с поворачи-

Таблица 31

Пауэрс (1938). Модули Юнга, определенные при испытании бетонных брусьев с размерами $5\times5\times18$ дюймов звуковым методом

Серия опыта	Номер замеса	Возраст бетона в днях	d	N	$N^2\cdot10^{-6}$	$N^2d\cdot10^{-6}$	$E=0{,}525\times N^2d\cdot10^{-6}$
J294	1	7	2,43	1975	3,90	9,48	5,0
	1	28	2,44	2040	4,16	10,15	5,3
	2	7	2,42	1825	3,32	8,03	4,2
	2	28	2,43	2035	4,14	10,06	5,3
	3	7	2,47	1950	3,80	9,39	4,9
	3	28	2,48	2100	4,40	10,91	5,7
	4	7	2,48	1910	3,65	9,05	4,75
	4	28	2,49	2050	4,20	10,46	5,5
	5	7	2,44	1830	3,35	8,17	4,3
	5	28	2,45	1990	3,96	9,70	5,1
	6	7	2,44	1800	3,24	7,90	4 1
	6	28	2,45	1900	3,61	8,84	4,6

вающимися зеркалами, расположенными по одному с каждой стороны образца. Он наблюдал в образце некоторую неаксиальность. Данные, полученные из опытов с поперечными колебаниями, приведены в табл. 31 для шести замесов, причем d — плотность образца, а N —измеренная частота колебаний.

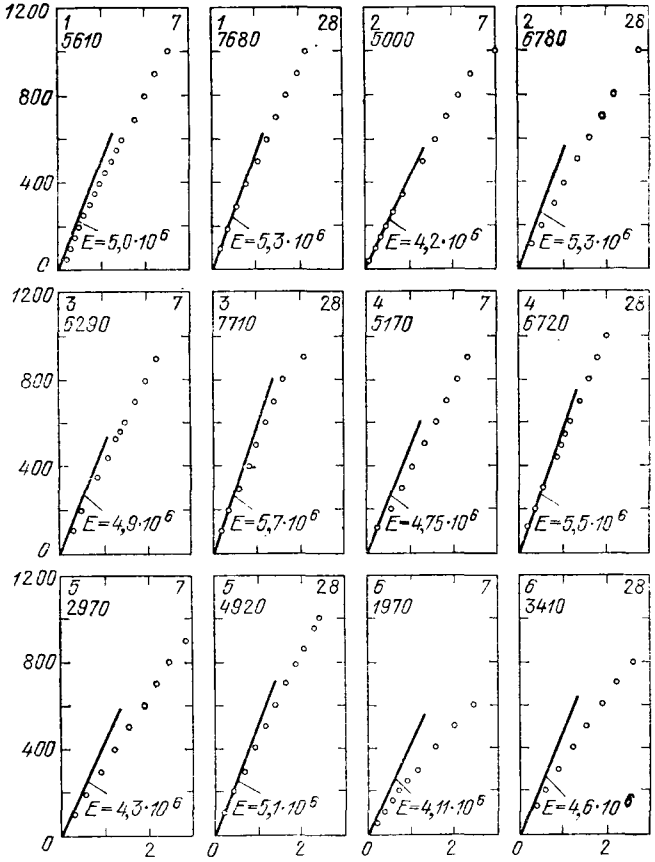


Рис. 2.77. Результаты наблюдения за квазистатическим сжатием бетона в возрасте 7 или 28 дней (кружки) и сравнение их с начальным наклоном диаграммы σ—ε, найденным в условиях динамического воздействия при изгибе, путем использования пьезоэлектричества кристалла кварца. Легко обнаруживается, что поведение бетона находится в соответствии с формулой Хартига. На всех двенадцати графиках ось абсцисс — ось деформаций, увеличенных в 10^4 раз, ось ординат — ось напряжений в фунт/дюйм². В верхнем левом углу каждого прямоугольного рисунка представлен номер замеса, в правом — возраст бетона в сутках. Ниже указывается максимальное (разрушающее) напряжение, достигнутое в опыте, в фунт/дюйм², E — модуль упругости в фунт/дюйм².

На рис. 2.77 средние из статических результатов (кружки) сравниваются с результатами испытаний на колебания из таблицы 31 (сплошная линия). Максимальная деформация при колебаниях намного меньше получаемой при квазистатических испытаниях. При

своих измерениях на этом материале Пауэрс достиг большей точности, чем его предшественники в XIX веке, изучавшие тот же материал, но его выводы просто подтвердили оценки, данные для этого твердого тела в XIX веке. Можно видеть, что формула Хартига (2.29) содержит знак плюс для бетона, как и для кожи и ряда других твердых тел.

2.26з. «Эффект последействия» в монокристаллах свинца: Чалмерс (1935).

В 1935 г. Чалмерс (Chalmers [1935, 1]) снова использовал интерференционную технику Грюнайзена [1]) с целью получения точных данных для удлинений при малых деформациях в свинце и олове. Грюнайзен на тридцать лет раньше использовал две интерференционные системы, по одной с каждой стороны образца. Чалмерс ограничил свои измерения одной стороной. Полученная Чалмерсом разрешающая способность для деформаций была ограничена значением $7 \cdot 10^{-6}$, чтобы исключить влияние упругого и термического последействий, которые, как установил Грюнайзен, были пренебрежимо малы в этой области деформаций в рассматривавшихся им материалах. Оба исследователя могли измерять смещения с точностью до 1/100 полуширины интерференционной полосы зеленой линии ртутной дуги, т. е. с точностью до $2{,}73 \cdot 10^{-6}$ мм. Поскольку Грюнайзен использовал образцы длиной 16,5 см, в то время как Чалмерс — образцы длиной 3 см; различие в общей точности эксперимента было на один порядок. Поэтому обнаружение нелинейности в области деформаций порядка 10^{-5}, которые изучались Чалмерсом, было затруднительно. Упругое последействие, обнаруженное на сто лет раньше Вильгельмом Вебером (Weber [1835, 1], [1841, 1]) для шелка, было названо Чалмерсом «обратимой ползучестью». На основании результатов Грюнайзена и Дж. О. Томпсона (Thompson [1891, 1]), разумеется, следовало ожидать также наличия термического последействия в области деформаций порядка 10^{-5}.

Гистерезис, или обратимая ползучесть, важный аспект в нелинейности при малых деформациях, интересовал экспериментаторов прошлого столетия; Чалмерс среди других результатов получил два цикла нагружения и разгрузки, показанные на рис. 2.78. Они наблюдались только в случае, если максимальное напряжение не превосходило предела упругости.

Здесь мы должны отметить наблюдения Чалмерса за начальным отклонением от закона Гука:

«Отклонение от закона Гука (см. рис. 5) мало́ и может быть свойством илн реальной решетки (т. е. содержащей дефекты. А. Ф.), или блочной структуры» (мозаичной структуры. А. Ф.) (Чалмерс (Chalmers [1936, 1], стр. 442)).

[1]) (Grüneisen [1906, 1]). Чалмерс не ссылается на эту предшествовавшую работу.

Ссылаясь на ползучесть кристаллитов олова Чалмерс (Chalmers [1937, 1]) обнаружил, что изменение их длины во времени может быть описано формулой

$$l = \frac{l_0}{1+bt}, \tag{2.40}$$

где l — длина в момент t, а l_0 — начальная длина в момент $t=0$. В то время как шелк и олово вряд ли представляют собой вещества, которые являются подходящими для плодотворного одновременного изучения, интересно, что эмпирическая формула для упругого последействия в шелке вновь появляется через 100 лет для описания того же эффекта в олове. Чалмерс обнаружил, что его данные лучше описываются формулой (2.40), чем законом $t^{1/2}$, предложенным Эдвардом Невиллем да Коста Андраде (Andrade [1910, 1]). Можно показать, что формула (2.40) аналогична той, с помощью которой Карл Фридрих Гаусс (см. Вильгельм Вебер (Weber [1835, 1])) представил данные Вебера для шелковой нити. Мы можем вывести ее из соотношения $dl/dt=cl^2$, которое Вебер (Weber [1841, 1]) в 1841 г. обобщил в следующее уравнение:

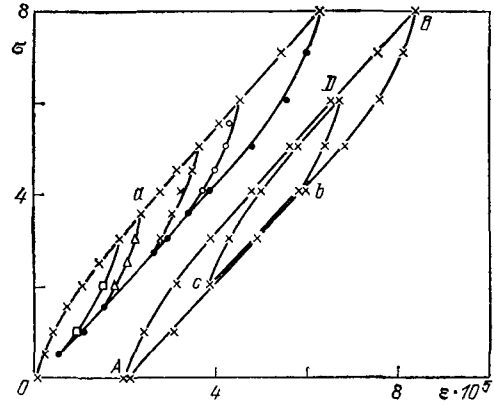


Рис. 2.78. Опыты Чалмерса (1935). Наблюдение за упругостью свинца при инфинитезимальных деформациях посредством оптического интерференционного экстензометра, показывающее обратимость деформаций в условиях цикла нагружения и разгрузки. σ — напряжение в 1500 гс/см², ε — деформация.

$$\frac{dl}{dt} = cl^m \tag{2.41}$$

в надежде включить описание эффектов, происходящих вследствие разных способов нагружения.

2.26и. Уменьшение значения E с увеличением микроостаточной деформации: эксперименты Лауриента и Понда с кристаллами алюминия (1956).

В 1956 г. Майкл Лауриент и Роберт Барретт Понд (Laurente and Pond [1956, 1]) изучали область малых деформаций монокристаллов алюминия с чистотой 99,99+% в широком диапазоне начальных кристаллографических ориентаций. Используя мостовую электрическую схему, включающую четыре электротензометрических датчика сопротивления, два из которых находились на деформируе-

мых образцах (и два на идентичных недеформируемых), деформации в которых определялись при помощи самокалибрующегося потенциометра, они сумели получить разрешающую способность для деформаций, изменяющуюся в зависимости от условий теплового и электрониого экранирования от нижнего экстремального значения $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ до $1 \cdot 10^{-6}$. Нагружающая установка с нагружением мертвой

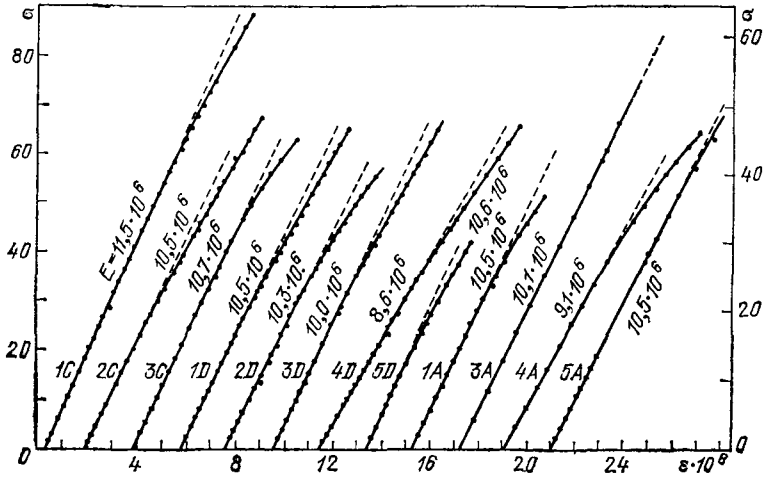


Рис. 2.79. Опыты Лауриента и Понда (1956). Высокоточное определение зависимости между напряжениями и деформациями при растяжении монокристалла алюминия с чис-отой 99,99%. Видна нелинейность уже при очень малых деформациях. ε — деформация, E — модуль упругости в фунт/дюйм².

нагрузкой, вызывающая растяжение образца, состояла из ведра, подвешенного к кристаллу с помощью гибкой цепи, и уравновешенного противовесом коромысла. Лауриент и Понд проверяли измеряемые нагрузки посредством силоизмерительного элемента, включенного в систему с помощью второй гибкой цепи между элементом и образцом. Разрешающая способность при измерении напряжений была меньше чем 1 фунт/дюйм². В обсуждающихся здесь экспериментах разрешающая способность для деформации равнялась $1 \cdot 10^{-7}$. На рис. 2.79 показаны 12 графиков зависимостей между напряжением и деформацией при растяжении монокристаллов, на которых можно видеть отклонения от линейности при таких малых деформациях, как $2 \cdot 10^{-6}$.

На рис. 2.80 кривые нагружения, разгрузки и второго нагружения для одного из этих монокристаллов показывают, что остаточная деформация была заметна в таком монокристалле не только при деформациях порядка 10^{-5}, но даже в случае, когда порядок остаточных деформаций был столь мал, как $1 \cdot 10^{-6}$. При последних величина E упала от значения $10{,}1 \cdot 10^6$ фунт/дюйм² до $9{,}94 \cdot 10^6$

фунт/дюйм², причем меньшее значение воспроизводилось как при первой разгрузке, так и при втором нагружении.

Эти эксперименты примечательны той тщательностью, с которой они проводились, и точностью, которая в них достигалась. Метод нагружения обеспечивал аксиальность. Область микродеформаций была та же, что рассматривавшаяся Грюнайзеном (Grüneisen [1906, 1]) в 1906 г. Но разрешающая способность для деформаций у Лауриента и Понда была 10^{-7}, а не 10^{-8}, как у Грюнайзена. Это

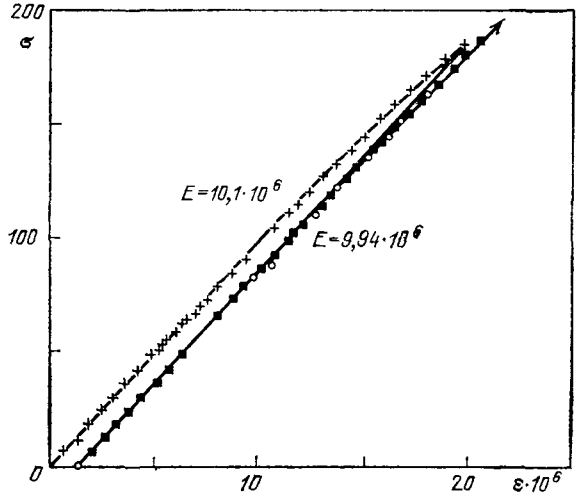


Рис. 2.80. Опыты Лауриента и Понда (1956). Циклическое растяжение монокристалла алюминия с чистотой 99,99% (образец № 3а). Видно уменьшение модулей при вторичном нагруженни. Крестикн относятся к первому нагружению, квадратики — ко второму, кружки — к разгрузке; σ—напряжение в фунт/дюйм², E — модуль упругости в фунт/дюйм².

уменьшение чувствительности было возмещено уменьшением длины базы с 16,5 см у Грюнайзена (вся длина образца) до 0,32 см у Лауриента и Понда (длина электротензометрического датчика сопротивления). При той же разрешающей способности, что у Дж. О. Томпсона (Thompson [1891, 1]) через 65 лет стало возможным уменьшить длину образца более чем в 8000 раз, что позволило исследовать весьма малые монокристаллы.

В напоминание об «упругом дефекте», который, как полагали Ходкинсон (Hodgkinson [1843, 1]), Вертгейм (Wertheim [1844, 1]) и Баушингер (Bauschinger [1886, 1]), должен был бы наблюдаться, если бы была достигнута достаточная точность, Лауриент и Понд (Lauriente and Pond [1956, 1]) обнаружили остаточную деформацию, равную $1 \cdot 10^{-6}$, когда они рассматривали настолько малые деформации, что величина их была порядка 10^{-5}. Еще больший интерес представляло обнаружение ими того, что даже столь малые остаточные деформации в монокристалле высокой чистоты уменьшали величину E. Таким образом, вновь наблюдалось открытое Кулоном (Coulomb [1784, 1], также [1884, 1]) явление уменьшения модуля при повторном нагружении после возникновения остаточной деформации, которое Вертгейм, Кельвин и другие в XIX веке исследовали

в деталях. На этот раз, однако, порядок величины деформаций был значительно меньше тех, которые рассматривались любым из предыдущих экспериментаторов [1]).

2.27. Некоторые современные исследования по нелинейности при инфинитезимальной деформации в кристаллических твердых телах

В течение последних 15 лет в области исследования нелинейности при малых деформациях появились три новых пути, которые не представляют собой ни повторения, ни переадаптации, ни просто улучшения экспериментов, проведенных в XIX веке или начале XX века. Определение констант упругости с использованием скорости распространения волн в экспериментах, применяющих ультразвук, будет изложено в главе III (раздел 3.39). Вообще говоря, амплитуды этих волн были чрезвычайно малы. В более новых исследованиях использовались несколько большие амплитуды, причем часто говорилось о волнах конечной амплитуды, хотя на самом деле она конечна только по отношению к обычно используемым чрезвычайно малым амплитудам. Нелинейность функции отклика при инфинитезимальных деформациях приводит к негармоническим явлениям, экспериментальное обнаружение параметров которых дает меру отклонения от обычно принимаемого линейного закона Роберта Гука. Такие исследования, совместно с определением во втором типе эксперимента [2]) коэффициентов сжатия посредством отыскания скоростей распространения ультразвуковых волн при различном давлении в окружающей среде, из которых могут быть найдены константы упругости третьего порядка, указывают на определенно новое и интересное направление поиска.

Другая новая перспектива в современных экспериментальных исследованиях основана на систематическом изучении термической и механической предысторий, которые для многих кристаллических твердых тел, подвергнутых отжигу, усиливают некоторые аспекты нелинейности при малых деформациях твердых тел. Такие исследования были целью значительной части той моей собственной научной работы, которая проводилась с 1955 г. Измерения на образцах, выдерживавшихся при температурах, составлявших около 90% от температуры плавления, в продолжение от двух до двадцати часов, затем охлаждавшихся в горне и подвергавшихся проверке на величину зерна, производились на специально сконструированной машине, в которой нагружение осуществлялось мертвой нагрузкой. Были сконструированы три машины, для непосредственного растяжения образца либо в условиях порционного, либо непрерывного

---

[1]) Лауриент и Понд не ссылались нигде на широкое изучение этих явлений в XIX веке.

[2]) См. главу III, раздел 3.45.

увеличения нагрузки согласно предписанному закону. Одна такая машина была предназначена для монокристаллов, она давала возможность проводить рентгенографию во время самого испытания. Вторая машина позволяла изучать очень длинные образцы, а третья была сконструирована так, что, кроме использования для испытаний на простое растяжение, позволяла добавлять независимую крутильную деформацию, если это было желательно.

Были построены еще две машины с нагружением мертвой нагрузкой, одна для растяжения и другая для сжатия. Они включали рычаг для уравновешивания, точно установленные ножевые опоры и устройство для обеспечения постоянной скорости изменения напряжений при осевом нагружении. Измерение деформации производилось при помощи оптического катетометра (или подвижного микроскопа), электротензометрических датчиков сопротивления, прикрепленных непосредственно и исключавших изгиб, и при помощи датчика типа прижимной скобы, изготовленной в форме арки из тонкой бериллиево-бронзовой полосы, на которой размещался высокочувствительный фольговый электротензометрический датчик сопротивления. Испытания продолжались от нескольких минут до многих часов и состояли из нескольких циклов нагружения, разгрузки и повторного нагружения образцов, чтобы наблюдать переходы второго порядка, иначе говоря, дискретные изменения в углах наклона касательной к графику зависимости напряжения от деформации, что вызывало разрывы в значениях первой производной и, таким образом, скачкообразное изменение касательного модуля.

Первая серия экспериментов была выполнена [1]), чтобы установить, можно ли было обнаружить нелинейность при простом нагружении на этой аппаратуре и если будут появляться дискретные изменения в значениях угла наклона касательной к графику зависимости между напряжением и деформацией, то окажутся ли эти изменения такими, какими они предсказываются (см. там же) последовательностью квантованных значений. Квантованная последовательность была обнаружена в моих более ранних работах по сравнению упругих постоянных 59 элементов (см. ниже главу III, раздел 3.44). Я предсказал переходы второго порядка в значениях модуля упругости на основе результатов опытов, проводившихся при больших деформациях, из которых получены определяющие уравнения на основе сравнения конечных амплитуд одномерных волн со значениями соответствующих параметров в квазистатических экспериментах, выполненных при одноосном напряженно-деформированном состоянии с образцами, изготовленными из того же материала.

---

[1]) Белл (Bell [1968, 1]). Эти эксперименты, впервые описанные в 1968 г., были выполнены в промежутке от 1955 до 1968 г. Я задержал публикацию до того, как собрал достаточно данных, чтобы иметь возможность утверждать определенно, что переходы второго порядка для модулей не только существуют, но и что их распределение было упорядоченным.

Некоторые из результатов моих экспериментов и экспериментов моих студентов по переходам второго рода были даны в монографии [1]) в 1968 г., в которой был введен термин [1] «мультимодульность» («Multiple elasticites»). Ряд переходов второго порядка для функций отклика, графики которых составили последовательность прямолинейных отрезков, наклон каждого из которых соответствует определенному целочисленному значению s (s=1, 2, 3, ...), используемому в показателе степени множителя $(2/3)^{s/2}$ у универсальной константы в формуле для E (см. ниже раздел 3.44 по поводу деталей, относящихся к этой квантованной последовательности стабильных значений упругих постоянных). При заданных ν, T и T_m (коэффициенте Пуассона, температуре при испытании в градусах Кельвина и температуре плавления материала образца) величина E, соответствующая любой температуре, как я обнаружил, выражается формулой

$$E=2{,}06\ (2/3)^{(s/2)+(p/4)}A\times \times(1+\nu)[1-T/(2T_m)], \qquad (2.42)$$

где s=1, 2, 3, 4, ..., p=0 или 1 (определенная величина для данного материала) и $A=2{,}89\cdot10^4$ кгс/мм^2 является универсальной константой для 59 элементов.

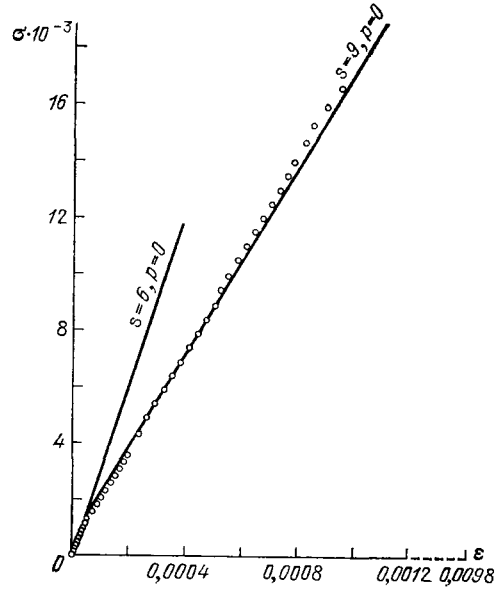


Рис. 2.81. Опыт Белла № 1283 (1968). Наблюдение (кружки) мультимодульности при малых деформациях поликристаллического железа чистоты 99,85%. Образец отжигался в течение 48 часов при температуре 1640°F и испытывался при T=300K. Сплошной линией указано предсказание квантованных значений модулей в соответствии с формулой (2.42), σ — напряжение в фунт/дюйм^2.

Пример перехода второго порядка при одноосном испытании на сжатие для образца из железа 99,85% чистоты, отожженного при 1640° F в течение 48 часов и охлажденного в горне, дан на рис. 2.81. Можно видеть два различных значения модуля с одним переходом второго порядка. Первое значение модуля, отвечающее целочисленному индексу s=6, соответствует хорошо известной стандартной величине при комнатной температуре E=20 900 кгс/мм^2. Второй прямолинейный участок графика зависимости между напряжением и деформацией имеет наклон, соответствующий значе-

[1]) Там же, см. главу VI.

нию $E=11\,350$ кгс/мм² ($s=9$). Экспериментальные результаты (кружки) и предсказанные по формуле наклоны сплошных линий получены для напряжений много меньших, чем измеренный предел текучести для данного твердого тела $Y=16\,000$ фунт/дюйм² (11,25 кгс/мм²).

На рис. 2.82 показаны три цикла нагружения для мелкозернистого поликристаллического алюминия чистоты 99,2%, отжигавшегося в течение 20 минут при температуре на 20° F ниже точки плавления и затем отжигавшегося еще в течение 2 часов при температуре на 120° F ниже точки плавления и, наконец, охлажденного в горне.

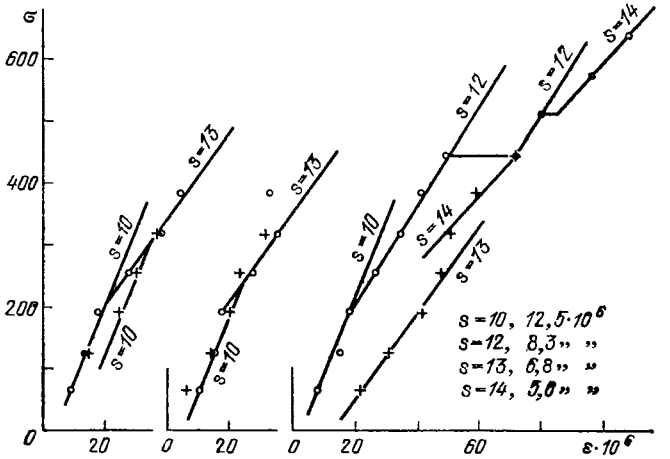


Рис. 2.82. Опыт Белла № 1260 (1968). Наблюдение мультимодульности при малых деформациях полностью отожженного поликристаллического алюминия. Кружки соответствуют состоянию образца при его нагружении, а крестики — разгрузке. Сплошные линии отвечают значениям модуля, найденным по формуле (2.42). σ — напряжение в фунт/дюйм², ε — деформация.

Аналогичное поведение показано на рис. 2.83 для полностью отожженной мелкокристаллической поликристаллической меди чистоты 99,9%.

Наконец, на рис. 2.84 показаны три цикла нагружения полностью отожженного образца из бронзы 70—30 α в опыте с нагружением мертвой нагрузкой, описанном в докторской диссертации Уильяма Фрэнсиса Хартмана (Hartman [1967, 1]). Хартман проводил испытания на растяжение на том же самом лабораторном оборудовании, которое я использовал для аналогичных экспериментов с другими твердыми телами. Все показанные отрезки прямой были предсказаны из дискретного распределения, задаваемого формулой (2.42).

Эти три графика, соответствующие зависимости между напряжением и деформацией, иллюстрируют результаты, найденные из

многих экспериментов с простым нагружением мертвой нагрузкой, выполненных в моей лаборатории за последние несколько лет. Эксперименты свидетельствовали о нелинейности при малых деформациях, которая, как будет пояснено ниже, не только согласуется с наблюдениями XIX века, но и указывает на необходимость пересмотра взгляда на устойчивость свойств кристаллических твердых

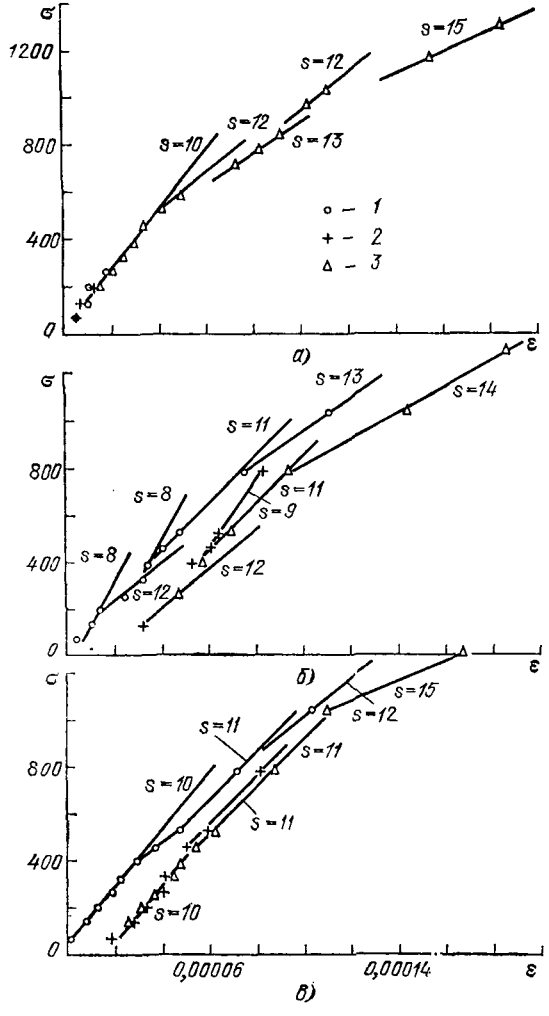


Рис. 2.83. Опыты Белла (1967). Наблюдение мультимодульности при малых деформациях поликристаллической меди. Кружки соответствуют состоянию образца при первом нагружении, крестики — при первой разгрузке, треугольники — при втором нагружении, сплошная линия соответствует значениям модуля, найденным по формуле (2.42). σ — напряжение в фунт/дюйм², ε — деформация. *а*) Опыт № 1293; *б*) опыт № 1295; *в*) опыт № 1296.

тел с точки зрения наличия таких переходов 2-го порядка или их отсутствия для небольшой группы устойчивых твердых тел — твердых тел, изготавливаемых с учетом требований практической технологии по металлургическим рецептам, определяющим химический

состав и термическую и механическую предыстории. Большое внимание, уделяемое изучению этой ограниченой группы твердых тел,

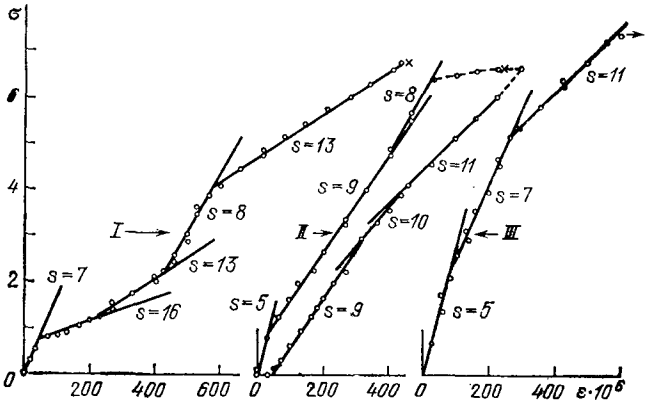


Рис. 2.84. Опыт № 1265 Хартмана (1967). Наблюдение (кружки) мультимодульности при малых деформациях латуни марки 70—30α. Сплошная линия отвечает распределению модулей по формуле (2.42), σ — напряжение в кгс/мм², ε — деформация.

без сомнения было главной причиной длительной задержки в обнаружении переходов второго рода при инфинитезимальных деформациях кристаллических твердых тел [1]).

2.28. Новые проблемы, подлежащие критике при обзоре экспериментов, описанных в литературе за последнее десятилетие

Выявление важнейших вкладов в проблему нелинейности при малых деформациях, сделанных начиная с XVII столетия и до момента десятилетней, или около того, давности, требует только трудоемкой работы по изучению литературы, понимания изученного и критического к нему отношения. Распространить ту же программу на последнее прошедшее десятилетие труднее. Очевидно, большинство экспериментов, произведенных недавно, так же как и выполненных в прошлом, не выдержат экзамена временем, чтобы пережить изменения, ожидающиеся в перспективе, которые в какой-то мере всегда приносит время. Но для долговечности результатов многих из современных экспериментов имеется дополнительная опасность. В отношении эксперимента, время, вероятно, будет судить о прошедшем десятилетии как о десятилетии «черного ящика». Мы стали жертвой тех, кто, не подозревая этого, описывает отсчеты деформа-

[1]) Исторический обзор почти двух столетий казалось бы не согласующихся наблюдений, факт несогласованности которых теперь хорошо понятен с точки зрения квантованного распределения значений упругих констант, «мультимодульности» и переходов второго рода, дан ниже в разделе 3.44.

ций, полученные при помощи усилителей, которые вообще не в состоянии отзываться на существенные в данном случае частоты; электронных приборов, правильность проверки ежедневной калибровки которых известна лишь богам; при помощи автоматических испытательных машин, связывающихся с автоматическими пишущими устройствами после поверхностной консультации с присоединенными компьютерами, использование которых не позволяет осмысливать все важные экспериментальные данные и обнаружить новые эффекты в образцах, чистота, кристаллическое состояние и предыстория которых остаются навсегда неизвестными; полученные, наконец, при помощи большого ассортимента вмонтированных преобразователей, использование которых должно, по предположению, исключать необходимость рассматривать элементарные предпосылки.

Что эта экспериментальная наука большого бизнеса является проходящей фазой, является очевидным даже в момент ее современного расцвета. Конечной фазой наверняка будет возвращение к простым утверждениям с благоразумным, вероятно, ограниченным использованием части современных достижений, там, где они применимы, без искажения интеллектуального содержания идеи в рассматриваемом вопросе. На автора этой книги, который сам изобретал, разрабатывал и использовал «изощренные» экспериментальные методы, недоступные ранее, аппаратура «сама по себе» (*per se*) не производит впечатления; я считаю, что простое ознакомление с прошлым восстановит равновесие между упором на аппаратуру и фундаментальной механикой. Параллели можно легко найти и в других областях, например в том, на что один мой знаменитый друг-математик (ныне покойный) ссылался как на некоторые из «кружевных занавесок» современной математики или на некоторые злоупотребления в том, что теперь называют «компьютерной наукой».

Короче говоря, в слишком многих опубликованных в наши дни отчетах об экспериментальных работах читатель не может определить детали эксперимента; более того, современная мода использовать атомистическую интерпретацию как единственную руководящую идею, затеняет данные эксперимента, представляя их в таком виде, что иногда делает невозможным отделить измеренные величины от окружающих их предположений, часто молчаливо сделанных экспериментатором.

Как отличалась от этого картина в 1879 г., когда Баушингер своим только что разработанным зеркальным экстензометром создал твердое основание разрешающей способности дяя деформаций, равной 10^{-6}. Его описание установки, его методы обнаружения различных ошибок и его калибровочные процедуры занимали несколько страниц, дававших читателю не только четкое представление об эксперименте (и восхищение его автором), но и достаточно подробностей, чтобы оказалась возможной постройка установки и повто-

рение эксперимента. Аналогично Дж. О. Томпсон в 1891 г., когда добился разрешающей способности для деформации в 10^{-7} на образцах длиной 27 м, полностью описал установку и процедуру испытаний, как это сделал в 1900 г. Сирл, которому удалось добиться той же разрешающей способности на образцах на порядок меньшей длины. Сирл на самом деле посвятил целые страницы описанию с точными подробностями всех трудностей и ловушек. То же самое можно сказать и о Грюнайзене, когда он в 1906 г. описывал измерения, произведенные при помощи своего экстензометра, основанного на оптической интерференции и обеспечивающего разрешающую способность для деформации до $1{,}7 \cdot 10^{-8}$. Такая разрешающая способность для деформации осталась наилучшей до последнего десятилетия, хотя, как было показано выше, при сохранении такого уровня этой способности, стало возможным уменьшить размер образца. Разработка электротензометрических датчиков сопротивления в 40-х и 50-х гг. XX века сопровождалась обширной и изобилующей подробностями литературой, в которой рассматривались их возможности и ограничения при измерении деформации. При обычных предосторожностях можно было получить разрешающую способность для деформаций, равную 10^{-6}. Некоторые экспериментаторы, как, например, Лауриент и Понд (Lauriente and Pond [1956, 1]; см. выше раздел 2.26) в 1956 г. представили достаточно деталей, чтобы продемонстрировать возможность достигнуть при надлежащей внимательности разрешающей способности для деформации, равной 10^{-7}, при помощи электротензометрических датчиков сопротивления, даже при очень малой базе датчика в условиях достаточно сложных экспериментов.

В очевидном противоречии с манерой, в которой экспериментаторы более чем в течение столетия описывали свои эксперименты, предоставляя нам, таким образом, возможность иметь доверие к полученным ими результатам; в последнее десятилетие мы вступили в период массового производства данных, метод получения которых перестал рассматриваться как вопрос первостепенной важности. Отдельные примеры плохо описанных экспериментов существовали всегда, но теперь их особенно много. В середине 60-х гг. XX века мы находим имеющее историческое значение утверждение о достижении разрешающей способности для деформации, равной 10^{-9}, но метод определения деформации никак не раскрывается; в одной фразе автор туманно ссылается на «чувствительную к деформации систему». Отбрасывание всех деталей эксперимента при описании результатов и взамен этого изложение неточных указаний на частные теории и предлагаемые модели демонстрирует достойное сожаления явление, заключающееся в том, что для многих интерес к эксперименту в данной области упал до весьма низкого уровня. Критику или ученому-исследователю, который хотел бы дать обзор этой литературы объективно сейчас или через сто лет, писать совершенно не о чем.

Прослеживая длинную историю исследования нелинейности при малых деформациях, можно видеть, что нелинейность наблюдалась в казалось бы идеально упругих твердых телах, в твердых телах, для которых оказывалось возможным измерить обратимое упругое последействие, в твердых телах, у которых эффект Савара — Массона (Портвена — Ле Шателье) можно было наблюдать при чрезвычайно малых деформациях, и, наконец, в твердых телах, в которых наблюдались остаточные деформации после разгрузки. Дальнейшее изучение этого вопроса потребует: (a) изучения твердых тел, у которых нелинейная функция отклика показывает разности деформаций достаточно большие для того, чтобы их можно было обнаружить при тщательных наблюдениях в условиях аппаратуры современной техники измерений; или (b) улучшения разрешающей способности для деформаций [1]) с величины 10^{-8}, достигнутой Грюнайзеном в 1906 г. до 10^{-9} или 10^{-10}.

2.29. Резюме

Дилемма, стоявшая перед Лейбницем в XVII веке по поводу явно противоречащих друг другу экспериментов Гука и Якова Бернулли, была разрешена в пользу последнего. Эксперименты за период в 280 лет убедительно продемонстрировали для каждого достаточно тщательно исследованного твердого тела, что деформация, возникающая от воздействия малого по значению напряжения, не является его линейной функцией.

Такое отсутствие линейности могло быть отнесено на счет ошибок эксперимента и обычных дефектов отдельных образцов. Могло считаться неудивительным обнаружение отклонений от прямой линии, но удивительно и обладает фундаментальным физическим значением обнаружение в совершенно независимых отдельных экспериментах, выполненных с 1811 г. до настоящего времени, одной и той же, в промежутках забываемой и вновь переоткрываемой нелинейной функции отклика при изучении одного вслед за другим многих твердых тел, включая все металлы. Исследование Дюпена по

---

[1]) В связи с этим представляют большой интерес совсем недавние исследования К. Хорвей Пальмера. Пальмер показал, что использование муаровых полос, получающихся при наложении изображений одной сетки Ронки на другую, позволяет проводить сверхчувствительные угловые измерения (Пальмер (Palmer [1969, 1, 2]), Пальмер и Холлман (Palmer and Hollmann [1972, 1])). Посредством сравнительно простой системы он мог измерять обычным образом изменения в углах в 10^{-9} радиана или даже меньше. Можно сконструировать прибор, который будет указывать или непосредственно изменения угла, или разность изменений между двумя отражающими поверхностями. Можно изучать частоты от нуля до одного мегагерца. Предварительные измерения были произведены для деформации и затухания на цилиндрических образцах из отожженных меди, бронзы и алюминия при деформациях в области от 10^{-10} до 10^{-4}. При незначительном увеличении длины образцов метод Пальмера делает возможным измерение деформаций, равных 10^{-11}. Свое усовершенствование Пальмер описал детально.

изгибу деревянных балок 1811 г., «закон Герстнера» 1824 г., «дефект упругости» Ходкинсона 1839 г., данные Баушингера по кручению 1881 г., «закон Хартига» 1893 г., интерферометрические эксперименты Грюнайзена 1906 г., «закон Сэйра» 1930 г. и выводы Ричардса 1952 г. были все экспериментальными проявлениями одного и того же поведения. Зависимость между нагрузкой и малой деформацией нелинейна, но ее касательный модуль — непрерывная линейная функция напряжения.

XIX век часто характеризуют как век, в котором главное внимание уделялось линейности, но при рассмотрении исследований, выполненных в каждом из его десяти десятилетий и в каждом из последующих семи XX века, всегда обнаруживаются усилия одного или большего числа экспериментаторов привлечь внимание к тому факту, что для всех серьезно изучавшихся твердых тел зависимость между напряжением и деформацией при малых деформациях была существенно нелинейной. Безапелляционные утверждения инженеров и атомистически ориентированных физиков о том, что квазистатические и динамические упругие свойства твердых тел при инфинитезимальных деформациях фундаментально линейны, вновь и вновь отделялись одно от другого последовательностью периодов успешных фундаментальных исследований нелинейных малых деформаций в механике сплошной среды — твердых деформируемых тел. Хотелось бы знать, означает ли экспериментальное изучение констант упругости третьего порядка начало нового, продолжительного, широкого понимания важности нелинейности при малых деформациях, или это будет еще одним случаем изолированного периода экспериментирования, который будет забыт в последующие десятилетия.

Факт неприменимости закона Гука был обусловлен экспериментальным открытием зависимости между аппроксимирующим модулем и предварительной остаточной деформацией, микропластичности, ползучести, термоупругости, упругого последействия, не непрерывного деформирования и условий устойчивости деформации в кристаллических твердых телах — все в течение десятилетия в 30-х гг. XIX века. Эти важные открытия не только подчеркнули экспериментальные трудности, возникающие при трактовке измеренной деформации, но также подчеркнули те факты, которые стали рассматриваться как фундаментальные проблемы, характерные для механики сплошного твердого деформируемого тела. В настоящей главе монографии я показал, как экспериментаторы после 1840 г. занимались исследованием выводов из этих наблюдений.

При рассмотрении многих явлений природы таких, как критическая точка при потере упругой устойчивости, супер- и субгармоники и другие общие особенности негармонических малых колебаний или дисперсии волн в невязкой среде, должна использоваться нелинейная зависимость между напряжением и деформацией, так как линейная полностью исключает возможность обнаруже-

ния этих явлений [1]. При внимательном изучении оказывается, что все твердые тела обладают упомянутыми свойствами. Кажущееся расхождение между наблюдаемыми фактами и предлагаемыми объяснениями выросло из столетия чрезмерно широко распространенного использования линейности.

Одним из самых важных аспектов механики сплошной среды в части, относящейся к твердым телам, и других разделов физики в настоящее время является то, что рациональная механика, необедненная сверхупрощениями и принимающая нелинейность как само собой разумеющуюся, дает основу для понимания физических явлений, согласующуюся с наблюдениями, полученными в течение более чем двухсот лет серьезного экспериментального изучения.

III. МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ: ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

3.1. Пионеры XVII века: Гук и Мариотт

Несомненно, что открытие Робертом Гуком в 1678 г. (Hooke [1678, 1]) при испытании пружин и длинных проволок линейной связи между силой и удлинением следует признать уникальным по тому влиянию, которое оно оказывало на научную мысль в течение трех столетий [1]). Это открытие отчасти зависело как от выбора материалов для исследования, так и от разрешающей способности при измерении деформаций. Как хорошо известно, Гук сначала заявил о своем законе в виде анаграммы, помещенной в конце работы о гелиоскопе в 1676 г. Анаграмме предшествовало следующее замечание: «Чтобы заполнить свободное место на этой странице, я добавил здесь *десятую часть* изобретений, которые намерен опубликовать...» (Hooke [1676, 1], стр. 151). В его списке из девяти наименований третьим было:

«3. *Точная теория упругости или пружинистости и подробное толкование ее для некоторых объектов, которые могут ей следовать, а также способ вычисления скорости тел, движимых ею* ceiiinosssttuv» (там же).

Гук отмечал, что он впервые открыл закон, который теперь носит его имя, еще в 1660 г. Однако от его опубликования Гука удержала не столько научная добросовестность, сколько стремление защитить свое изобретение спиральных часовых пружин; свои принципы он использовал для их конструирования.

«Отсюда вытекает причина, как будет вскоре показано, почему пружина, прикрепленная к балансиру часов, создает его одинаковые (по частоте.— *А. Ф.*) колебания независимо от того, больше они или меньше по величине (амплитуды.— *А. Ф.*), о чем я сообщил достопочтенному лорду виконту *Броункеру*, почтенному *Роберту Бойлю*, эсквайру и сэру *Роберту Морею* в 1660 г. с целью получения письменного патента, позволяющего использовать этот принцип и получать прибыль». (Hooke [1678, 1], стр. 337).

---

[1]) Роберт Гук в своей замечательной оригинальности как экспериментатор, не подозревающий существования логики математической представимости и поэтому не ограниченный ею, никоим образом не может быть героем, ответственным за влияние на чрезвычайно сильный успех в последующие столетия физики неслышимых звуков, невидимых колебаний и линейных колебаний в поле потенциальных сил.

Как бы ни подчеркивалась секретность, заключающаяся в использовании анаграммы, по утверждению Клиффорда Амбруаза Труселла (Truesdell [1960, 1], § 8), записи в дневнике Гука за сентябрь и октябрь 1675 г. содержат не только установление линейной зависимости, но также упоминание о дискуссиях с сэром Кристоффером Реном относительно пружин и о демонстрации им опытов на пружинах королю Англии Карлу II 6 октября 1675 г. Тремя годами позже в знаменитой теперь работе «О восстановительной способности или об упругости» (*De Potentia Restitutiva or of Spring*) анаграмма была расшифрована следующим образом: «Какова сила — таково растяжение» (*ut tensio sic vis*) (Hooke [1678, 1], стр. 333).

Тот же закон был независимо открыт Эдмом Мариоттом в 1680 г., т. е. через два года после расшифровки Гуком своей анаграммы в открытой печати. В течение последующего столетия многие авторы на континенте приписывали это открытие исключительно Мариотту. В 1690 г. Лейбниц, зная о вкладах и Гука, и Мариотта, на вопрос относительно обобщения первого высказал менение, что двух десятилетий оказалось недостаточно для Гука, чтобы его наблюдения приняли форму «очевидного закона», который так раздражал Мемке двадцатью десятилетиями позже. В связи с этим Труселл приводит интересную выдержку из письма Лейбница Христиану Гюйгенсу от 20 апреля 1691 г., в котором он пишет: «В Англии опубликовали небольшую книгу о пружинах, я полагаю, господина Гука, однако, как мне кажется, я нашел кое-что несправедливым в ней. Я прошу Вас описать мне эксперименты, которые, по Вашим словам, Вы проводили по этому предмету» (Truesdell, там же; стр. 62 (примечание)). Труселл указывает, что в последующей корреспонденции Гюйгенс признался, что он согласен с результатами Гука, но, только если пружины будут растянуты незначительно.

В своем *De Potentia Restitutiva* Гук описывает четыре типа экспериментов, в которых он осуществил свое открытие: определение общего удлинения цилиндрической винтовой пружины, изготовленной из металлической проволоки; определение закручивания плоской металлической спиральной пружины; определение удлинений при растяжении металлической проволоки длиной в 20, 30 или 40 футов; определение прогибов конца консольной деревянной балки. С экспериментальной точки зрения в первых двух типах экспериментов, а также в последнем распределение напряжений в испытывавшихся телах относительно сложное. Так как Гук не приводит численных значений, остается неясным, наблюдал ли он сравнительно большую деформацию в целом или же производил сравнительно тонкие измерения малой деформации. Тем не менее малые отклонения зависимости силы от деформации для металла и дерева от линейной вряд ли наблюдались бы и в том, и в другом случае.

Третий тип экспериментов имеет особое значение в свете исследований, описанных выше в гл. II. Учитывая указания Гука на то, что его измерения имели точность до 1 линии, т. е. одной двадцатой английского дюйма, мы можем заключить, что для проволоки 40 футов длиной он был в состоянии измерять деформацию порядка $2 \cdot 10^{-4}$, если все относящиеся к делу экспериментальные условия были в одинаковой степени приняты во внимание. Однако мы можем сомневаться в строгости Гука в этом отношении, читая его описание способа закрепления проволоки — предмета особой заботы в экспериментах Вика (Vicat [1834, 1]), Томлинсона (Tomlinson [1883, 1]) и Джозефа Осгуда Томпсона (Thompson [1891,1]). Так, например, Гук пишет:

«Или же возьмите проволочную струну длиною двадцать, тридцать или сорок футов и закрепите верхний ее конец на гвозде, а на другой конец подвесьте чашку весов для приложения нагрузки. Затем с помощью циркуля измерьте расстояние от низа чашки до грунта или пола под нею и запишите указанное расстояние, затем нагрузите эту чашку тем же способом, что и в предыдущем испытании, измерьте несколько удлинений струны и запишите их. Затем сравните несколько удлинений указанной струны и Вы найдете, что они будут в той же пропорции одно к другому, в какой будут веса грузов, которые их произвели» (Hooke [1678, 1], стр. 335).

Разумеется, закрепление в виде гвоздя должно было вносить заметный вклад в перемещение, измеряемое ниже этого закрепления. Возможно, некоторые читатели сочтут эти оговорки [1]) несущественными, так как интерес Гука был не в том, чтобы дать количественное выражение открытого им важного явления, а просто показать, что можно наблюдать равные отношения нагрузок и удлинений. Упомянутый гвоздь можно увидеть на диаграмме Гука, рис. 3.1, изображающей три типа экспериментов, которые он проводил со стальной проволокой [2]).

[1]) В истории математических результатов строгость, изящество, доказательность, эффективность и плодотворность оцениваются не только в контексте своего времени, но и на более широкой основе универсального разума. С другой стороны, экспериментатор, когда он, не достигнув таких вечных категорий, оправдывается исторически на основании предполагаемой или действительно имевшей место примитивности технического оборудования и средств исследований, которые на самом деле никак не относятся к делу, поскольку понимание экспериментального результата в любую эпоху лишь относительно связано с ограниченностью техники. Такие ограничения являются простой причиной неудач экспериментов, но не оправданием для нарушения логики. Можно отметить, что оцененные при помощи тех же строгих стандартов, которые применяются к математикам, фундаментальные достижения экспериментаторов в любой период прошлого или в наши дни обнаруживали поразительную дистанцию между превосходным и ординарным. Бюрократическое старшинство служит критерием превосходства, не бóльшим для физика-экспериментатора, чем для математика.

[2]) Этот важный гвоздь опущен в некоторых современных перерисовках (см., например, С. П. Тимошенко «История сопротивления материалов», 1957, стр. 30 русского издания.

Знаменитые эксперименты имеют тенденцию становиться легендой, освобожденной от всех допущений, деталей и ограничений, что создает удобство в использовании их всякий раз, когда они цитируются в качестве основания для всех возможных утверждений.

Гук не сделал никаких выводов относительно величины, представляющей собой отношение приращения силы к приращению удлинения. Рассмотрение результатов экспериментов с длинной проволокой с геометрической точки зрения в конечном счете вело к открытию E — модуля твердых тел; коэффициентом пропорциональности в зависимости между силой и удлинением геликоидальной пружины оказалась бы величина, содержащая модуль упругости при сдвиге μ. Однако такое рассмотрение было оставлено для экспериментаторов другого столетия.

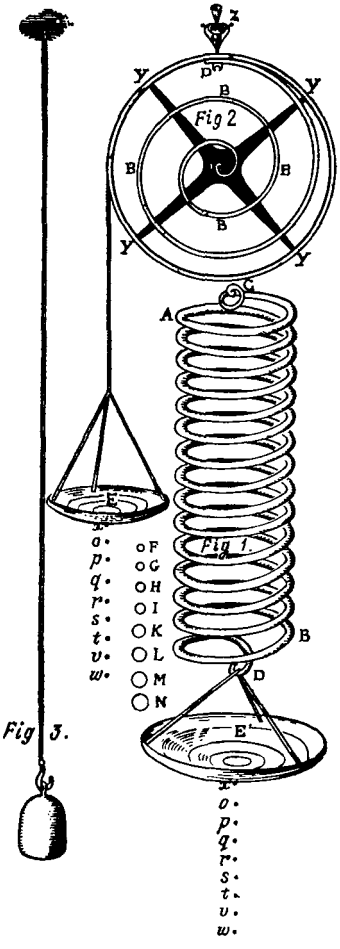


Рис. 3.1. Три экспериментальные ситуации в опытах, проведенных Гуком с железной проволокой (1678).

Тот факт, что при достаточно малых деформациях была обнаружена линейная зависимость между ними и напряжениями в металлах и других материалах, выразившаяся в конце концов в том, что теперь принято называть обобщенным [1] законом Гука (независимо от того, было ли это только аппроксимацией в свете возрастающей точности измерения деформаций), дал мощный инструмент для экспериментального исследования природы деформируемых сплошных тел. Если бы в XVII веке для твердых тел наблюдались исключительно нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями, то большинство достижений в развитии физики и особенно техники, имевших место за прошедшие 200 лет, задержалось бы на несколько столетий. Даже в XVII веке было достаточно данных относительно разрушающей тело нагрузки и отсюда нетрудно установить, что если бы Гук действительно достиг имевшейся в его распоряжении потенциальной разрешающей способности 10^{-4} при определении деформаций, то, как показывают несложные вычисления, минимальная [2] деформация, которую можно было бы наблюдать, имела бы порядок 10^{-3}. Если бы Гук проводил свои эксперименты даже с наибольшей тщательностью, то, как нетрудно видеть сейчас с точки зрения современных знаний о природе и степени нелинейности зависимости между напряжением и деформацией при малых деформа-

циях железа, описанных выше в гл. II, он смог бы обнаружить только линейную зависимость для железной проволоки.

За более чем 290 лет, прошедших с тех пор, как Гук расшифровал свою анаграмму, было написано огромное число работ о постоянных в зависимостях, связывающих напряжения и деформации почти

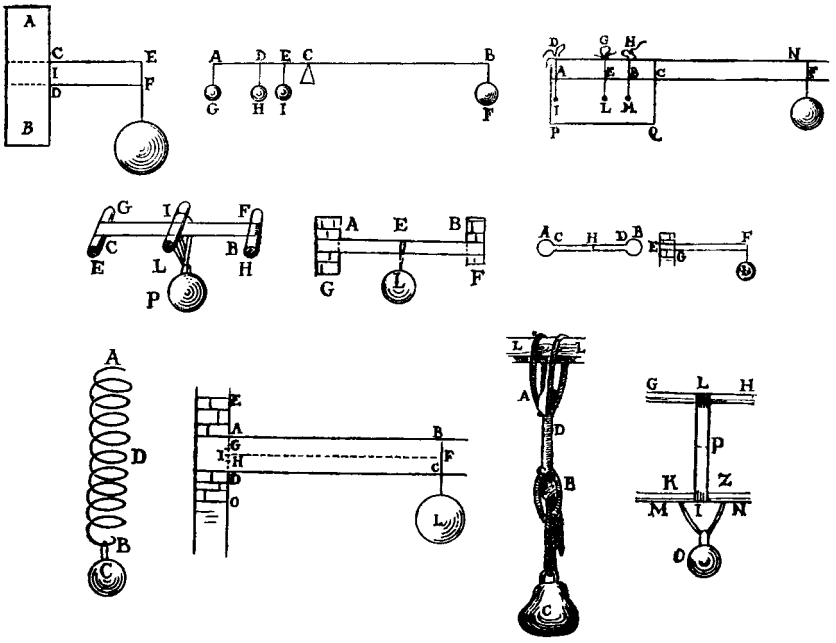


Рис. 3.2. Образцы и условия их испытания в экспериментах Мариотта (1700).

для всех известных твердых материалов. Подавляющее большинство экспериментальных исследований на эту тему посвящено определению или модуля E (последние 150 лет исторически несправедливо связанного с именем Юнга), или же модуля μ, называвшегося до 1850 г. модулем «скольжения», для материалов, которые, как мы можем предполагать, были изотропными. Значения этих величин определялись с помощью прямого измерения деформаций при квазистатическом нагружении, измерения продолжительности прохождения одномерных волн в экспериментах на сравнительно больших образцах, измерения частот продольных, поперечных или крутильных колебаний стержней, а также в последнее время с помощью методики, основанной на распространении ультразвуковых волн.

Начиная с XIX века, появлялись внешне не столь заметные, но содержательные работы, посвященные правомочности или точности упомянутых выше различных методов определения значений модулей. Правильнее сказать — основной интерес состоял в вопросе,

действительно ли сохраняется во всем объеме тела в течение всего времени проведения опыта предполагаемое простое распределение напряжений и деформаций? Так как мы обсуждаем здесь значение модулей упругости как для изотропных, так и для анизотропных тел, а также влияние на эти значения в отмеченных телах ряда факторов, проследим теперь развитие понятия модуль материала, которое в конечном итоге обеспечивает количественное выражение закона Гука.

Некоторые образцы Мариотта, изображенные на рис. 3.2, характеризуют те лабораторные средства, которыми располагал выдающийся экспериментатор XVII века.

При обсуждении деформации цилиндрической пружины Мариотт считал ее однородной, так как все витки находились на одинаковом расстоянии друг от друга. Та же однородность удлинения наблюдалась в длинном шнуре, нагруженном на конце. Обратимся к его записям:

«...все его части испытывают одно и то же удлинение, так что верхние не менее удлинены, чем нижние, причем и короткий, и длинный шнуры удерживают тот же вес, за исключением ситуации, когда длинный шнур, имея какой-нибудь дефект, разорвется раньше, чем короткий» (Mariotte [1700, 1], стр. 372—373).

Ту же однородность он наблюдал в полосах из белого чугуна.

В части 5 того же тома, обсуждая общие свойства дерева, железа и других материалов, чьи волокна соединены и переплетены между собой, Мариотт фактически разделяет с Гуком славу открытия линейной упругости, так как он независимо указал, что при продольном удлинении образцов:

«...их части могут удлиняться более или менее в зависимости от нагрузки, и, наконец, существует удлинение, при котором они разрушаются, так что, например, если деревянный брус для того, чтобы быть разрушенным, удлиняется на две линии и это удлинение вызывает нагрузка 500 фунтов, то 125 фунтов удлиняет его примерно на половину линии, 250 фунтов — на линию и т. д. и так каждое удлинение будет сбалансировано с некоторой нагрузкой» (там же, стр. 352).

Разумеется Мариотт имел в виду квазистатический эксперимент.

3.2. Эксперименты до 1780 г.: Риккати, Мусшенбрук, Гравесанд, Кулон; введение Эйлером концепции модуля упругости

Труселл сообщает, что в 90-х гг. XVII века Лейбниц уже знал о том, что упругие и акустические свойства тел между собой связаны, например, о том, что частота колебаний возрастает с увеличением жесткости или твердости тела (Truesdell [1960, 1]). В 1748 г. в работе, которая, как отмечает Труселл (там же, стр. 115 (примечание)), основана на исследовании, восходящем к 1720 г., Джакопо Риккати, несмотря на странное пренебрежение к эксперименту как

основанию для выводов, предположил, что об упругих свойствах тел можно судить по частоте колебаний [1]).

В отношении экспериментов Джордано Риккати был более удачлив в семейной лотерее. Пойдя дальше предположений отца, высказанных 60 годами раньше (см. Truesdell [1960, 1], стр. 115), он определил по экспериментально измеренной частоте изгибных колебаний стальных и латунных цилиндров отношение их E-модулей [2]): $E_{\text{сталь}}/E_{\text{латунь}}=2{,}06$. Тем самым Джордано Риккати провел первое экспериментальное исследование модулей упругости материалов задолго до исследований Томаса Юнга в 1807 г. Следует отметить, что значение отношения, полученное Джордано Риккати, согласуются с найденным в экспериментах настоящего времени.

Что касается первоисточника величины, обычно называемой «модулем Юнга», то Труселл обнаружил идею, высказанную в манускрипте Эйлера, написанном в 1727 г., за 80 лет до того, как Томас Юнг (Young [1807, 1]) ввел в литературу по механике твердого тела свое понятие «высота модуля» и «вес модуля». Хотя манускрипт Эйлера не был опубликован до 1862 г. Эйлер ввел понятие модуля и применил его в работе 1766 г., а Джордано Риккати использовал его в статье, опубликованной в 1767 г. (Truesdell [1960, 1], стр. 402). Численное значение модуля упругости, являющегося константой материала, не должно зависеть от размера и формы образца. Труселл показывает что Эйлер после введения модуля E «в точности в современном смысле» выбрал для использования вместо модуля упругости материала величину, включающую множитель $1/(\rho g)$, т. е. величину, обратную весовой плотности, а именно $h=E/(\rho g)$.

Разумеется, эта величина, которая имеет размерность длины, также не зависит от формы и размеров тела. Как будет видно из дальнейшего, величина h является в точности тем, что 32 годами позже Юнг назвал «высотой модуля». В современной терминологии E — это модуль продольной упругости, обычно называемый модулем Юнга [3]), однако сам Юнг никогда не вводил такого понятия. Его «высота модуля» зависела от плотности материала, а «вес модуля» — от размеров образца. Как одна, так и другая величина не являются константами материала в собственном смысле слова, и поэтому их употребление нежелательно, хотя «высота модуля» и не зависит от

---

[1]) Jacopo Riccati: Verae, et germanae virium elasticarum leges ex phaenomenis demonstratae. De Bonononiensi sci. art. inst. acad. comm. 1, 523—544—Opera 3, 239—257 (см. Truesdell [1960, 1], стр. 115).

[2]) Giordano Riccati: Delle vibrazioni sonore dei cilindri. Mem. mat. fis. soc. Italiana 1, 444—525 (1782) (или см. Truesdell [1960, 1], стр. 328—329).

[3]) Очевидно, для исторической точности E следовало бы назвать «модулем Эйлера», хотя, сам чрезвычайно богатый научными результатами, Эйлер проявлял к нему, несомненно, менее чем умеренный интерес. Возможно, первым экспериментатором, определившим эту константу материала должным образом, в современном смысле, т. е. независимо от плотности материала и формы и размеров образца, был Альфонс Дюло (1812 г.).

формы и размеров, она зависит от плотности и, следовательно, требует измерения последней для каждого конкретного образца.

Хотя и без экспериментального обоснования, понятие модуля упругости встречалось в теоретической литературе более 20 лет, поэтому не удивительно, что в 1780-х гг. Шарль Огюст Кулон (Coulomb [1780, 1]) и Джордано Риккати (Riccati [1782, 1]) в экспериментальных исследованиях стремились к установлению их численных

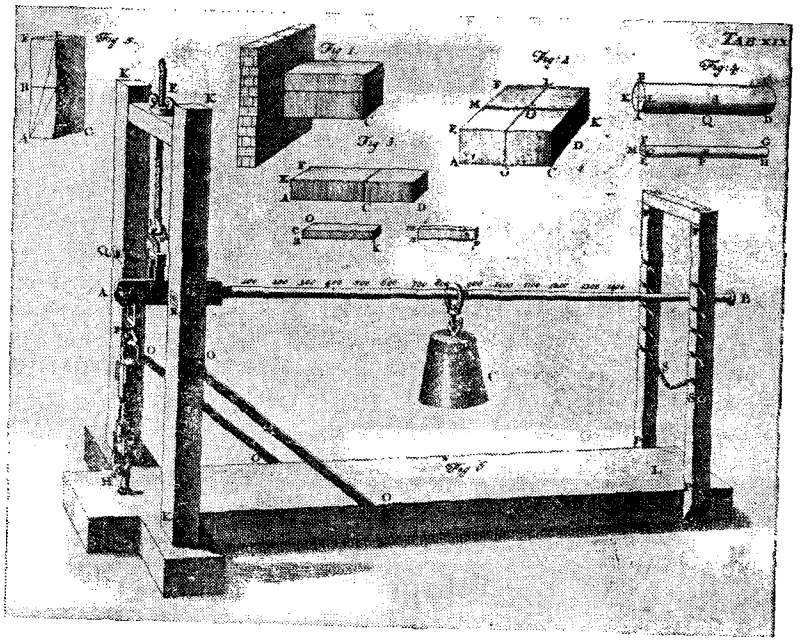


Рис. 3.3. Установка Мусшенбрука (1729) для испытания образцов на растяжение.

значений. Кулон с полным пониманием вопроса впервые нашел экспериментально значение константы упругости материала — модуль сдвига μ в смысле современной теории континуума. Джордано Риккати экспериментально установил отношение значений E-модулей для двух материалов.

Продолжая следовать глубокому изложению Труселла развития идей в механике твердого тела в XVIII веке, мы обнаруживаем, что Даниил Бернулли (Daniel Bernoulli [1751, 1]) в сороковых годах XVIII века ссылается на эксперименты по колебаниям стержней, различно закрепленных по концам, для которых он нашел относительное расположение узлов при различных формах колебаний, находящееся в хорошем соответствии с его теоретическими предсказаниями. Так как Бернулли привел лишь некоторые детали и никаких других данных, кроме нескольких рисунков, изображающих

формы колебаний и узловые точки, современному экспериментатору трудно прокомментировать сами измерения или их корреляцию с теорией. Однако, как отмечает Труселл, Бернулли был первым,

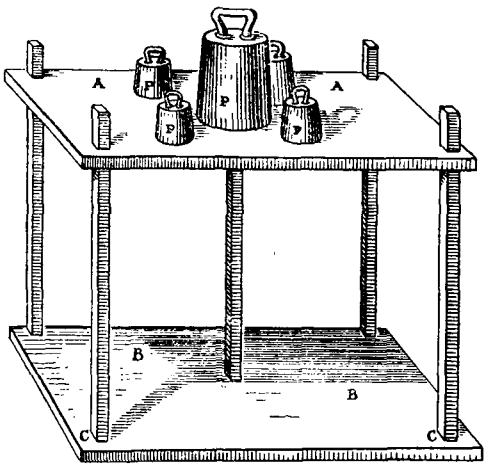


Рис. 3.4. Установка Мусшенбрука (1729) для испытания образцов на сжатие.

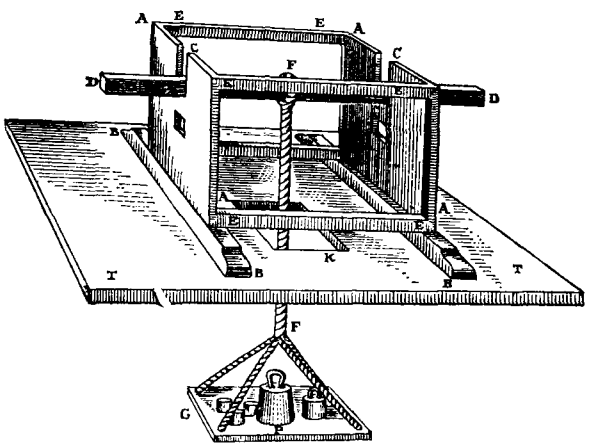


Рис. 3.5. Установка Мусшенбрука (1729) для испытания образцов на изгиб.

кто попытался установить эту корреляцию. Ситуация здесь аналогична той, в которой теоретик, опустив или первоначальные допущения, или свои доказательства, просто приводит окончательный результат.

Рассматривая других предшественников внезапного становления экспериментальной механики твердого тела в это необычное десятилетие — 80-е гг. XVIII века, следует упомянуть широкие и систематические исследования Питера ван Мусшенбрука (van Mus-

schenbroek [1729, 1], [1739, 1]), в книге которого «Экспериментальная физика и геометрия» *(Physicae Experimentales et Geometricae)* можно найти изображение первых машин для испытаний на растяжение, сжатие и изгиб. Эти машины показаны на рис. 3.3, 3.4 и 3.5.

Эти испытательные машины с незначительными изменениями и сейчас могли бы использоваться в лабораториях экспериментаторов, сохранивших интерес к испытаниям на машинах с нагружением мертвой нагрузкой. К сожалению, почти все исследования Мусшенбрука

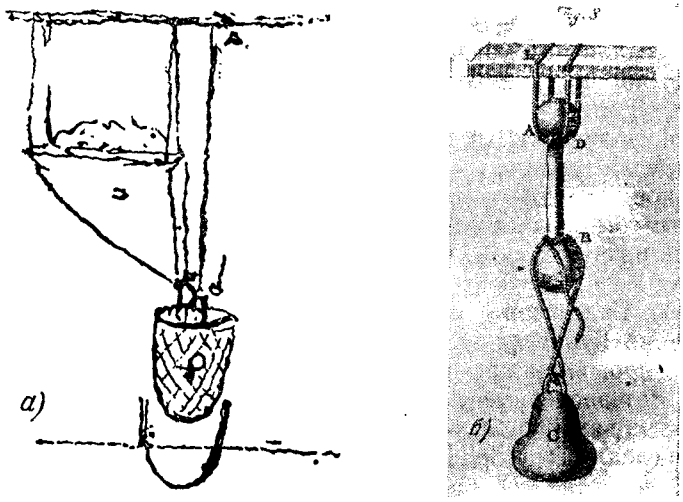


Рис. 3.6. Рисунки экспериментов, описанных учеными; *а*) Леонардо да Винчи; *б*) Мариоттом (1680).

относились к проблемам разрушения, но подобно графу де Бюффону, работавшему примерно в то же время, он измерял значение деформации [1] непосредственно перед разрушением. Если бы человек его великолепных способностей заинтересовался определяющими уравнениями, относящимися к работе конструкции (образца) до разрушения, экспериментальная механика твердого тела могла бы дать существенный толчок развитию теории и интерпретации фактов уже в середине XVIII века. Мусшенбрук осуществил также ряд важных экспериментов на выпучивание (потерю устойчивости).

Как мы видели в предыдущей главе (раздел 2.18), до работ Баушингера в 80-х гг. XIX века почти все опыты были опытами на растяжение. Исключением, конечно, являются довольно грубые опыты Ходкинсона в 40-х гг. XIX века, которые описаны в гл. II, раздел 2.6.

Мы упоминали эксперименты Жоржа Луи Леклерка, графа де Бюффона, Дюамеля и Эмиланда Мари Готэ в середине XVIII века как прелюдию к экспериментам Пьера Дюпена по исследованию не-

линейности при малых деформациях. Надо сказать, что эти эксперименты, а также опыты Мусшенбрука и Мариотта, интерес которых был сосредоточен почти полностью на явлении разрушения, не оказали решающего влияния на идеи Кулона, Хладни и Джордано Риккати в 80-х гг. XVIII века, на которых, очевидно, гораздо сильнее повлияли более ранние теоретические работы Эйлера и Бернулли.

Чтобы дать более законченную картину состояния экспериментальных приспособлений, имевших место до 80-х гг. XVIII века, на рис. 3.6 приведено изображение опыта на растяжение, выполненного Мариоттом (1680 г.), а также набросок Леонардо да Винчи (1452—1519). Они интересны в отношении приспособлений, использовавшихся для разрушения. Труселл приводит забавное замечание Мусшенбрука по поводу приборов Мариотта для опытов на растяжение: «В этом способе я заметил неудобство, заключающееся в том, что ноги экспериментатора подвергаются опасности быть ушибленными, если груз сорвется» (см. Truesdell [1960, 1], стр. 151).

Никакое описание экспериментов и приборов XVII века не было бы полным без показа рисунка опытов Галилея, проведенных в 1638 г. по разрушению консольных балок нагрузкой, приложенной на конце [1]).

В 1720 г. Гравесанд (s'Gravesande [1720, 1]) предложил проверять соотношения Гука между нагрузкой и удлинением с помощью нагружения проволоки посередине ее длины, как это показано на рис. 3.8. На этот эксперимент часто ссылались почти до середины XIX века как на важную веху в экспериментальной механике твердого тела. Труселл (Truesdell [1960, 1], стр. 117) показал с большой детализацией, что если проволока в эксперименте Гравесанда предварительно натянута продольными силами после опирания проволоки на фиксированные клинья, то нагрузка P должна была бы быть

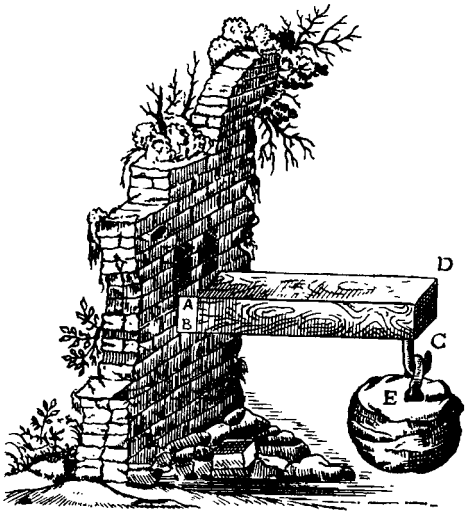


Рис. 3.7. Эксперимент Галилея с балкой, проведенный в 1638 г.

[1]) См. рисуиок Галилея на стр. 224 (рис. 3.7). Чертеж приспособления, дополненный такими деталями, как трава и кирпичи, перерисовывался, в случае необходимости, вплоть до середины XIX века; свидетельством тому, например, является фигура, содержащаяся в книге Питера Барлоу *Treatise on the Strength of Timber, Cast Iron, Malleable Iron, and Other Materials)* («Изучение прочности лесоматериалов, чугуна, ковкого железа и других материалов»), опубликованной в 1837 г. [1847, 1].

пропорциональной удлинению δ независимо от вида связи между напряжениями и деформациями для материала проволоки. С другой стороны, если концы проволоки были бы закреплены, то пропорциональность между нагрузкой и прогибом ограничивалась бы малыми деформациями и наблюдалась бы только в случае отсутствия предварительного натяжения проволоки. Если закрепленная по концам проволока натянута, то, как показал Трусделл, нагрузка была бы пропорциональна кубу прогиба.

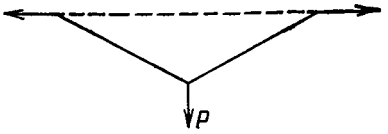


Рис. 3.8. Эксперимент Гравесанда, поставленный в 1720 г.

Спустя 169 лет, в 1889 г. Эдуард Таке (E. Tacke [1889, 1]) заинтересовался исполнением опыта Гравесанда. На основании своего исследования он счел невозможным получать сколько-нибудь полезную информацию из этого эксперимента. Позднее Фридрих Кольрауш (Kohlrausch (см. Stradling [1890, 1])) подверг сомнению справедливость этого заключения. Он высказал соображение, что опыт следует начинать с того, чтобы проволока была натянута некоторой первоначальной нагрузкой, которая вызвала бы определенный прогиб, затем добавить вторую нагрузку, чтобы вызвать дополнительный прогиб и, таким образом, получить данные, из которых можно определить модуль упругости. Это, конечно, в соответствии с более поздним независимым анализом вопроса, выполненным Трусделлом (Truesdell [1960, 1], стр. 117), является единственным условием, при котором может быть проверена линейность связи между напряжениями и деформациями в экспериментах такого рода [2].

Кольрауш предложил студенту Георгу Страдлингу (G. Stradling [1890, 1]) определить экспериментально, сравнимы ли значения модулей, найденные из опыта Гравесанда и точно полученные из испытаний на продольное растяжение той же проволоки. Определенные Страдлингом значения модулей приведены в табл. 32. Несмотря на оптимизм Страдлинга, эксперимент Гравесанда, очевидно, нельзя считать методом для точного определения постоянных упругости [1]).

Среди десятков тысяч экспериментов на разрушение, проведенных за последние три или четыре столетия, опыты Кулона в 1773 г. по сравнению разрушения при растяжении с разрушением при сдвиге были определенно одними из наиболее важных. «Блок белого камня,

[1]) Возможно, звучит иронией то, что эксперимент Гравесанда, на который так часто ссылались, не внес, да, пожалуй, в силу ограниченности представлений в начале XVIII века и не мог внести вклада, на который претендовал, на самом деле заинтересовал профессора Кольрауша нелинейными малыми деформациями и, как было отмечено выше, привел непосредственно к исчерпывающему труду Джозефа Осгуда Томпсона и Грюнайзена. Это произошло не непосредственно из-за самого эксперимента Гравесанда, а вследствие той нелинейности, которую наблюдал Страдлинг, рассматривавший свои испытания на растяжение длинных проволок, проведенные в башне в Дрездене для сравнения с экспериментальными данными Гравесанда.

Таблица 32

Страдлинг (1890)

	Железо		Латунь		Сплав никеля с серебром
	I	II	III	IV	V
Метод Гравесанда	20 560	20 450	9 610	9 470	15 380
Метод определения, основанный на осевой деформации образца	20 300	19 740	10 140	9 130	15 680

хорошо ограненный и однородный» (Coulomb [1773,1], стр. 348), был подвешен, как показано на рис. 3.9. Блок имел толщину, равную одному парижскому дюйму, и площадь поперечного сечения, равную

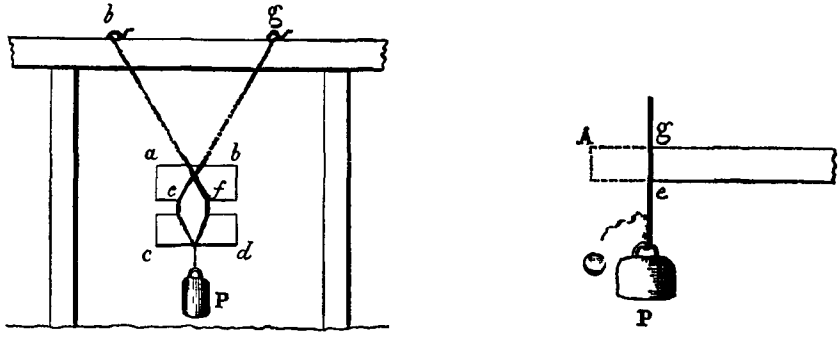


Рис. 3.9. Рисунок Кулона опытов на разрушение при растяжении и сдвиге (1773).

одному квадратному парижскому футу[1]). В подробных примечаниях было сказано: «Этот камень был найден в окрестности Бордо и использовался для облицовки фасадов больших зданий в этом городе». (Coulomb, там же, стр. 348). Для разрушения блока по линии *ef* потребовалась нагрузка 430 фунтов, что соответствовало напряжению[2]) 215 фунт/дюйм^2.

Кулон констатировал: «Я хотел проверить, понадобится ли для разрушения куска камня при нагружении его вдоль плоскости разрушения тот же самый вес, который был разрушающим в предыдущем эксперименте при нагружении перпендикулярно этой плоскости (Coulomb [1773,1], стр. 348). Он нашел, что обе нагрузки эквивалентны, соответствуя напряжениям 215 фунт/дюйм^2 при растяжении и 220

[1]) 1 парижский фут = 0,3248 м; 1 парижский дюйм = 2,707 см.

[2]) Как отмечает Труселл (Truesdell [1960, 1], стр. 397), это было первое по времени использование экспериментатором концепции напряжения, а не силы.

фунт/дюйм^2 при сдвиге. Далее он указал эксперимент на сжатие для разрушения посредством сдвига (см. рис. 3.10). Затем он сделал следующее замечание об идеях, высказанных Мусшенбруком относительно разрушения каменных столбов:

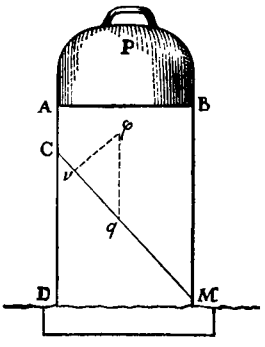


Рис. 3.10. Рисунок Кулона разрушения путем сдвига при сжатии (1773).

«В заключение я должен заметить, что способ, которым г. Мусшенбрук определяет усилия в каменном столбе, не имеет ничего общего с тем, которым пользовался я. Столб, сжимавшийся силой, направленной вдоль его длины, разрушился, как утверждает этот прославленный физик, только потому, что начал изгибаться; иначе он сопротивлялся бы большей нагрузке. На основании этого принципа он определяет разрушающую нагрузку в столбе с квадратным сечением в отношении, обратно пропорциональном квадрату его длины и пропорциональном кубу стороны его основания; таким образом, если бы столб, разрушающее усилие в котором мы только что вычислили, имел бы в два раза меньшую высоту, он выдерживал бы в четыре раза больший вес, т. е. 832 фунта, в то время как, я полагаю, мне удалось показать, что он едва будет нести ту же самую нагрузку, т. е. 208 фунтов». (Там же, стр. 355—356.)

3.3. Начало экспериментальной механики твердого тела как науки: изучение Кулоном кручения в 80-х гг. XVIII века

Представляет интерес ознакомиться с мемуаром, написанным Кулоном в возрасте 37 лет, являющимся прелюдией к его классической экспериментальной работе по кручению проволоки, изданной одиннадцатью годами позже, в 1784 г. (Coulomb [1784, 1]), работе, которая, если не для теоретиков, то для экспериментаторов и в наше время может быть поставлена в ряд наиболее важных трудов по экспериментальной механике твердого тела.

В 1777 г. Кулон представил подробный очерк по теоретическому и экспериментальному определению магнитных сил (Coulomb [1780,1]) [1]. Этот очерк включал изучение лучших методов намагничивания стрелок, а также, что здесь представляет наибольший интерес, серию из шести экспериментов по крутильной прочности волос и шелковых нитей, использовавшихся в висячих системах. Эта экспериментальная работа, относящаяся к механике сплошных сред, вероятно, наиболее известна в настоящее время среди специалистов, далеких от данной области. Мы рассмотрим по возможности некоторые из ее деталей, так как эти опыты положили начало серии, которая достигла кульминации семью годами позже в его (Кулона) экспериментах по кручению металлических проволок.

[1]) В окончательном виде статья была опубликована в эту последнюю дату.

Глядя на работы Кулона глазами механика XX века, можно счесть примечательным, что в начале раздела о кручении в своем мемуаре Кулон выражает уверенность в том, что «Мы не можем здесь сослаться на труды каких-либо авторов...» Далее этот необыкновенно компетентный экспериментатор дает понять о своем отношении к науке: «...однако то, о чем я хочу сообщить, так просто и так легко повторить, что, как мне кажется, заслуживает некоторого доверия» (там же, стр. 201).

Среди других его особенностей как экспериментатора может быть отмечено выдающееся мастерство. Кроме явно необходимого условия — оригинальности, ему были присущи восприимчивость и вкус в выборе проблем, интуитивное чутье, при наличии которого можно ожидать скорее расширенного понимания, чем постановку ограничения в исследуемой области, эстетическая простота, полнота системы хорошо определенных предположений и логическое развитие при использовании различных экспериментальных перспектив, ведущее к новым категориям понимания того, окончательно ли отброшена физическая применимость внушающих доверие предварительных объяснений или точно определена основная структура, которая должна содержаться в любом иовом предлагаемом объяснении. В процессе работы область исследоваиия должна быть количественно и качественно определена, а вопросы, лежащие за пределами этой области, но связанные с нею, рассмотрены по крайней мере в первом приближении. Кулон был первым из тех, кто понял необходимость такого подхода к эксперименту в механике твердого тела. Его работа до сих пор остается образцом введенного им метода, а его самого следует считать одним из немногих выдающихся экспериментаторов в этой области физики.

В своих исследованиях в 1777 г. Кулон осуществил шесть экспериментов в следующем логическом порядке:

В первом опыте круглый медный диск диаметром 3/4 парижского дюйма и весом 250 гранов был подвешен в центре на человеческом волосе длиною 6 парижских дюймов. Диск находился в горизонтальной плоскости. Поворачивая диск вокруг оси волоса, Кулон наблюдал, что период колебаний оставался постоянным и равным 8с «независимо от того, совершал ли этот диск один, два или до шести-семи поворотов в своем колебательном движении», откуда он заключил, что «крутящий момент, возвращающий тело в первоначальное положение, с необходимостью пропорционален углу закручивания» (Coulomb [1780, 1], стр. 202).

Во втором эксперименте на тот же волос длиною 6 дюймов Кулон последовательно дополнительно подвешивал по одному идентичные диски, используя воск для предотвращения проскальзывания, до тех пор, пока их число не достигло 7. Он отметил, что так как радиусы всех дисков одинаковы и диски расположены в виде вертикальной пачки, то в соответствии с предыдущим расчетом (в первом опыте) оказывается, что квадрат периода колебаний должен быть пропор-

Таблица 33

Кулон (1780)

Номер опыта	Количество дисков	Период колебаний		Номер опыта	Количество дисков	Период колебаний	
		теория (с)	эксперимент (с)			теория (с)	эксперимент (с)
I	1		16	V	5	35,8	35
II	2	22,6	22	VI	6	39	39
III	3	27,7	27	VII	7	42,3	42
IV	4	32,0	30				

циональен числу дисков. Показанные на рис. 3.11 результаты действительно согласуются с предсказаниями.

Чтобы иметь более детальное сравнение теории с экспериментом, ознакомимся с выполненным Кулоном расчетным предсказанием периода колебаний в каждом последующем опыте на основании периода в первом опыте. Из этого сравнения, показанного в табл. 33, Кулон убедился в близости теоретических и экспериментальных значений и, более того, заключил, что масса тел, подвешенных на волосе, или что-либо другое, вызывающее такое же растяжение этого волоса, совсем не влияет на восстанавливающий крутящий момент (там же, стр. 203). Как указал Кулон, его последнее заключение справедливо только в том случае, когда полный вес относительно невелик.

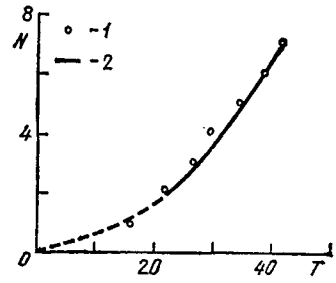


Рис. 3.11. Сравнение теоретических и экспериментальных данных, полученных Кулоном (1780), относящихся к зависимости между периодом крутильных колебаний и числом дисков, подвешенных на волосе человека. *1* — эксперимент, *2* — теория, *T* — период колебаний в с, *N* — число дисков.

Очевидное фокусирование интересов ученых середины XIX века на механике твердого тела сделало одинаково важными остальные заключения Кулона из этого второго опыта. Они не только очерчивают область реализации наблюдаемого поведения, но также ставят ряд важных вопросов, из которых некоторые остаются без ответа и в наше время. Кулон пишет:

«Тем не менее следует отметить, что когда вес тел существенно возрастает и когда волосы или шелковые нити близки к разрыву, указанная закономерность не выполняется точно; крутящий момент представляется существенно убывающим, колебания уже не являются изохронными; период колебаний с большей амплитудой заметно больше, чем с меньшей; происходит все это потому, что нить, подвергнутая слишком большому растяжению, утрачивает упругие свойства, подобно стержню, который пружинит до тех пор, пока не изогнут до некоторого предела» (там же).

В третьем эксперименте, в котором использован один медный груз, Кулон исследовал влияние длины волоса на период колебаний. Табл. 34 содержит наблюденные и предсказанные периоды колебаний, причем определение последних основывалось на использовании вычисленной разности между двумя приращениями периода, возникающими при переходе от длины волоса, равной 3 дюймам, соответственно к 12 дюймам и 6 дюймам.

Результаты четвертого эксперимента не совпали с теоретическими предсказаниями. Используя однородные шелковые нити и волосы, Кулон попытался определить влияние диаметра на крутящий момент. Из-за трудности измерения диаметров таких образцов, которая, как мы видели, ограничивала экспериментальные исследования Вебера в 1830 г., а также Вертгейма, Вундта и Фолькмана в 1840—1850 гг., Кулон сравнивал результаты большого количества опытов с однородными шелковыми нитями одинаковой длины. Оказалось, что экспериментальные результаты не совпадают с теоретическими. Крутящий момент был пропорционален «кубу» диаметра. Хотелось бы знать, не это ли расхождение дало толчок к последующему исследованию Кулоном кручения проволоки. В 1784 г. он понял, что измерение среднего диаметра можно сравнительно легко осуществить путем взвешивания образцов известной длины.

Таблица 34

Кулон (1780)

Номер опыта	Длина волоса (дюймы)	Период колебаний (эксперимент) (с)	Сравнение с опытом I (теория) (с)
I	3	11/2	—
II	6	16/2	15/2+1/4
III	12	22/2	22/2

В пятом эксперименте Кулон имел дело с простой шелковой нитью «такой, какая получается из кокона». Нить имела длину, равную всего одному дюйму, и к концу ее прикреплялся кусок латунной проволоки, которая лучше изображала магнитную стрелку, поскольку его интересовал лишь аспект проблемы, связанный с крутильным маятником, а не аспект магнитных свойств. Заменив медный диск латунной стрелкой, а волос шелковой нитью, Кулон установил, что колебания вновь были изохронными. Период колебаний составлял 40 с.

В шестом эксперименте Кулон изучал шелковую нить длиной в 20 дюймов, скомпонованную из 12 прядей, соединенных между собой и скрученных. Колебания снова были изохронными, но с периодом лишь 29 с. По двум периодам Кулон установил, что крутящий момент (ранее было показано, что крутящие моменты обратно пропорциональны квадратам периодов колебаний) в данном опыте в 1,9 раза (или приблизительно в 2 раза) превышает крутящий момент в предыдущем эксперименте. Затем он внес это отношение в свои предыдущие вычисления. Таким образом, была продемонстрирована практическая важность того, что скручивание шелка (нитей)

может иметь лишь незначительное влияние на положение магнитных стрелок, подвешенных на них (там же, стр. 208). В заключительном замечании Кулон обращает внимание на то, что сопротивление воздуха возможно является важным источником ошибок. Он исследовал этот вопрос в своем мемуаре о колебаниях металлических проволок (Coulomb [1784, 1]).

В 1784 г. с опубликования Кулоном его классического мемуара, озаглавленного «Recherches théoriques et expérimentales sur la Force de Torsion et sur l'Élasticité des Fils de Métal» (там же), наступила новая эра в механике твердого тела. Понимание Кулоном роли эксперимента и его связи с теорией, а также присущий ему логический стиль представления результатов делают его мемуар образцом, настоятельно рекомендуемым студентам, изучающим экспериментальную механику.

В этом исследовании, как отметил Кулон, он поставил перед собой две задачи. Во-первых, он стремился к установлению закона, которому подчиняются крутящие моменты, исходя из предположения, что они пропорциональны углу закручивания. В частности, он хотел определить упругое сопротивление закручиванию железных и латунных проволок в зависимости от их длины, размеров поперечного сечения и степени натяжения. При этом он отмечал, что для решения первой задачи следует ограничиться опытами на колебания с малой амплитудой, чтобы получить согласованность экспериментальных результатов с теоретическими. Второй его задачей было изучение отклонения от упругости металлической проволоки и обнаружение закономерностей, которые управляют упругими деформациями в области относительно больших колебаний. Его окончательной задачей было добиться понимания природы прочности и упругости металлов.

Кулон описал результаты 67 отдельных опытов в 21 эксперименте. Он отметил, что в указанное число опытов включена только часть, так как остальные дают повторение результатов. Первые его 13 экспериментов были посвящены изучению крутящего момента. Три широко распространенных железных струны для клавикордов, обозначаемых в дальнейшем #12, #7 и #1, длиной 9 парижских дюймов [1]) каждая (24, 36 см), были подвешены вертикально и к их концам прикреплены круглые свинцовые цилиндры. Первый, третий и пятый эксперименты производились с проволоками каждого из трех указанных выше видов; вес цилиндра был равен 1/2 фунта, его диаметр составлял 19 парижских линий (4,29 см) и высота — $6^1/_2$ парижской линии (1,47 см). Второй, четвертый и шестой эксперименты проводились с идентичными проволоками; вес цилиндра был доведен до 2 фунтов, т. е. увеличен в 4 раза, причем диаметр прикрепляемого свинцового цилиндра оставался тем же самым. Кулон не приводит

[1]) 6 парижских футов = 1,94904 м; 1 парижский фут = 0,3248 м; 1 парижский дюйм = 2,707 см; 1 парижская линия = 1/12 парижского дюйма = 0,2256 см.

диаметров проволок, однако, как он указывает, для каждой из них диаметр может быть вычислен по известному ее весу и длине, равной 6 парижским футам. Вычисления дают диаметры 0,015, 0,025 и 0,051 см для струн #12, #7 и #1 соответственно. (В последней части своей работы Кулон вычислил диаметр струны #12, равный почти точно 1/15 парижской линии.)

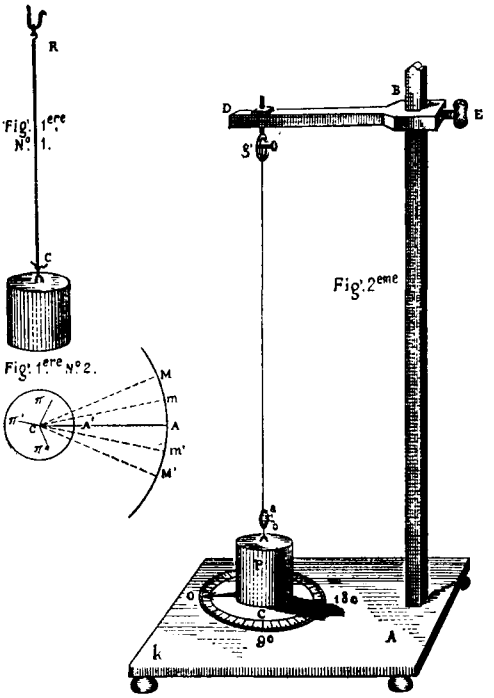


Рис. 3.12. Рисуиок Кулона его прибора (для изучеиия в 1784 г. крутильных колебаний).

Описанные шесть экспериментов были повторены с образцами #12, #7 и #1 из латунных проволок тех же диаметров и длин с теми же свинцовыми цилиндрами на концах.

Было бы интересно проследить за систематичностью экспериментальной логики Кулона, однако за отсутствием здесь для этого места, а также потому, что мемуар Кулона легко получить в библиотеках, ограничимся сведéнием всех данных в табл. 35. В эту таблицу включен также эксперимент № 13, в котором длина латунной проволоки #7 с подвешенным свинцовым цилиндром, весом 2 фунта, была увеличена в 4 раза, с 9 парижских дюймов до 36 (97,45 см), с целью изучить влияние измеиения длины на крутильные колебаиия. При обсуждении эксперимента № 13 Кулон вновь отмечает, что он провел много аналогичных опытов, в точности подтверждающих полученные результаты, и поэтому он не видит необходимости включать их в свой трактат.

Таблица 35

Кулон (1784)

№ эксперимента	Образец	Вес цилиндра (фунты)	Длина проволоки (дюймы)	Число испытаний	Продолжительность 20 колебаний (с)	Угол закручивания (град.) $\leqslant$
1	Железная проволока #12	0,5	9	1	120	180
				2	—	1080
2	Железная проволока #12	2	9	1	242	180
3	Железная проволока #7	0,5	—	1	42	180
4	Железная проволока #7	2	—	1	85	—
5	Железная проволока #1	0,5	9	1	—	—
6	Железная проволока #1	2	9	1	23	45
7	Латуниая проволока #12	0,5	9	1	220	360
				2	225	1080
8	Латунная проволока #12	2	9	1	442	360
				2	444	1080
9	Латунная проволока #7	0,5	9	1	57	360
10	Латуиная проволока #7	2	9	1	110	360
				2	111	720
11	Латунная проволока #1	0,5	9	1	Не определено	—
12	Латунная проволока #1	2	9	1	32	50
				2	33,5	450
13	Латуниая проволока #7	2	36	1	222	1080

Изображение Кулоном его приборов показано на рис. 3.12. Анализируя экспериментальные данные, он пришел к выводу, что крутящий момент M пропорционален диаметру в четвертой степени, а также углу закручивания [см. уравнение (3.1)]

$$M = \mu \frac{d^4}{l} \Theta. \tag{3.1}$$

3.4. Первое определение значения модуля упругости, выполненное Кулоном, и его эксперименты по вязкости и пластичности (1784)

Наиболее замечательным экспериментальным открытием в этой части трактата является постоянная материала — коэффициент μ, который, по словам Кулона, зависит от жесткости материала каждого металла для всех проволок одинакового металла и, как он указал,

легко определяется экспериментально. Это первое *экспериментальное* утверждение (Coulomb [1784,1]) о том, что данное твердое тело имеет константу упругости материала, не зависящую от размеров образца и плотности тела, безусловно является одной из значительных вех в истории физики континуума. Кулон сравнил значения этих модулей упругости при сдвиге для железа и латуни и получил [1]) их отношение, равное 3,34. Его значение μ для железа довольно близко к среднему значению 8200 кгс/мм^2, полученному мною (Bell [1968,1]) в 60-х гг. нашего века. Однако для латуни, как отметил Альфред Потье (Potier (см. Coulomb [1884,1]), издание к столетнему юбилею, стр. 85), значение модуля упругости μ, полученное Кулоном, равное 2730 кгс/мм^2, заметно меньше, чем величины, полученные в XIX веке лордом Кельвином, Гийомом Вертгеймом и Джозефом Эвереттом и равные 4100 кгс/мм^2 и 3470 кгс/мм^2. Различие в этих значениях будет обсуждаться в разделе 3.44 с точки зрения экспериментальной мультимодульности.

Для экспериментатора второй половины XX века каждый фрагмент остальной части работы Кулона, в которой он предпринял попытку развить экспериментальные обобщения в области несовершенств линейной упругости, представляется столь же важным, как и изучение Кулоном инфинитезимальной линейной упругости в ее первой части. После 1784 г. в литературе встречаются постоянные ссылки на опыты с крутильным маятником, однако вследствие последующего упора на развитие математического аппарата инфинитезимальной линейной упругости эксперименты Кулона в области пластичности и вязкости, в которой теория и по сей день не столь хорошо разработана, в основном игнорировались.

В связи с этим интересно отметить, что эксперименты по упругим колебаниям Эрнста Флоренса Фридриха Хладни (Chladni [1787,1], [1802,1], [1817,1]), одного из наиболее тонких экспериментаторов в области механики твердого тела, были также завершены до того, как стали возможными какие-либо теоретические объяснения. Между 1776 и 1787 гг. Хладни осуществил знаменитые эксперименты со стержнями и узловыми линиями колеблющихся пластин. Интересно, как сравнить обилие бурных аплодисментов фигурам Хладни с тем фактом, что в короткий промежуток времени был достигнут успех в распространении линейной теории упругости, включая поперечные колебания тонких пластин, хотя потребовалось очень про-

[1]) В 1884 г. в юбилейном издании Французского физического общества (*Société Française de Physique*), посвященном столетию со дня выхода в свет знаменитого трактата Кулона, редактор А. Потье вычислил значения модуля упругости при сдвиге, основываясь на данных Кулона. Полагая, что удельный вес железной проволоки, исследовавшейся Кулоном, был равен 7,8, он получил значение модуля, равное 7480 кгс/мм^2; для латуни в предположении, что удельный ее вес равен 8,6, модуль упругости получился равным 2730 кгс/мм^2. Значение отношения этих двух модулей существенно выше, чем значение 2,06, полученное Джордано Риккати для отношения модулей двух указанных металлов. Это отличие также будет прокомментировано ниже (см. раздел 3.44).

должительное время для объяснения некоторых деталей, даже простейшей из фигур [1]) Хладни [1].

В первой серии из пяти экспериментов Кулона по несовершенствам упругости каждый эксперимент разделялся на две части (Coulomb [1784, 1]). Сначала, доведя угол закручивания до уровня, соответствующего (в современной терминологии) «пределу упругости», впервые обнаруженному Кулоном, значение которого в данном случае Кулон дает в своей работе, он приводил крутильный маятник в колебательное движение и, наблюдая за последующим уменьшением амплитуды, продсчитывал количество колебаний, при котором потеря в значении амплитуды составляла 10°. В этих экспериментах, которые проводились с цилиндрами весом 2 фунта, длина проволоки была существенно уменьшена с 9 парижских дюймов (24,36 см) до 6 парижских дюймов и 6 линий (17,60 см). Снижая начальный угол закручивания, Кулон наблюдал, как количество колебаний, приводящее к потере в 10°, заметно возрастает. В первом эксперименте использовалась железная проволока #1 с наибольшим диаметром. Кулон заметил, что уменьшение амплитуды становится весьма неопределенным, если начальный угол закручивания превосходил 90°; наибольшим значением угла, зафиксированным при описании эксперимента, было 90°. Эти данные приведены в табл. 36. Это был как раз тот эксперимент, в котором Кулон обнаружил, что при углах закручивания между 90° и 180° цилиндр вообще не возвращался в первоначальное положение.

Таблица 36

Кулон (1784)

	Угол закручивания (градус)	Потери в 10° в угле закручивания после
Первый опыт	90	3,5 колебания
Второй опыт	45	10,5 колебаний
Третий опыт	22,5	23,0 колебаний
Четвертый опыт	11,25	46,0 колебаний

[1]) Первое значительное усилие экспериментально объяснить некоторые сложности фигур Хладни было приложено Саваром в 20-х и 30-х гг. XIX века. Эти исследования продолжались лордом Рэлеем вплоть до конца XIX века, а также время от времени и несколькими другими учеными в последующие годы. Повторив несколько лет тому назад некоторые из экспериментов Хладни, я лично мог удостовериться в том факте, что имеется много аспектов наблюденного явления, оставшихся еще необъясненными. Тем не менее развитие линейной теории поперечных колебаний пластин привело к общему убеждению, что экспериментальные неясности были просто деталями, к которым теория в свое время будет применена. В связи с этим вопросом, я оставлю для дальнейшего обсуждения «глубокий тон» при продольных колебаниях стержня (см. раздел 3.18) Савар (Savart [1820, 1] [1824, 1], [1829, 1], [1830, 1], [1837, 1]), Рэлей (Rayleigh [1894, 1]).

Вслед за этими интересными открытиями Кулон продолжил испытание подвешенных проволок в серии из девяти опытов, каждый раз увеличивая угол закручивания для получения все большей остаточной деформации до тех пор, пока в девятом эксперименте при угле закручивания 13 258° проволока не разрушилась. Он отметил, что после эксперимента проволока становилась прямой и очень жесткой и при рассмотрении разрушенной проволоки в увеличительное стекло она напоминала по форме шнур, свитый из двух прядей.

Таблица 37

Кулон (1784)

Номер опыта	Угол закручивания в данном опыте (количество полных оборотов)	Полный угол закручивания (градус)	Остаточный угол закручивания, возникший в данном опыте (градус)	Полный остаточный угол аакручивания (градус)	Возврат-упругая деформация (градус)
			Первый эксперимент: железная проволока #1		
1	1/2	180	8 8	8	172
2	1	368	50 50	58	310
3	2	778	310 310	368	410
4	3	1 448	1 оборот +300 = 660	1 028	420
5	4	2 468	2 оборота +290 = 1 010	2 038	430
6	5	3 838	3 оборота +280 = 1 360	3 398	440
7	6	5 558	4 оборота +260 = 1 700	5 098	460
8	10	8 698	8 оборотов +240 = 3 120	8 218	480
9	14	13 258	(Проволока разрушилась)	13 258	
			Второй эксперимент: железная проволока #7		
1	3	1 080	300 300	300	780
2	4	1 740	1 оборот +180 = 540	840	900
3	6	3 000	3 оборота + 90 = 1 170	2 010	990
4	8	4 890	5 оборотов + 90 = 1 890	3 900	990
5	12	8 220	9 оборотов + 40 = 3 280	7 180	1 040
6	20	14 380	16 оборотов +310 = 6 070	13 250	1 130
7	30	23 850	26 оборотов +180 = 9 540	22 790	1 260
8	50	40 790	46 оборотов + 20 = 16 580	49 370	1 420
9	7	(Проволока разрушилась)			
			Третий эксперимент: железная проволока #12		
1	4	1 440	300 300	300	300
2	6	2 460	2 оборота + 40 = 760	760	1 090
3	6	(Проволока разрушилась)		2 160	3 250

В качестве прелюдии к современному изучению различия в зависимостях между напряжениями и деформациями при нагружении и разгрузке при больших пластических деформациях металлов Кулон отметил далее, что, хотя восстановление (возврат) был скорее нерегулярным в первых двух опытах, во всех остальных шести опытах значение восстановления было приблизительно одинаковым. Так, между восстановлением в четвертом и седьмом опытах разница составляла только 10%. Данные по этому эксперименту приведены в табл. 37, в которой я добавил дополнительные столбцы, включающие полный угол закручивания от первоначального положения, полную остаточную деформацию и значение восстановления в каждом опыте.

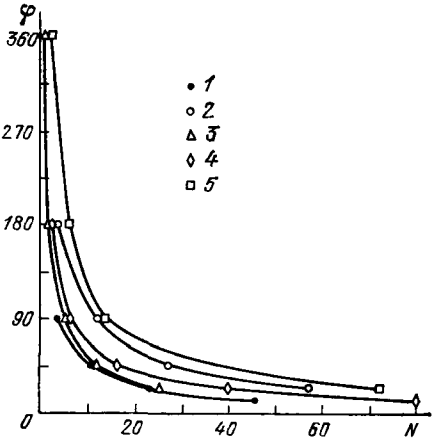


Рис. 3.13. Результаты экспериментов Кулона (1784) по затуханию крутильных колебаний железных и латунных проволок вследствие вязкости материала. *1* — эксперименты с железной проволокой #1; *2* — с железной проволокой #7; *3* — с железной проволокой #12; *4* — с латунной проволокой #1; *5* — с латунной проволокой #7; N — число колебаний, по прошествии которых угол закручивания уменьшается на 10°; φ — первоначальный угол закручивания в градусах.

Второй и третий эксперименты выполнялись с железными проволоками #7 и #12 соответственно. Данные по демпфированию в этих испытаниях приведены на рис. 3.13. Детальное ознакомление с этими данными для железной проволоки объясняет причину, по которой Кулон не сумел сформулировать закон, определяющий затухание.

Кроме того, на рис. 3.13 показано затухание для двух латунных проволок в той же форме зависимости между начальным углом закручивания и числом циклов до потерь в 10°.

Имеются также данные аналогичных экспериментов по несовершенствам упругости латунных проволок #1 и #7 той же уменьшенной длины 6 парижских дюймов, 6 парижских линий (17,60 см), что и железные проволоки. Данные для двух латунных проволок приведены[2] в табл. 38.

Кулон отметил, что при сравнении результатов для железных и латунных проволок одинакового диаметра у последних уменьшение амплитуды происходит существенно медленнее. Он предположил, что причиной этой нерегулярности данных может быть способ производства проволоки, в том числе нагрев, которому она подвергалась для уменьшения диаметра (путем волочения).

Кулон был также первым, кто исследовал возможность того, что сопротивление воздуха может быть причиной разброса получаемых

Таблица 38

Кулон (1784)

Номер опыта	Угол закручивания в данном опыте (количество полных оборотов)	Полный угол закручивания (градус)	Остаточный угол закручивания, возникший в данном опыте (градус)	Полный остаточный угол закручивания (градус)	Возврат — упругая деформация (градус)
	Четвертый эксперимент: латунная проволока #1				
1	2	720			
2	4	1 600	2 оборота + 0 = 720	160	560
3	6	3 040	3 оборота +300 = 1 380	880	720
4	10	5 860	7 оборотов+300 = 2 820	2 260	780
5	20	12 280	17 оборотов+340 = 6 460	11 540	740
6	Проволока разрушилась после 28-го оборота				
	Пятый эксперимент: латунная проволока #7				
1	4	1 440	220	220	1 220
2	Проволока разрушилась после 6-го оборота				

им результатов [1]). Он оборачивал свинцовые цилиндры легкой бумажной лентой шириной в три раза большей, чем их высота, при которой изучалось первоначальное колебательное движение, полагая, что это утроит влияние сопротивления воздуха. Он отметил, что в результате такого изменения амплитуда ни разу не возрастала более[3] чем на 10% и почти во всех случаях не было заметного различия в частотах. Поэтому Кулон заключил, что сопротивление воздуха оказывает незначительное влияние на результат.

Анализ данных, характеризующих затухание колебаний, изображенных на рис. 3.13, показывает отсутствие закономерности в отношении диаметра проволоки. Будучи столь превосходным экспериментатором, Кулон путем постановки дополнительной серии опытов пошел дальше простого предположения о том, что причиной изменения периода колебаний является уменьшение диаметра. Он подверг отжигу латунную проволоку #1, нагревая ее до красного каления, для того чтобы она потеряла большую часть своих упругих свойств. Выяснилось, что такая проволока выдерживает до раз-

[1]) Заинтересованность в этом вопросе он высказывал несколькими годами ранее в своей работе, посвященной описанию экспериментов с человеческим волосом и шелком (Coulomb [1780, 1]).

рушения 140 полных оборотов цилиндра вокруг оси. А после первого оборота возврат составил только 50°, однако после 90 полных оборотов размер упругой области оказался соответствующим возврату, близкому уже к 500°. При этом наблюдения показывали, что от второго до третьего оборота упругий возврат возрастал на 12°,

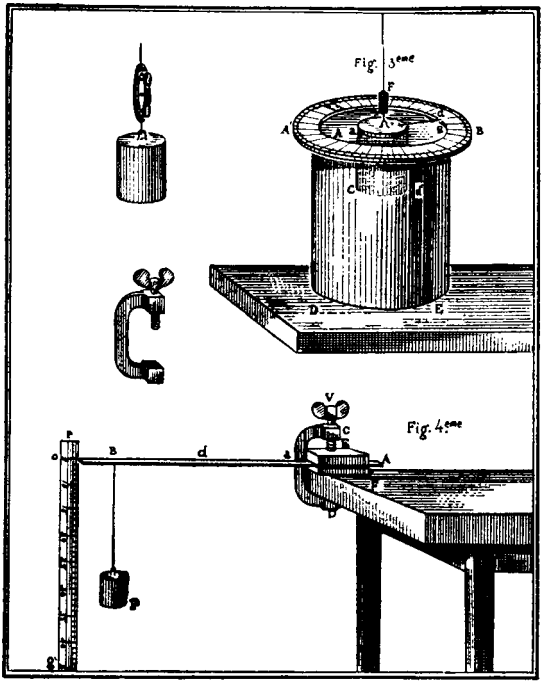


Рис. 3.14. Рисунки Кулона к его методу измерения угла закручивания и к экспериментам на изгиб (1784).

от 40-го до 41-го — на 6° и от 90-го до 91-го — всего примерно на 1°. Таким образом, после закручивания на некоторый угол возрастание упругой области оказывалось приблизительно обратно пропорциональным углу закручивания [4].

Сравнивая результаты этого эксперимента с данными по измерению остаточной деформации, полученными на неотожженных образцах, Кулон пришел к выводу, что простым закручиванием можно придать отожженной проволоке свойство линейной упругости в той мере, которая максимально возможна для этого материала; ковка или волочение уже ничего не добавляли к результату. Позже он заметил, что латунная проволока до отжига могла выдерживать до разрыва 22 фунта, в то время как после отжига она выдерживала едва лишь 12—14 фунтов. Он также отметил, что хотя эти основные изменения проявлялись в пластической деформации тела, в умень-

шении предельного крутящего момента, а также в уменьшении той величины, которую теперь называют пределом упругости, тем не менее частота крутильных колебаний при малых углах закручивания оставалась неизменной при тех же диаметре проволоки, ее длине и весе свинцового цилиндра. Отсюда он заключил, что упругие свойства оставались неизменными.

И снова, воодушевленный успешными экспериментальными исследованиями явлений, для которых в 1784 г. еще не существовало теории, Кулон намечает проведение совершенно иной системы экспериментов для изучения связи между тем, что он назвал «когерентностью» и упругостью. Консольная балка, такая как показанная на рис. 3.14, подвергалась серии из трех нагружений в точке B и измерялся прогиб конца балки. Первая испытанная таким образом балка представляла собой стальную полосу 2,48 см шириной, толщиной 0,113 см и длиной 18,95 см (от точки a до точки B). Полоса была нагрета до белого каления, а затем очень резко закалена. Такая же полоса нагревалась до фиолетового свечения и возвращалась к состоянию, когда она хорошо пружинила. Наконец, в третьей полосе температура нагретой до белого каления полосы понижалась достаточно медленно, для того чтобы создать отожженное состояние. Нагрузка и перемещение сравнивались для каждого случая. Результаты этих экспериментов приведены в табл. 39. Авторитет Кулона был столь высок, что после его утверждения об идентичности зависимости между нагрузкой и удлинением для отожженной и закаленной стали в течение полувека никто всерьез не занимался этим вопросом, пока Вертгейм не показал обратное.

Таблица 39

Кулон (1784)

Номер нагружения	Нагрузка		Прогиб	
	(фуиты)	(гс)	(линии)	(см)
1	1/2	245	8	1,80
2	1	489	15,5	3,49
3	1,5	734	23	5,19

Во второй серии дополнительных экспериментов испытывались три различные стальные полосы вышеупомянутых размеров, каждая из которых подвергалась одной из трех термических обработок, описанных выше. Груз теперь подвешивался в точке d, отстоящей от точки a на $2^1/_2$ парижских дюйма, и направление его действия попрежнему оставалось перпендикулярным плоскости полосы. Закаленная полоса разрушилась при нагрузке 6 фунтов. Однако при разгрузке от любого значения угла поворота конца консоли, начиная от того, при котором происходило разрушение, полоса возвращалась точно в исходное положение. «Превосходно пружинящая» полоса разрушилась при нагрузке 18 фунтов и также еще до разрушения, будучи нагруженной любой нагрузкой ниже разрушающей, а затем разгруженной, возвращалась в первоначальное положение. Отожженная полоса вела себя как линейно упругое тело только до на-

грузки в 5—6 фунтов. Увеличив нагрузку до 7 фунтов, Кулон заметил, что после ее снятия полоса приобретает остаточную деформацию. Возврат достигал примерно того уровня упругой деформации, который был при нагрузке, равной 6 фунтам, т. е. уровня, соответствующего пределу упругости.

На основании всех этих экспериментов по большим деформациям Кулон установил различие между упругостью и тем, что теперь было бы названо пластичностью. Он предположил, что в пластическом состоянии отдельные области металла могут проскальзывать друг относительно друга и оставаться в таком положении. Эта точка зрения вместе с открытием существования предела упругости и зависимости его значения от предварительной термической истории составили введение в основные черты квазистатической пластичности, хотя и в весьма ограниченной форме, которую теории наших дней пока не в состоянии объяснить.

3.5. Об определении значений констант упругости

Ввиду появления целого потока работ в XIX и XX столетиях, посвященных константам упругости, представляется странным, что прошло более ста лет прежде, чем кто-либо из физиков-экспериментаторов осознал, что существует, по-видимому, важное измеримое отношение, входящее в экспериментально открытую Гуком и Мариоттом (Hooke [1676, 1], [1678, 1]), (Mariotte [1700, 1]) линейную зависимость между нагрузкой и удлинением. Константы упругости стали объектом пристального внимания после неожиданного появления в 1842 г. большого систематического экспериментального исследования Гийома Вертгейма по определению динамических и квазистатических модулей упругости для многих металлов и последовавших за ним работ нескольких выдающихся экспериментаторов XIX века, таких как Адольф Теодор Купфер [1]), Вольдемар Фохт, Фридрих Кольрауш, Герберт Томлинсон и Кельвин (Уильям Томсон), а также Эдуард Грюнейзен, Карл Антон Эрих Гоэнс и Вернер Кёстер, представивших еще большее количество данных, опубликованных после 1900 г.

Этот интерес к предмету намного превосходил нужды развивающейся техники. Действительно, начиная с работы Вертгейма, почти каждый научный труд по этому вопросу начинался с жалоб на недостаточную адекватность экспериментов предыдущих исследователей, кому не удалось получить верные значения. Вполне возможно, что ряд опубликованных значений модулей привел к общепринятому использованию в технике произвольно взятых величин, последние

[1]) В русском издании работы Купфера его второе имя было напечатано как Федор, что является просто русским эквивалентом немецкого имени Теодор. Однако в английских публикациях такой, например, как Тодхантера и Пирсона «Упругость и прочность материалов», встречаются оба варианта: А. Т. Купфер и А. Ф. Купфер.

затем получали «законность» путем включения в важнейшие инженерные справочники-руководства и учебники.

Точное определение констант упругости некоторыми экспериментаторами открывало возможность проведения исследований во многих областях, в которых изучались: наличие сходных черт у различных тел, анизотропия кристаллических материалов, влияния различных термических воздействий таких, как отжиг или изменение температуры окружающей среды, или различие между изотермическими и адиабатическими свойствами, а также влияния электрических и магнитных явлений на свойства металлических тел. С помощью такой базы, позволяющей выполнять количественные оценки, стало возможным исследовать эффекты на основе модели упругого континуума и атомистических моделей различных состояний металла, историй предварительной обработки, составов и структур. Начиная со значений, найденных Кулоном, подавляющее большинство опубликованных констант упругости было получено динамическим способом. Интенсивное использование в XIX и начале XX века динамических испытаний сохранилось и до наших дней, эксперименты с использованием колебаний теперь заменены ультразвуковыми измерениями на малых образцах.

Как в историческом прошлом, так и в настоящее время определение констант упругости для тел, которые предполагались изотропными, сводилось в основном к отысканию модуля E. Разумеется в литературе встречалось также определение значения μ. Со второй половины XIX века появилось несколько попыток непосредственного определения коэффициента Пуассона ν и модуля объемной упругости K. Довольно рано было осознано, что вычисление этих величин по экспериментально найденным значениям E и μ приводит не только к весьма различающимся, но во многих случаях явно неверным значениям.

Ввиду того, что экспериментатор, считающий, что его измерения неточны, был бы подобен математику, сомневающемуся в строгости своей логики, разброс в экспериментальных данных почти всегда относили на счет скрытой анизотропии материала. Так, например, тогда Джордж Фредерик Чарльз Сирл в 1908 г. в своем лабораторном руководстве «Экспериментальная упругость» определил коэффициент Пуассона для девяти различных металлов по экспериментально найденным значениям модулей E и μ, он получил пять величин, различающихся более чем в полтора раза, в пределах от 0,598 до 1,207 (Searle [1908, 1], стр. 115). Так как деформации, соответствующие этим данным, были инфинитезимальны, он решил, что металлы в своем поликристаллическом состоянии существенно анизотропны.

Значения коэффициентов Пуассона 0,608 для отожженной меди и 0,614 для упрочненного никеля дают мне, так же как и Баушингеру и Грюнайзену десятилетия тому назад, основание полагать, что точность измерений частоты изгибных колебаний, периода колеба-

ний крутильного маятника, а также размеров образцов, по которым находились E и μ, была недостаточной для определения E и μ, чтобы использовать их в отношении больших чисел [1] при вычислении коэффициента Пуассона.

Как было показано выше (см. гл. II, раздел 2.18), анализируя данные для тридцати различных стальных образцов, Баушингер в 1879 г. выразил серьезные сомнения относительно возможности вычисления коэффициента Пуассона и модуля объемной упругости с использованием отношения значений модулей E и μ. Динамический метод определения значения E применялся как при изгибных, так и продольных колебаниях. Однако значение E, полученное из опытов на изгибные колебания, почти всегда оказывалось меньше, чем найденное из продольных, даже в том случае, когда во второй половине XIX века при вычислениях стали вносить поправку на инерцию поворота сечений, а в XX веке учитывали влияние сдвига и поперечного сжатия волокон на прогиб.

На протяжении всей истории определения модулей по продольному деформированию металлических образцов, как динамическому, так и квазистатическому, значения, полученные при сжатии, оказывались несколько выше, чем при растяжении. Важность этого наблюдения в отношении малой деформационной нелинейности уже отмечалась выше, в гл. II. Обычная интерпретация данных экспериментов как по кручению сплошных цилиндров, так и изгибу балок круглого или прямоугольного поперечных сечений предполагает распределение напряжений в соответствии с линейной упругостью и, таким образом, требует от экспериментатора введения *a priori* такого допущения.

При практическом использовании данных, связанных с продольными колебаниями, считается, что они одномерны, хотя в действительности образец находится в более сложном, трехмерном напряженном состоянии. Практически так же обстоит дело и в современном ультразвуковом анализе и в попытках, предпринятых в XX веке, определить зависимость между напряжениями и деформациями путем ударного нагружения коротких цилиндрических образцов, когда как в области малых, так и больших деформаций для обработки результатов измерений необходимо предположить, что напряженно-деформированное состояние в образце одномерно, хотя нет никакого способа, позволяющего проверить достоверность этого предположения. При определении модуля E в квазистатических экспериментах с призмами, по крайней мере, имеется возможность проверить всю поверхность образца, чтобы удостовериться, действительно ли распределение деформации одномерно и, таким образом, установить достаточно ли точно определяется константа материала.

Ультразвуковые измерения при определении модулей используют амплитуды деформаций в пределах от 10^{-7} до 10^{-8}. Амплитуды в вибрационных опытах имеют порядок 10^{-5}—10^{-6}. Областью квази-

статических деформаций обычно является 10^{-3}—10^{-6} в зависимости от разрешающей способности используемой аппаратуры. Крайне важно понимать, что различие в значениях модулей, определенных тремя этими способами, зависит так же от вариаций свойств материала в указанных трех областях изменения деформаций, как и от термических или вязких эффектов, которым эти различия часто приписывают. Нелинейность, в смысле наличия в зависимостях упругих констант третьего порядка, проявляется в динамических измерениях в виде искажения волнового профиля, а также в виде возникновения супергармонических и субгармонических колебаний. В движущихся системах такая нелинейность может вызвать явление перескока или бифуркацию.

В квазистатических опытах, как было описано выше при обсуждении работы Грюнейзена, можно сравнить различные области значений деформаций, что позволяет отделить различные существенные признаки, включая и такие, как дискретное распределение параметров, определяющих устойчивость состояния материала.

Рассматривая деформацию металлов, следует помнить еще два обстоятельства при оценке экспериментальных данных за последние 90 лет. Первым является тот факт, что в начале этого столетия технологи ввели стандарт на форму и предварительную термическую и механическую обработку образцов, а также договорились относительно единой процедуры испытаний. Стандартизация позволила создать испытательные машины на промышленной основе, которые лишь незначительно варьировались от лаборатории к лаборатории, и, таким образом, созданы условия для появления систематических отклонений или ошибок в результатах независимых исследований.

Во-вторых, требования технологии поставили специалистов по прикладной металлургии перед необходимостью создания материалов с устойчивыми свойствами, по крайней мере, грубо воспроизводимыми модулями при сравнительно высоком пределе упругости. Так как химический состав, предварительный отжиг, чистота материала, размер зерна и т. д. были строго предписаны, исследование многих интересных деформационных свойств сводилось к минимуму или вообще исключалось.

Возвращаясь к испытаниям металлических образцов в XIX веке, проводимых при нагружении мертвой весовой нагрузкой, предварительная термическая и механическая обработки которых отличалась от предписанных рецептов, я (Bell [1968, 1]) обнаружил в последние два десятилетия, что устойчивые значения упругих констант 60 элементов имеют квантованное распределение. Более того, я показал, что для любого данного тела случаются переходы от одного дискретного состояния к другому при том же отмеченном выше числовом распределении. Было показано, что материал, имеющий технологическое применение находится не в единственном, а в одном из возможных устойчивых упругих состояний. Таким образом, по от-

ношению к истории эксперимента по малым деформациям, от 1784 г. до наших дней, следует постоянно иметь в виду, что после 1820 г. инженерные испытания железа, а позже и стали становятся такими же, как и испытания многочисленных других материалов, и, начиная со второй половины XIX века, описанная стандартизированная испытательная процедура уже не могла выявить фундаментальных физических свойств, характеризуя и ограничивая почти все исследования, которые ставили своей целью добиться понимания свойств тела при малых деформациях [1]).

Если экспериментатор, анализируя свои данные, предполагает изотропию, хотя подозревает, что тело анизотропно, можно только удивляться, почему он публикует эти результаты. Если он принимает заманчивые, но в других отношениях произвольные теоретические гипотезы для выполнения расчетов, мы должны подвергнуть сомнению его объективность. И, как это бывает во многих случаях, если обратный пересчет от окончательных результатов к необработанным данным не может быть выполнен, выводы не должны приниматься во внимание при дальнейшем построении гипотез. Эксперименты, поставленные лишь для решения весьма узкой задачи, чтобы дать физическое подтверждение общей применимости некоторой теоретической модели, требуют обязательного сравнения результатов по порядку величин с экспериментами, поставленными для всей области. Если по той или иной причине такое сравнение невозможно, выводы, сделанные с помощью гипотез, имеют лишь ограниченное значение.

Итак, ясно, что найденные в эксперименте параметры должны считаться вызывающими подозрение, если теории поведения конструкций основаны на предполагаемых распределениях напряжений, деформаций, смещений, скоростей и т. д., точная проверка достоверности которых невозможна. Такие же сомнения вызывают определяющие уравнения, которые предложены, но не проверены в приложениях.

3.6. Эксперименты Хладни по продольным колебаниям стержней (1787)

Исследования, выполненные Хладни в 1787 г. явились в XVIII веке одним из главных стимулов развития механики континуума XIX века (Chladni [1787, 1]). Выступая во время многолетнего пу-

[1]) Например, когда в начале нашего века рабочие температуры и давления в турбинах возросли, возникла необходимость создать такую сталь, которая сохраняла бы высокую прочность и вязкость (демпфирующую способность) в указанных новых условиях. Для этой цели был поставлен ряд экспериментов при высоких температурах с особыми материалами, которые в этих условиях обладали уникальными свойствами. Если бы бо́льшая часть доступной информации была получена при таких особых обстоятельствах, возникла бы опасность неверного понимания или выпадения из поля зрения общих свойств тел при высоких температурах.

шествия по Европе с лекциями, демонстрирующими различные чудеса научной «магии», Хладни поражал аудиторию главным образом своими знаменитыми песчаными фигурами, полученными при поперечных колебаниях пластин. Естественно, что эксперименты с пластинами, для которых еще не было создано хорошей теории, описывающей напряженно-деформированное их состояние, были слишком сложными, чтобы служить основой для определения констант упругости.

С другой стороны, эксперименты по продольным колебаниям стержней были достаточно простыми и понятными, чтобы на их основе определять константы материала.

Начиная с Жана Батиста Био (Biot [1816, 1]), многочисленные экспериментаторы в XIX веке вычисляли модуль E изотропных материалов, используя данные экспериментов Хладни по продольным колебаниям стержней. Сам Хладни довольствовался лишь определением характеристики материала в виде безразмерного отношения скорости звука в нем и в воздухе. Это отношение находилось путем сравнения частот продольных колебаний свободного по концам стержня длиной 2 фута, и воздуха в открытой с обеих сторон трубе той же длины. Сравнение проводилось в терминах музыкальной шкалы. Разумеется, эти данные зависели от атмосферных условий, имевших место в лаборатории Хладни во время проведения эксперимента. Био в своей работе «*Traité de Physique Expérimentale et Mathématique*» (Biot [1816, 1]; том II, книга 2, глава 5) приводит упомянутые отношения скоростей для китового уса, стекла и тех видов древесины и металлов, которые рассматривались Хладни. Эти данные сведены в табл. 40. В табл. 41 я даю сравнение наблюденной Хладни скорости звука в металлах, вычисленной по отношениям табл. 40 (в предположении, что скорость звука в воздухе при комнатной температуре равна 334 м/с), со значениями, взятыми из последних источников, а именно из 43-го издания «Справочника по химии и физике» (Handbook of Chemistry and Physics [1961, 1]).

Для определения модулей измеренные скорости звука следует возвести в квадрат и умножить на плотность тех материалов, которые изучал Хладни[1]. Результаты таких вычислений модулей по данным Хладни (Chladni [1802, 1]), в которых использовались средние значения плотностей, известные в его время, приведены в табл. 42, где они вновь сравниваются с их современными значениями.

Высокое значение модуля упругости железа послужило причиной значительных дискуссий со времени экспериментов Био по распространению волн в 1808 г. (Biot, опубликованы в [1809, 1]) до опытов Вертгейма и Бреге (Wertheim et Breguet [1851, 1]) в 1851 г. Значения отношения скоростей звука в железе и в воздухе, полученные как Био, так и Вертгеймом и Бреге, оказались существенно ниже, чем у Хладни. Детали полемики об этих величинах, включая

Таблица 40

Био (1816)

Материал стержня	Значение N'	Относительная скорость[а] $N'/до_3$	Материал стержня	Значение N'	Относительная скорость[а] $N'/до_3$
Китовый ус	$ля_5$	6,66	Красное дерево	приблиз. $си_6^{\flat}$	14,40
Олово	$си_5$	7,50	Эбеновое дерево		
Серебро	$ре_6$	9,00	Граб		
Орех	$фа_6$	10,66	Вяз		
Тис[б]	$фа_6$	10,66	Ольха		
Латунь	$фа_6$	10,66	Береза		
Дуб			Липа	почти $си_6$	15,00
Перо			Вишня	$си_6$	15,00
Трубчатый стебель	$ми_6$	10,00	Ива	$до_7$	16,00
	$соль_6$	12,00	Сосна[в]		
Медь	около $соль_6$	12,00	Стекло	$до_7$	16,66
Груша	$соль_6^{\#}$	12,50	Железо или сталь		
Медь			Пихта	$до_7^{\#}$ или почти $ре_7$	18,00
Клен	$ля_6$	13,33			

[а] $До_3$ — тон столба воздуха.

[б] Если волокна этой древесины выпрямлены, то звук несколько выше.

[в] Если волокна этой древесины не совсем прямолинейны, то звук на одну треть тона ниже.

Таблица 41

Материал	Хладни[а] (м/с)	Энциклопедия по химии и физике[б] (м/с)	Материал	Хладни[а] (м/с)	Энциклопедия по химии и физике[б] (м/с)
Олово	2505	2500	Железо	5564	5000
Серебро	3006	2610	Латунь	3560	3500
Медь	4008	3560	Стекло	5564	5000—6000

[а] См. Biot [1816, 1].

[б] Энциклопедия по химии и физике, 43-е издание, стр. 2537 (1961).

Интересно отметить, что эти значения для Ag, Cu и Fe, так же, как и для большинства других металлов и древесины, определены Вертгеймом за 120 лет до настоящего времени.

Таблица 42

Материал	Хладни (кгс/мм²)	Обычные (общераспространенные) табличные значения [a]) (кгс/мм²)
Олово	4 000	4 002
Серебро	9 478	7 913
Латунь	10 606	9 209
Медь	14 361	10 404—12 252
Железо	24 364	18 684—20 828

[a]) Энциклопедия по химии и физике, 43-е издание, стр. 2169 (1961).

вклад Феликса Савара (Savart [1820, 1]) [1]), будут рассмотрены ниже. Отметим тот интересный факт, что различие в значениях модуля велико именно для железа и было обнаружено в динамических экспериментах и другими исследователями.

Отношение модулей $E_{\text{стали}}/E_{\text{латуни}}=2{,}26$, найденное Хладни, заметно выше, чем значение 2,06, полученное Джордано Риккати пятью годами ранее. Так как значения модулей упругости латуни и меди, подсчитанные по скоростям звука, измеренным Хладни, очень близки к значениям, известным в XIX веке и в XX веке, более высокое их значение для железа вряд ли можно отнести на счет недостатка экспериментальных измерений, как это делали критики Эрнеста Хладни,— Савар и другие тридцатью или более годами позже, когда обнаружили, что найденная ими скорость звуковых волн в железе заметно выше, чем в опытах Био [2]), выполненных в 1806 г. Представляет некоторый интерес вернуться к этому вопросу в данной книге позже (см. раздел 3.44 и Bell [1968, 1], [1965, 2]) при обсуждении сводных экспериментальных данных за несколько десятилетий: Будет показано, что такое различие в модулях железа, какое получилось у Хладни и Био, не только слишком велико, чтобы его можно было объяснить ошибкой измерений, но повторялось еще и еще в данных многих экспериментаторов. Такая мультимодульность, как теперь известно, имеет более фундаментальную причину, чем плохое изготовление образцов, инородные включения, неоднородность или значительная анизотропия, как полагали раньше.

[1]) См. также более поздние статьи Савара по общим вопросам: [1829, 1], [1830, 1], [1837, 1].

[2]) Доклад о результатах опытов Био был прочитан в Институте в 1808 г. и опубликован в *Mémoires de Physique et de Chimie de la Société d'Arcueil* в 1809 г. (Biot [1809, 1]).

3.7. Оценка фактов и мифов о модулях в лекциях Юнга по натуральной философии (1807)

Много уже написано о «Курсе лекций по натуральной философии и искусству механики» *(A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts)* Томаса Юнга. То, что он является набором туманных и неясных сведений по различным вопросам науки и техники, представлявшим интерес в конце XVIII века, немедленно становится очевидным каждому, кто, не полагаясь на авторитет его имени, внимательно ознакомится с этим двухтомным сочинением. Исаак Тодхантер в своей книге «История теории упругости и сопротивления материалов», написаниой совместно с Пирсоном *(A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials)*, так отзывается о разделе, посвященном упругости:

«Весь раздел представляется мне совершенно невразумительным, подобно большинству сочинений этого известного автора. Среди его обширных достижений в науке и языках, к несчастью, нет таких, которые точно и ясно были бы выражены на обычном языке математиков. Формулы этого раздела, вероятно, большей частью по внешнему виду являются новыми для сноего времени, однако они вряд ли привлекли внимание вследствие представления в неудовлетворительной форме» (Todhunter and Pearson [1886, 1], Vol. 1, стр. 82, 83).

С другой стороны, труд Юнга произвел очевидное впечатление на лорда Рэлея (Rayleigh [1894, 1]), чьи многочисленные пометки на полях позволяют, кроме того, предположить, что он считал эту работу заслуживающей внимательного изучения.

В связи с вызывающим сомнение контрастом между глубоким и поверхностным, характерным для интеллекта действительно великого эклектика, такого человека, как Юнг, невозможно понять, если рассматривать его в контексте какой-либо одной узкой специализации, будь то математика, экспериментальная физика, филология или медицинская практика. Действительно, неистовство персональной вендетты лорда Броутона еще при жизни в связи с волновой теорией света уравновешивалось бесконечными панегириками Джона Тиндала (Tyndall [1877, 1], стр. 51). Конечно, можно прочесть post hoc об открытии в таком изобилующем неточностями труде, как лекции Юнга, поэтому весьма несправедливо по отношению к Юнгу ставить незаконно акценты по поводу приоритета или отсутствия приоритета в большинстве вопросов, рассмотренных им в этих двух томах [1]. Содержание его обширной библиографии создает впечатление, что он способен создать скорее научную и техническую универсальную систему, чем свой собственный оригинальный труд. С некоторой досадой следует заметить, что он, отметив звездочками те места, которые считал особо важными результатами, не слишком далеко ушел от написанного Джоном Робизоном в общеизвестной энциклопедии.

Так, мы можем перепроверить лекцию XIII в первом томе о пассивной прочности и трении, в которой Юнг определил понятие вы-

соты модуля в терминах, являющихся, как показал Трусделл (Truesdell [1960, 1]), повторением того, что за много лет до него было установлено Эйлером, с работами которого Юнг был знаком. В свете более тщательного изучения Трусделлом исторических материалов, часто цитируемых, но, очевидно, неточно излагаемых, утверждения, подобные тому, которое сделано во введении к классическому труду Августа Эдвара Хуга Лява «Математическая теория упругости» (Love [1892, 1]), следует рассматривать скорее как традиционное увековечивание исторической заслуги Юнга, нежели представление какого-либо подтверждения того, что открытие, сделанное самим Юнгом, относится к «модулю Юнга».

Читаем у Лява:

«Это введение определенного физического понятия, связанного с коэффициентом упругости, которое спустилось, так сказать, с ясного неба на читателя математических мемуаров, знаменует целую эпоху в истории науки» [1]).

Оценивая Томаса Юнга как экспериментатора в области механики твердого тела, следует отметить, что его связь с настоящим экспериментом была минимальной, а если опыты и производились, то, за исключением одного-двух туманных намеков, какие-либо детали эксперимента в его описании полностью отсутствовали. При этом необходимо напомнить, что Юнг писал во время создания экспериментальных основ науки Кулоном, Хладни, Био, Дюпеном и Дюло, которые глубоко верили в логику экспериментальной науки, будь то подготовка эксперимента или представление результатов. Первоначальное упоминание Юнгом модуля упругости встречается на третьей странице Лекции XIII (Young [1807,1], Vol 1, стр. 137) вслед за коротким обсуждением тремя страницами ранее, в конце Лекции XII, экспериментов Кулона на кручение, в которых им, как мы видели, был введен модуль упругости. После замечания о том, что растяжение и сжатие «подчиняются почти одинаковым законам, так что они могут быть лучше поняты путем сравнения друг с другом» и после весьма ясного утверждения относительно «аналогичных» линейных зависимостей Гука между силами и удлинениями, Юнг заявляет:

«В соответствии с указанной аналогией мы можем охарактеризовать упругость любого материала параметром, который может быть назван его модулем упругости и у которого вес таков, что любая добавка к нему увеличивает его в той же пропорции, в какой этот же вес, будучи приложенным к образцу того же диаметра, укорачивает его посредством сжатия. Так, если стержень любого рода длиной 100 дюймов будет укорочен на 1 дюйм нагрузкой в 1000 фунтов, то вес его модуля упругости будет равен 100 тысячам фунтов или, более точно, 99 000 фунтам, т. е. величине, которая относится к 100 000 в такой же пропорции, как 99 к 100. Таким же образом, мы должны предположить, что вычитание некоторой величины из веса модуля уменьшает его в той же пропорции, в какой эквивалентная нагрузка удлинит образец. Высота модуля есть величина постоянная для данного материала,

[1]) Эта цитата взята со стр. 4 четвертого издания труда Лява (Love [1944, 1]).

не зависящая от ширины и толщины образца: для атмосферного воздуха она равна 5 милям, а для стали — почти 1500. Это предположение в достаточной степени подтверждается экспериментами и может считаться по крайней мере хорошим приближением: отсюда следует, что вес модуля должен всегда превосходить предельную разрывную прочность образца и что сжатие, вызванное таким весом, должно уменьшать его размеры [2] наполовину...» (там же).

Ни вес модуля, ни высота модуля, рассмотренные Юнгом, не являются параметрами материала в современном смысле постоянной упругости. Вес модуля w через E-модуль можно выразить в виде $w=EA$, где A — площадь поперечного сечения образца, а высоту модуля h — в виде $h=E/\gamma$, где γ — удельный вес тела. Только в двух случаях Юнг привел значение веса модуля, указав, что он отнесен к площади поперечного сечения, равной 1 квадратному дюйму, т. е. использовал понятие модуля в его современной форме. На стр. 151 тома I он сообщает:

«Вес модуля упругости квадратного дюйма стали — тот вес, который способен, сжимая образец, сократить его длину на половину, равен примерно 3 миллионам фунтов...» [1]).

На стр. 509 тома II Юнг дает сравнительную таблицу физических свойств различных материалов. Данные из этой таблицы о материалах, представляющих интерес для механики твердого тела, с указанием высоты модуля, приведены в табл. 43.

О том, что Юнг не в полной мере разделял концепцию Эйлера, свидетельствует непонимание им того факта, что для газов и жидкостей его высота модуля должна быть равна нулю. Не поняв этого, он привел числовые значения модулей, вытекающие из дилатационных измерений, когда пытался представить нагрузку, требуемую для удвоения первоначальной длины столба. Такой выход из положения указывает на чисто теоретический подход Юнга. Если бы Юнг, как он утверждал, интересовался прежде всего природой явлений, он исключил бы из рассмотрения субстанции, для которых очевидна неприменимость указанной концепции.

Таблица 43, несомненно, является первым в истории механики твердого тела собранием данных о параметрах деформации, характеризующих упругость [2]). Она содержит множество нелепых противоречий и ошибок, которые в силу исторической уникальности таблицы стоит прокомментировать. Так, например, на стр. 137 тома I для высоты модуля стали приводиться значение 1500 миль или 7 920 000 футов, в то время как в таблице значение этой величины дано равным 10 000 000 футов. На стр. 151 дано значеиие веса модуля для 1 квадратного дюйма для стали, равное 3 000 000 фун-

[1]) Три миллиона фунтов на квадратный дюйм для стали — это только одна десятая значения модуля упругости и одна одиннадцатая значения для этого материала, согласно Юнгу, в терминах высоты модуля.

[2]) Таблицы Хладни не содержат каких-либо данных по квазистатическим деформациям.

Таблица 43

Юнг (1807). Сравнительная таблица физических свойств различных материалов

Материал	Удельный вес	Высота [а]	Прочность на разрыв [б]	Температура плавления (° F)	Растяжимость
Вода	1,000	750	—	32	—
Лед	0,93	850	—	—	—
Пар воды при 212° F	0,0004	90	—	—	—
Водород	0,0001	350	—	—	—
Азот	0,0012	30	—	—	—
Атмосферный воздух	0,00128	28 40	—	—	—
Кислород	0,00137	26	—	—	—
Углекислый газ	0,00176	19	—	—	—
Пихта	0,56	10 000	8	—	1/304
Вяз	0,80	8 000	13	—	1/214
Бук	0,85	8 000	17	—	1/173
Дуб	0,99	5 060	17	—	1/128
Самшит	1,10	5 050	—	—	—
Кронглас	2,5	9 800	—	—	—
Олово	7,3	2 250	6	415	1/714
Железо и сталь	7,8	10 000	40—150	1 600	1/846—1/226
Латунь	8,4	5 000	—	—	—
Медь	8,8	5 760	36	1 450	1/610
Серебро	10,5	3 240	42	1 000	1/352
Ртуть	13,6	750	—	—39	—

[а] Высота модуля упругости в тысячах футов.
[б] Прочность на разрыв в тысячах фунт/дюйм ^{2}.

тов, которое [1]), если перевести его в высоту модуля по известному удельному весу стали, дает неормально низкую высоту, равную 874 000 футов. На стр. 86 тома II, характеризуя высоту модуля для материала стального настроечного камертона, Юнг дает значение 8 530 000 футов. Для атмосферного воздуха (стр. 137) он предложил значение 5 миль или 26 400 футов, тогда как в таблице он предполагает, что эта величина находится в пределах от 28 000 до 40 000 футов. На стр. 372 тома I и снова на стр. 64 тома II он ссылается на эксперименты с водой Каитоне, который получил значение 750 000 футов для высоты модуля, совпадающее с данным в таблице. Серьезную ошибочность этого числа доказывает интересный комментарий, вообще характеризующий отношение Юнга к числам, по крайней мере, в области механики твердого тела.

[1]) Если бы это число было 30 000 000 фунтов, то соответствующая высота модуля равнялась бы 8 740 000 фуитов, что уже близко к другим данным Юнга для стали. Соответствующее значение E должно быть равно 21 000 кгс/мм^2, что хорошо согласуется со значением 20 900 кгс/мм^2, принятым для стали в наши дни.

18 января 1826 г. Бенджамен Беван (Bevan [1826,1], стр. 304—306) в письме к Томасу Юигу, как иностранный секретарь Королевского Общества, деликатно указал иа то, что в его иитерпретации экспериментов Кантоне, описанных за 20 лет до этого, Юиг, по-видимому, принял объемную деформацию за линейное удлинение [1]) и, таким образом, ошибся в три раза при вычислении модуля, так что вместо 750 000 футов для воды он должен был получить 2 250 000 футов. Истиная причина, побудившая Беваиа указать на это Юнгу, была более серьезной, так как в серии экспериментов со льдом на водоеме вблизи Лейтоиа Бассарда в морозную зиму 1826 г., испытывая на изгиб консольиые ледяные балки длиной 100 дюймов, шириной 10 дюймов и средней высотой 3,97 дюйма, он показал, что высота модуля льда равна 2 100 000 футов, а не 850 000 футов, как отмечено Юнгом в его таблице. Беван предположил, что то же смешение объемных и линейных размериостей по отношению к модулю упругости имело место и при рассмотрении данных по льду [2]). Юнг в конце письма Бевана, представленного

---

[1]) Придя к такому выводу (стр. 306), Беван выразил так часто бывающую слабой надежду экспериментатора, вступающего в серьезиый конфликт с большим «авторитетом»: «Я бы не стал беспокоить Вас своим письмом, но если мороз продлится еще иесколько дней, это создаст благоприятную возможность проверки или корректировки результатов моих эксперимеитов».

[2]) Особые трудности, возникающие перед экспериментатором XIX века при определении модуля упругости льда, хорошо видны из любопытной вводной части письма Бевана, датированиого 18 января 1826 г. Норвич (Norwich): «Дорогой сэр, я уже давио стремился повторить мой эксперимент по упругости льда, однако до нынешнего мороза не имел такой возможиости вот уже в течеиие двух лет, прошедших с тех пор, как я испытал лишь один образец и при этом слишком малых размеров, который к тому же разрушился почти сразу после иачала эксперимеита. Из этого эксперимеита я получнл значеиие модуля, равиое 6 000 000 футов. Однако, убеднвшись, что результаты эксперимеита в этом сезоне значительно ииже, хотя и стабильнее прежиих, я провернл вычисления, сделанные в 1824 г., и нашел ошибку в приведении к общему знаменателю, не замеченную миою ранее, исправление которой привело к зиачению модуля 2 100 000 футов, что согласуется с данными этого сезоиа. Я не могу, правда, гарантировать абсолютную точность второй цифры, так как она может измениться при измеиении толщины образца всего лишь иа 1/100 дюйма.

Сильный мороз в настоящее время позволил мне выполнить эксперимент в значительио большем масштабе, используя лед от 1,25 дюйма до 4 дюймов толщиной; возможно, необходимо объяснить принятую мною методику эксперимента со льдом толщиной около 4 дюймов, которая заключалась в следующем.

На большом пруду, меиее чем в миле от моей резидеиции в Лейтон Бассарде, глубина которого по моим измерениям достигала 4 футов, я сделал во льду пропилы по трем сторонам a, b и c параллелограмма (по-видимому, прямоугольника.— *А. Ф.*), чтобы выделить образец для испытаний, причем одна сторона, примыкающая к a (противоположная b.— *А. Ф.*), осталась нетронутой. Размеры полученной призмы были 100 дюймов в длину, 10 дюймов в ширину, а толщина льда была различной по разным сторонам: по a она равнялась 3,62, по b — 4,0, а по c — 3,75 дюйма. Чтобы избежать затруднений при вычислениях я принял толщину льда одииаковой и равной 3,97 дюйма или среднему зиачению; хотя понимал, что это не будет строго точио, но в силу того, что эксперимеит проводился с крупномасштабными образцами, вес которых доходил до 25 фуитов, и прогиб пропорционален приложенной нагрузке, я счел эксперимент хорошим. В этом ис-

им в *Transaction*, добавляет следующее замечание, убедительно свидетельствующее о том, что он не до конца понимал различие между объемным поведением материала и E-модулем:

«Из приведенных объяснений не следует, что модули должны определяться различно в экспериментах для твердых тел и жидкостей, хотя линейное сжатие жидкости составляет только 1/3 линейного сжатия твердых тел, число частиц, действующих в любом данном сечении, должно быть больше в два раза этого давления и должно, по-видимому, обеспечивать то же сопротивление. И в простом эксперименте по распространению звука в куске льда, проведенном поспешно несколько лет тому назад (это же слово было использовано в 1807 г. при пояснении опыта со льдом, давшего значение модуля 850 000 футов), величина модуля получилась равной только 800 000 футов, однако предположение о бо́льшей точности измерений в этом случае должно привести к большей величине модуля» (Young [1826, 1], стр. 306).

Очевидно, Юнг имел неясные представления о сути физических измерений, полагая, что поспешность, с которой он проводил свой эксперимент, могла быть разумным объяснением расхождения почти в три раза при сравнении его собственного значения модуля упругости, определенного с использованием измерения скорости звука во льду, с бо́льшим значением модуля, полученным Бевано́м [1]).

В английской литературе по механике твердого тела от Тредгольда, Ренни и Бевана в 20-х гг. до Кельвина в 80-х гг. XIX века можно найти много данных по линейной упругости в форме Юнга с использованием неудобной для применения высоты модуля. (Похоже, что вес модуля не привлек особого внимания.) Тот факт, что высота модуля является весьма неудобной характеристикой, немедленно становилось очевидным при сравнении результатов, полученных различными экспериментаторами, не измерявшими удельного веса образцов, свойства которых исследовались. За исключением Морэна, который в 1862 г. представил данные по высоте модуля меди и железа в километрах, ученые континентальной Европы, следуя ранним руководствам Кулона 1784 г. и Дюло

пытании нагрузка была приложена на расстоянии 98 дюймов от стороны, связывающей призму с ледяным массивом, и нагрузке 25 фунтов соответствовал прогиб 2,06 дюйма, откуда я получил значение высоты модуля равным 2 100 000 футов.

После этого я повторил эксперимент на образцах различных размеров и при другой толщине льда, и во всех случаях результаты колебались в близких пределах в соответствии с неточностью измерения толщины, независимо от того, измерялся ли прогиб прямо на воде или на извлеченном из воды образце льда, как это делается с деревом или металлом».

[1]) Уже написав это, я нашел похожую ссылку на эксперименты со льдом Бевана и добавленное к ней Юнгом примечание в статье лорда Кельвина по упругости в Британской энциклопедии 1878 года, в которой он уделяет несколько строк «ошибочной логике» Юнга в этом вопросе как пример силы эффективности экспериментирования для достижения научного понимания предмета на разумном уровне. Разъясняющее изложение Пьера Симона маркиза де Лапласа в 1816 г. (Laplace [1816, 1]), которое включает дискуссию относительно различия между одномерным и трехмерным распространением звука в воздухе, а также историю вопроса, начиная с наблюдений Исаака Ньютона в XVII веке, не оставляет места сомнениям в том, что его еще плохо понимали в 1826 г.

1812 г. выражали измеренные константы упругости в виде, принятом в наши дни [1]). В 1878 г. когда Кельвин составил таблицу E-модулей для своей часто цитировавшейся статьи по упругости с обширной библиографией, подготовленной для девятого издания Британской Энциклопедии *(Encyclopedia Britannica)*, его восхищение Томасом Юнгом было столь велико, что он перевел данные Вертгейма для десяти различных металлов с континентальных единиц кгс/мм^2 в английские футы для высоты модуля или, как он сам называл эту величину, «длины модуля». Интересно отметить, что, сравнивая эти данные, а также полученные Рэнкином (Rankine [1858,1]) и Беваном (Bevan [1826,1]) с результатами самого Юнга (Young [1807,1]), Кельвин (Kelvin [1878,1]), цитируя Юнга, сослался на значение (для стали) «около 9 000 000 футов, якобы им полученное, а в графе, описывающей метод получения модуля, указал «вероятно, изгиб». Если воспользоваться номинальной плотностью для железа и стали, высота модуля около 9 000 000 футов дает при пересчете модуль E, равный примерно 22 000 кгс/мм^2. Это, конечно, весьма близко к среднему значению, обычно получаемому для стали, но не к той величине, которая приведена в таблице Юнга.

В трактате Юнга единственное описание результатов эксперимента, касающихся высоты модуля, содержалось в Комментарии, следующем за теоремой о поперечных колебаниях призматических и цилиндрических стержней (см. Young [1807,1], § 398, т. II, стр. 84). При рассмотрении этой задачи Юнг использует разложение искомой функции в ряд при решении уравнения Бернулли — Эйлера для балок. Это позволило ему вывести зависимость между высотой модуля и частотой колебаний для консольных и свободно опертых балок. Приводим указанное описание.

«Комментарий. Все эти результаты легко подтверждаются экспериментом и дают простой способ сравнения упругости различных материалов. У стального камертона l было равно 2,8 дюйма, d=0,125 (дюйма), n=512, так что h равно около 8 530 000 футов. В латунной пластинке, закрепленной на одну пятую длины с одного конца, l равно 6,2 дюйма, d=0,072 (дюйма), n=273 и h=4 940 000 (футов); в

[1]) Исключение из этой практики уже отмечалось выше в одном случае, когда высота модуля обладала известным преимуществом, а именно для таких тел, как шелковая нить Вебера или органическая ткань Вертгейма и т. п., для которых определение диаметра затруднительно или невозможно, но для которых плотность известна. В этом случае высота модуля является относительной мерой свойств. Дюло ввел в качестве характеристики упругости удлинение единичного куба под действием единичной нагрузки, которая использовалась затем в течение полувека как определение упругости Саваром и Массоном в 30-х и 40-х гг. XIX века, а также в более удобной форме Купфером в 50—60-х гг. того же века. Эта формулировка позволяла вычислять E прямо из экспериментальных данных, но сама по себе, разумеется, не приводила к обобщению определяющих уравнений линейной упругости на сложное напряженное состояние или анизотропию. Дюло, проводившего эксперименты в 1812 г., можно не подвергать этой критике, так как 20-е гг. XIX века еще должны были только наступить, но Массон, Савар, Купфер и другие с 1837 по 1870 г., несомненно, были более ограничены в понимании того большого теоретического развития, которое имело место в упругости в течение указанного промежутка времени.

проволоке из латуни низкого качества $l=20$ дюймов, $d=0{,}225$ (дюйма), $n=74$ и $h=4\,700\,000$ (футов). Пластинка кроигласа 6,2 дюйма длиной и 0,05 дюйма толщиной звучит с частотой 284 колебания в секунду, откуда $h=9\,610\,000$ футам.

Самшитовая линейка 0,012 фута толщиной и 1,01 фута длиной колеблется с частотой 154 колебания в секунду, откуда $h=5\,050\,000$ (футов). Если этот образец закрепить посередине, тон становится чуть более чем на октаву с четвертью выше. Найденная Риккати разность между упругостью стали и латуни несколько превышает полученную здесь. Для льда величина h, по-видимому, равна около 850 000 футов.

Два небольших бруска из хвойной древесины, имеющие длину, равную одному футу, звучали с частотой 270 и 384 колебания в секунду; их вес 153 и 127 гранов соответственно. Отсюда формула $0{,}0242\,n^2l^2$ дает значения почти 35 и 65 фунтов для изгибающих сил. Эксперимент, который был проведен несколько небрежно, дал значения 36 и 50» (Young [1807, 1], т. II, стр. 86) [3]. (1 граи=0,065 гс.—*А. Ф.*)

Как уже упоминалось выше, значение 8 530 000 футов для стали существенно ниже приведенного в таблице Юнга. Поскольку Юнг особо отметил, что отношение E-модулей стали и латуни, найденное Риккати, было несколько выше его собственного, он, несомненно, знал, что модуль E появился в литературе за двадцать пять лет до выхода в свет его курса лекций [1]).

Разумеется, на основании всех этих обсуждений я не пытаюсь недооценить научные заслуги Томаса Юига. Несомненно, что его влияние на английское общество того времени да и на общество по другую сторону Ла-Манша, хотя и в меньшей степени, было значительным. Поскольку, однако, легенда ошибочно отдала ему пальму первенства в некоторых представленных здесь вопросах, было немаловажным описать критически и в деталях полный объем этого вклада в экспериментальную механику в области, касающейся констант упругости.

Юнг был глубоко уверен в том, что упругость сред, включая твердые тела, может быть определена по скорости звука. Основываясь на факте, сообщенном ему профессором Робизоном, что «он слышал звук колокола, передающийся по воде на расстоянии 1200 футов [2]) (т. е. что звук распространялся в жидкости), Юнг, используя высоту модуля для воды, вычисленную по данным Каитоне, нашел скорость звука, равную 4900 фут/с. Других измерений скорости звука в воде для сравнения с этим значением не было [3]).

---

[1]) Мы уже видели, отношение $E_{\text{сталь}}/E_{\text{латунь}}$, полученное Риккати, было равно 2,06, в то время как Хладни получил значение 2,25. Преобразовав модули Юнга, указанные в Коммеитарии, в E-модули с помощью плотностей, приведенных в табл. 43, найдем для стали величину 20 200 кгс/мм^2, а для латуни — 12 650—12 000 кгс/мм^2, откуда получаем для отношения $E_{\text{сталь}}/E_{\text{латунь}}$ весьма низкие значения 1,59—1,68.

[2]) (Young [1807, 1]; т. I, стр. 372). Аналогичные наблюдения были сделаны Бенджамеином Франклином на дистанции, равной полумилн, с помощью ударяемых друг о друга камней. Исследуя прохождение звука в рудниках, карьерах от одного туннеля к другому, многие физики, включая Гей-Люссака и Хладни, поражались той высокой его скорости, которая может существовать в твердых телах.

[3]) Эта скорость 4900 фут/с не слишком отличается от первого экспериментального значения 4708 фут/с, полученного Жаном Дапиелем Колладоном (Colladon [1838, 1]) в опытах при температуре 8,1°С на Женевском озере, или от значения

Как сообщил Юнг, в 1788 г. Вунш объединил несколько сосновых стержней (деревянных досок) для определения скорости распространения звука в дереве и пришел к выводу на основе измерений, что она бесконечна [1]). Сам Юнг описывал свои исследования по этому вопросу следующим образом:

«Я обнаружил, что удар молотка по стене в верхней части высокого дома слышен как бы удвоенным для человека, стоящего около дома на земле: первый звук передается по стене, второй — по воздуху. Как это следует из экспериментов по изгибу различных твердых тел, отношение их упругости к плотности намного больше, чем у воздуха. Так, высота модуля упругости пихтовой древесины, найденная из таких экспериментов, составляет около 9 500 000 футов, откуда скорость распространения через нее импульса должна быть 17 400 футов в секунду, или больше чем три мили в секунду. Поэтому очевидно, что во всех обычных экспериментах такое распространение должно показаться мгновенным. Существуют различные методы определения этой скорости по звуку, возбуждаемому различными причинами и распространяемому вдоль исследуемой субстанции, и профессор Хладни сравнивал, таким образом, свойства многих естественных и искусственных материалов» (Young [1807, 1], т. I, стр. 373) [2]).

Эта ссылка на профессора Хладни случайно дает еще одно доказательство того, что Юнг был знаком (еще до написания своего курса лекций) с параметрами, характеризующими упругие свойства материала, поскольку, как указано выше, публикация Хладни (Chladni [1787,1]) в 1787 г. содержала ясное изложение вопроса.

5013 фут/с, найденного Вертгеймом на реке Зайне при 30°С. В свете обсуждения тех затруднений, которые испытывал Юнг в согласовании зависимости между объемной и линейной деформациями при интерпретации высоты модуля, он использовал значение 750 000 футов и получил относительно точное значение скорости звука в трехмерной среде и, возможно, поэтому не был обескуражен замечаниями Бевана. Приоритет в высказывании предположения о существовании зависимости между упругой сжимаемостью и скоростью звука часто приписывают независимо Юнгу и Лапласу. Однако мысль о наличии такой зависимости очевидно была высказана на целое столетие раньше при анализе малых колебаний (см. Truesdell [1960, 1]).

[1]) Wunsch [*Berlin Memoirs*, 1788]. Хотя я не смог найти работу, указанную Юнгом в ссылке, мое внимание привлек тот факт, что Вунш написал трактат по физике, вошедший в историю большим числом содержащихся в нем ошибок.

[2]) Жан Батист Био (Biot [1809, 1]) описал эксперимент, проведенный неизвестными датскими физиками, в чем-то похожий на опыты Юнга. На одном конце натянутой горизонтально металлической проволоки длиной 600 футов подвешивался кусок звучного металла, по которому наносился несильный удар. На другом конце наблюдатель держал проволоку «между зубами или касался ее твердыми частями органов слуха» и имел, таким образом, возможность выявить две раздельные скорости звука. При этом был сделан вывод, что звук по проволоке распространяется почти мгновенно. Хассенфратц с Гей-Люссаком проводили, по существу, такие же эксперименты с теми же самыми результатами в Парижских каменоломнях. Как подчеркнул Био, факт не только конечности, но и измеримости скорости распространения звука в твердых телах, был показан Хладни в 1787 г. в опыте с продольными колебаниями относительно коротких стержней. Био ссылается также на эксперименты Британского Королевского Общества, проведенные, несомненно, Юнгом, в которых сообщается о некоторых результатах, детали которых он не мог найти.

3.8. Использование Жаном Био труб нового парижского водопровода для первого непосредственного измерения скорости звука в твердом теле (1809)

Благоприятиая возможность для измерения скорости звука иа больших расстояниях представилась Био (Biot [1809,1]) в 1808 г. во время наблюдения за строительством водопровода в виде трубопровода из чугунных труб в Париже. Трубы были цилиидрической формы, их средняя длина, найденная по измерениям общей длины участка трубопровода, составленного из 12 труб, соединенных торцами, равнялась 2,515 м. Между фланцами труб располагались свинцовые кольцевые диски, которые очень сжимались стягивающими мощными болтами и покрывались сверху смолой для предотвращения утечки воды. Средняя толщина каждого диска, получеиная на основании измерений 12 из них, была равна 0,14256 м. Вся коиструкция трубопровода, к сожалению, имела криволинейную форму с двумя поворотами около середины общей длины. Однако так как сначала не все трубы были соединены между собой, Био со своими ассистентами имел возможность работать на участках трубопровода различной длины по мере монтажа всего трубопровода. Поскольку на результаты экспериментов Био, а также на различие между ними и полученными раиее в опытах Хладни по продольным колебаииям постоянно ссылались в течение века, они заслуживают детального описания.

Первый эксперимент был проведен Био и Бовардом по измерению скорости звука в трубопроводе из 78 труб, имеющем общую длину 196,17 м. Свиицовые диски между ними (количество их было равно 77) добавляли еще 1,10 м, так что общая длина трубопровода составляла 197,27 м. В последней трубе крепился железный стержень с подвешеиным к иему посередине колоколом и молотком, который мог ударять по колоколу и одновременно по трубе. Таким образом, одновременио возникал звук, который распростраиялся по материалу трубы и по воздуху внутри нее. Время измерялось хронометром с точностью в полсекунды. В различных измерениях использовались как десятеричиая, так и шестидесятеричиая шкала часов для варьироваиия численного выражения наблюдаемой величины. Чтобы организовать все измереиия одним хроиометром, в первой серии экспериментов фиксировался промежуток времени между момеитами прихода звука по материалу трубы и по воздуху [1]). По 53 иаблюдениям при температуре воздуха 11°С и атмосферном давлении 0,76 (метра ртутного столба.— *А. Ф.*) этот промежуток был равен 0,542 с. Ссылаясь на эксперименты Француз-

[1]) Био проводил эти измерения скорости распространения в воздухе звука как возбужденного колоколом, так и просто ударом молотка, чтобы быть уверенным в том, что различне в скорости нн в коей мере не зависело от природы возбуждающего сигнала.

ской Академии, которые для скорости звука в воздухе при 0°С и атмосферном давлении 0,76 м дали величину 334,02 м/с, Био определил значение этой скорости при 11°С, равное 340,84 м/с, что дало возможность вычислить продолжительность прохождения звука по воздуху. Затем по известному промежутку между моментами прихода обоих звуковых сигналов он нашел продолжительность прохождения звука по металлической трубе длиной 197,27 м, которая была равна 0,037 с.

Интерес Био к определению отношения скорости звука в металле к скорости в воздухе был вызван, по-видимому, желанием сравнить его со значением, полученным ранее Хладни. Если вычислить скорость звука в чугуне по измеренному промежутку времени, то получится величина 5200 м/с, отношение которой к вычисленной Био скорости звука в воздухе равно 15,25, т. е. оказывается заметно ниже значения 16,60, найденного Хладни для железа.

Био считал свои измерения на 78 трубах слишком грубыми, чтобы они могли служить чем-то большим, чем первым экспериментальным доказательством конечности скорости звука в твердых телах. В частности, на это его решение повлияла вторая серия экспериментов, проведенная Бовардом с помощью Малу, когда количество труб в конструкции трубопровода достигло значения, ровно в два раза превосходящего первоначальное; этому соответствовала полная длина вместе с дисками, равная 394,55 м. На удвоением количестве труб эти два исследователя по результатам 64 измерений получили между двумя звуками промежуток времени, равный 0,81 с. Как Био показал своими вычислениями, продолжительность распространения звука в воздухе была равна 1,158 с; на прохождение его в твердом теле оставалось 1,158—0,81=0,348 с. Био счел недостоверными результаты этих измерений и подверг сомнению свои собственные из-за их чувствительности к ошибкам. Во избежание этого затруднения он ждал, пока будут смонтированы 376 труб, что вместе с 375 дисками, на которые приходилось 5,61 м, составляло полную длину 951,25 м.

Вместе со своим ассистентом Мартином [1]) Био провел более чем 200 отдельных испытаний либо с молотком, либо с колоколом, получив разность между продолжительностями прохождения звука в металле и в воздухе, равную 2,50 с. Он констатировал, что значение 2,5 с уже не меняется: «Я поручил Мартину провести измерения, не сообщив ему свой результат, и он получил ту же величину». Полученная расчетом продолжительность прохождения звуком в воздухе расстояния 951,25 м (при температуре 11°С) равнялась 2,79 с. Если вычесть отсюда 2,5 с, то продолжительность прохождения звуком того же расстояния в металле оказалась равной 0,29 с. И хотя он считал этот результат очень точным, так как

[1]) Мартин был специалистом по конструированию хронометров и часов.

он был получен с помощью полусекундного хронометра, он решил изменить метод измерения так, чтобы повысить точность еще больше.

Он ударял по трубе и регистрировал продолжительность прохождения звука двумя хронометрами.

«Я оставил Мартина с полусекуидным хронометром на одном конце канала, а сам занял свое место иа другом конце с аналогичными часами, тщательно сверенными с первыми в иачале н в конце эксперимента, хотя, как будет видно из дальнейшего, сиихрониость хода часов не влияла на результаты. Когда часы Мартина показывали 0 или 30, он производил удар молотком, а при показаниях моих часов 15 или 45 я отвечал ему аналогичным ударом. Каждый из нас наблюдал прнход посланного нам звука и отмечал момент его прихода. Кроме того, мы приложили большие усилия, чтобы ударять точио в согласованный момент, что в конце концов было достигнуто после небольшой практики, и серии нашнх измерений стали совпадать. Одиако, как бы ии различалнсь часы, даже если их показания не совпадали, пока эта разница ие изменяется заметно в интервале 30 с, она в точности аннулируется, если взято среднее от двух последовательных наблюдений н результат стаиовится совершенно независимым от нее» (Biot [1809,1], стр. 415, 416).

Этот метод измерения, который теперь позволил находить скорость звука в металле при использовании того же хронометра, позволил получить данные, приведенные в табл. 44, которые дают продолжительность распространения звука в чугунном водопроводе длиной 951,25 м, равную 0,26 с.

Таблица 44

Био (1809)

$p-r$ (с)	$p+r$ (с)	Сумма или значение $2p$ (с)	$p-r$ (с)	$p+r$ (с)	Сумма или значение $2p$ (с)
Первая серия от 52 до 59 мин			Вторая серия от 1 ч 27 мин до 1 ч 32 мин		
—2,0	+2,5	0,5	—2,8	+3,5	0,7
—2,0	2,5	0,5	—2,9	3,5	0,6
—2,0	2,5	0,5	—3,0	3,5	0,5
—2,0	2,5	0,5	—2,9	3,5	0,6
—2,0	2,5	0,5	—3,0	3,5	0,5
—2,0	2,5	0,5	—3,0	3,5	0,5
—2,0	2,5	0,5	—3,0	3,5	0,5
—2,0	2,5	0,5	—2,9	3,5	0,6
—2,0	2,5	0,5	—3,0	3,5	0,5
			—3,0	3,5	0,5
			—3,1	3,5	0,4

Среднее значение $2p = 0{,}52$ с, откуда $p = 0{,}26$ с.

Продолжительность распространения звука по воздуху, которая также могла быть измерена, равнялась 2,76 с. Этому значению соответствовало отношение измеренных скоростей, равное 10,75. Так как вычисленное значение продолжительности прохождения звука по воздуху в трубе было равно 2,79 с, различие составляло только 0,03 с, из чего Био заключил, что эта близость «представляется внушающей доверие к результатам».

Разность между отношением скоростей звука в железе и в воздухе, найденным Хладни в опытах по продольным колебаниям и равным 16,6, и значением, полученным Био, составляющим примерно 10,5, была слишком велика, чтобы ее можно было отнести на счет случайной ошибки измерений. Это обстоятельство явилось темой дискуссии, продолжавшейся более сорока лет, в результате которой был сделан окончательный вывод о том, что одна из указанных величин должна быть совершенно неверной. Следует отметить, что Био, к которому Хладни проявлял большое уважение как к экспериментатору, никогда не проявил резкости, участвуя в этой полемике [1]) (Biot [1816,1]).

Указанное расхождение между скоростью звука в железе, измеренной Био на большой базе (водопровод большой протяженности), и результатом, найденным из опытов по продольным колебаниям коротких стержней, получившим впоследствии известность как «Хладни»-процесс, оставалось все еще необъясненным в 1851 г. В этом году Вертгейм и Бреге (Wertheim and Breguet [1851, 1]) проводили серию экспериментов на существенно бо́льшей базе, чем Био. На железной телеграфной проволоке длиной 4067,2 м Вертгейм и Бреге получили значение скорости 3485 м/с, что весьма близко к величине 3658 м/с, найденной Био в тех его измерениях, которые были более точными. Вертгейм и Бреге были еще более удивлены, когда, осуществив эксперимент Хладни, обнаружили, что значение скорости звука, полученное при использовании отрезка той же железной проволоки длиной два метра, существенно больше и равно 4633 м/с. Эти эксперименты середины XIX века, которые еще будут обсуждаться ниже в разделе 3.44, вызывают доверие к предположению Био о том, что в опытах Хладни продольные вибрации не возбуждают главную моду колебаиий [2]). Когда в 1816 г.

---

[1]) Несмотря на это, позднее эксперименты Савара, в подготовке к которым Био принял участие, навлекли на себя критику Хладни. Сотрудничество Био и Савара более известно по тому закону, который носит их имена. Вообще довольно часто можно увидеть имя Био в качестве участника экспериментов своих коллег. По-видимому, самым рискованным было его участие в первом подъеме Гей-Люссака на воздушном шаре в 1804 г. в качестве пассажира.

[2]) Однако в связи с этим следует заметить, что измереиные Хладнн скорости волн приводили к значениям модулей, не слишком отличающимся от полученных другими исследователями, например Юнгом в опытах на поперечные колебания, т. е. возннкла проблема в связи с низким значением скорости звука в длинных стержнях при сравнении с любыми типами экспериментов, динамических или статических, осуществлениых на коротких образцах. Несколько лет тому назад я

Био впервые опубликовал свой широко известный двухтомный труд (Biot. *Traité de Physique Expérimentale et Matématique* [1816,1]), он обсудил с большой подробностью свои собственные эксперименты по определению скорости звука и отдельно эксперименты Хладни, не останавливаясь подробно ни в одном из разделов на большом отличии скоростей звука в железе, найденных каждым из них.

Между тем, в 1811 г., повторяя эксперименты Био, Лего, Дезорме и Клемент (Lehot, Désormes, and Clément [1811,1]) нашли весьма низкую скорость звука, всего 593 м/с, в железных трубах. Хладни (Chladni [1817,1]) не согласился с результатами этих экспериментов, считая их недостоверными: он указал на то, что трубы в них были плохо связаны между собой, в отличие от опытов Био, в которых трубы были надежно соединены. Био также был брошен вызов. В 1811 г. Бенценберг (Benzenberg [1811,1]) выступил с нападками на эксперименты Био на том основании, что Био не использовал хороших инструментов для измерений, т. е. Бенценберг скептически относился вообще к использованию хронометра. Когда Хладни в 1817 г. обсуждал опыты Лего и др., он дал обзор расхождений результатов своих и Био и высказал предположение, что любой вид соединений многочисленных секций труб уменьшает скорость распространения звука и, кроме того, возможно, что база длиной даже около километра является слишком короткой для измерения скорости звука. (В действительности же, демонстрация Био того факта, что результаты его измерения скорости звука в воздухе, находящемся в трубе, оказались в исключительной близости к известному значению, эффективно отклоняет критику Бенценберга, а, как было отмечено выше, мы ретроспективно по измерениям Вертгейма и Бреге, выполненным на сплошных образцах, знаем, что замечание об уменьшении скорости звука якобы из-за наличия соединений труб не было достаточно обоснованным. Разумеется, это не могло быть продемонстрировано в 1817 г.)

Хладни, который открыл дискуссию в ответ на статью Георга Вильгельма Мунке (Munke [1814,1]) о расхождениях, добавил странное заявление о том, что, хотя отношение скоростей Био существенно ниже его собственного, результаты Био полностью согласуются с его данными. Различие же он отнес на тот счет, что существовали многочисленные секции и соединительные части, а также, что использовалось дерево в соединительных узлах. Относительно последнего он ошибался [1]), так как все соединения были выполнены с помощью свинцовых кольцевых дисков. Хладни затем несколько не-

---

обнаружил аналогичные расхождения при сравнении значений волновой скорости в алюминиевой проволоке длиной 500 футов и в 12 футовых отрезках такой же проволоки. Вследствие интереса к этому вопросу я сам осуществил подобные эксперименты лет десять тому назад, однако так и не нашел времени, чтобы опубликовать результаты.

[1]) Био использовал деревянные хомуты снаружи для крепления узлов на месте, но они не являлись частью системы, по которой распространялся звук.

логично критиковал Мунке за использование по сути дела тех же аргументов, которые выставлял сам, и принялся горячо возражать на дополнительные его замечания о том, что трубы, на которых экспериментировал Био, возможно, не были железными, так как это недолговечный материал для водяных труб [1]).

Эта полемика приняла более обостренный характер после высказанного в 1819 г. мнения о том, что Хладни вообще не мог возбудить продольных колебаний в стержнях с одним защемленным и вторым свободным концами. Эта критика содержалась в мемуаре Феликса Савара (Savart [1820,1]), на которую Хладни резко возразил в заметке, опубликованной двумя годами позже (Chladni [1822, 1]). На предположение Савара о том, что Хладни использовал аналогию, основанную на наблюдении свойств колебаний воздуха в органных трубах, закрытых с одной стороны, Хладни указал, что он проводил эксперименты на стержнях во многих случаях публично. Отвечая на другие аналогичные нападки, Хладни заметил, что фактически многие из этих экспериментов с металлом, деревом и стеклом он проводил в присутствии профессора Гильберта и в точности тем способом, который по утверждению Савара был невозможен. Хладни заявил в 1822 г.:

«Итак, я не заслуживаю упрека как выдающий за результаты экспериментов что-либо такое, что было лишь игрой воображения или неверных предположений, исходящих из аналогий, упрека, который если бы он был подтверждеиным, достаточен для лишения физика всего того доверия, на которое он мог рассчитывать» (Chladni [1822, 1], стр. 75).

Наблюдения отдельных расхождений в значениях модулей на протяжении XIX века не ограничивались этими ранними данными. В конце настоящей главы, в терминах недавно открытой мультимодульности изотропных тел, будет показано, что по крайней мере умозрительно можно примирить наблюдаемые большие расхождения, а также можно прийти к заключению, что эксперименты Хладни, Вертгейма и др. действительно отвечали той точности, которая в них требовалась.

В конце своей работы Био (Biot [1809,1]) описал серию акустических экспериментов с длинными трубами, которая в наш век телефона и радио кажется особенно забавной. Он был удивлен возможностью разговаривать шепотом с ассистентом, который находился от него на расстоянии, равном почти километру.

«Не было необходимости говорить прямо в трубу, чтобы тебя услышали. Обычный разговор в двух метрах от отверстия передавался полностью, и, запнсы-

---

[1]) Био не был единственным экспериментатором, который заинтересовался возможностями (с точки зрения проведения экспериментов) иового парижского водопровода. П. С. Жирар (Girard) в опубликованной в 1831 г. в Mém. Academ. Sci. (Paris) 10, 405—456 (1831) работе Mémoire sur la pose des conduites d'eau dans la ville de Paris упоминает о своих раиних экспериментах по тепловому расширению в 1805—1815 гг. на тех же самых парижских железных (т. е. чугунных) водопроводных трубах [1831, 1].

вая свои наблюдения, я спросил у Мартина время на его хронометре, как будто я спрашивал кого-то, стоящего в двух футах от меня. Этот способ разговора с невидимым собеседником является столь странным, что, даже если знаешь причину этого, невозможно отделаться от чувства удивления» (там же, стр. 419) [1]).

Шум Парижа в трубе длиной 951 м сначала побудил заключить, что это была предельная длина, при которой могла бы происходить такая передача звука, однако когда он шел к участку монтажа «с Мартином и двумя смышленными рабочими» между часом и четырьмя часами утра, он мог слышать даже малейший шепот. Он также обнаружил, что, разряжая пистолеты у одного конца трубы, он был в состоянии погасить свечу, стоящую в полуметре от другого конца, находящегося на расстоянии почти в километр. Для изучения затухания как возможной функции частоты он поставил играющего флейтиста у одного конца трубы, а у другого наблюдал лучшую слышимость низких нот, чем высоких. Вывод, который был сделан из этого наблюдения, оказался совершенно неверным, на что Био указал сам в любопытном примечании вскоре после этого:

«После того как этот мемуар был прочитан, я убедился в том, что человек, игравший на флейте, имел слабую грудь и очень затруднялся брать высокие ноты, так что иногда пропускал их совсем. Это объясняет, почему я их не слышал. Однако я пожелал, чтобы эта особенность моей первой версии осталась, чтобы было видно, что я честно сообщаю малейшие детали этого явления, так что моя правдивость в этом вопросе должна лишь подтверждать достоверность других приведенных мною результатов» (Biot [1809, 1], стр. 422).

Последним интересным моментом в конце работы Био является его замечание о том, что можно отчетливо различить до шести раздельных эхо, если звук раздавался у одного конца трубы, причем промежутки между ними примерно равнялись времени, необходимому для прохождения звука до другого конца трубы, отражения звука от противоположного конца и возвращения. Эти эхо возникали через равные промежутки времени, весьма близкие к 0,5 с, необходимые для прохождения удвоенной длины трубы. Однако слышать их можно было только у того конца трубы, где был возбужден звук.

3.9. Введение Альфонсом Дюло квазистатических измерений при изучении линейной упругости (1813)

Во второй половине XX века, когда на экспериментальные работы, опубликованные более чем пять лет тому назад, почти никогда не ссылаются в каких бы то ни было деталях, а если и ссылаются, то эти ссылки помещают лишь во введении, охватывающем пернод

[1]) Можно думать, что Био вспоминал о том, что получая ответ о времени от Мартина с другого конца трубы, он должен был знать о результатах эксперимента, который намеревался осуществить.

лет в тридцать, и рассматривают как часть туманных, но предположительно точных исторических источников вопроса; разительным контрастом представляется детальное обсуждение литературных источников за более чем пятидесятилетний период, за которым последовало описание результатов важнейших экспериментов Альфонса Жана Клода Буржуньона Дюло, осуществленных в 1811 г. (Duleau [1813,1]). В этом году Дюло было поручено выполнить проект моста из кованого железа через реку Дордонь в Кубзаке. Готовясь к выполнению этого задания, он провел в Бордо серию экспериментов на образцах из ковкого железа. Для того периода его эксперименты были уникальными тем, что были ограничены малыми деформациями, что соответствовало условиям работы под нагрузкой материала предполагаемого моста. Образцами во всех случаях служили железные элементы проектируемого моста, выполненные в натуральную величину, полное число которых превышало сотню.

После весьма обширного обзора существующих теорий, относящихся к поведению призматических стержней прямоугольного, квадратного и круглого поперечных сечений при изгибе, растяжении, сжатии и кручении, Дюло приступает к проведению многочисленных экспериментов, проверяя результаты их различными расчетами, включая использование формулы Эйлера для продольного изгиба стоек, и меняя размеры образцов от опыта к опыту. Он также осуществил эксперименты со стержнями арочной формы, но тех же поперечных сечений, и с системами, представляющими собой ансамбль призматических стержней, проверяя такой вопрос, как трение между примыкающими друг к другу стержнями при изгибе и т. д. Кроме того, он проявил интерес к «линии раздела между областями сжатия и растяжения» в балках из ковкого железа [1]) (т. е. к нейтральной линии), а также линейности зависимости между напряжениями и деформациями.

Успех этих первых широких экспериментальных исследований в области инфинитезимальной упругости подтверждается тем фактом, что опыты Дюло стали основной темой для дискуссий и критики как в отношении предмета дальнейших экспериментов, так и последующего развития линейной теории упругости на протяжении всей первой половины XIX века. Очень немногие экспериментаторы дали такой толчок развитию в этой области в то время. В 1842 г., когда Вертгейм (Wertheim [1844,1], работа представлена в 1842 г., опубликована в 1844 г.) представил первое большое эксперимен-

[1]) Заблуждение Дюло относительно положения нейтральной линии при изгибе отмечалось несколькими учеными в последующие годы, включая Сен-Венана в 1857 г. Однако критика относилась к вводным обсуждениям этого вопроса и нисколько не умаляла значения самих экспериментов, в которых были представлены наблюдаемые размеры, силы, прогибы и т. д. Легко теперь противопоставлять эти разрозненные данные и гипотезы прошлого обычной современной практике, имеющей дело со сложными взаимозависящими измерениями и их интерпретацией.

тальное исследование по константам упругости в современном смысле, данные Дюло еще рассматривались как окончательная экспериментальная работа по этому вопросу. Его результаты были впервые опубликованы в Мемуаре в 1813 г. В 1819 г. Коши, Пуассон и Жирар представили анализ мемуара Дюло в процессе рекомендации его избрания в члены Французской Академии. В следующем году мемуар был переиздан в виде брошюры [1]) (Duleau [1820,1]), на которую в основном и ссылались во всем последующем изучении результатов Дюло [2]).

Дюло действительно стоял у истоков квазистатической упругости. Он сам отмечал ранее в статье, что не мог найти чьих-либо экспериментов в литературе, за исключением двух опытов Обре, выполненных в 1790 г., который сообщил о результатах своих квазистатических исследований малых деформаций. Все другие квазистатические испытания, результаты которых имелись в распоряжении Дюло, когда он начинал свою работу, по его утверждению, ставили своей единственной целью определение силы, необходимой для разрушения стержней при осевом ее направлении. Обре, который был Генеральным инспектором мостов и шоссейных дорог [3]), нагружал свободно опертую по концам балку посередине пролета силой, перпендикулярной к оси балки, и наблюдал пропорциональность между прогибом и нагрузкой. Дюло отметил, что эти результаты согласуются с теорией упругих стержней, и в 1811 г. поставил систему опытов, задачей которых являлось, несомненно,

[1]) Брошюра 1820 г. содержала также Дополнение, дающее оценку экспериментов тех авторов, чьи исследования между 1813 и 1820 гг. были стимулированы первоначальным мемуаром Дюло 1813 г. Дюло отметил, что каждый из десяти экспериментаторов, на которых, по его предположению, оказала влияние публикация 1813 г., независимо от того, находились ли они в Англии, Швеции, Франции или России, просто продолжали проводить опыты по определению разрушающей нагрузки, игнорируя, по крайней мере в комментариях, если не в экспериментах, то оригинальное, основное и существенное, что содержалось в его работе.

[2]) Пирсон в книге «История теории упругости и сопротивления материалов» Тодхантера и Пирсона (Todhunter and Pearson «*History of the Theory of Elasticity and the Strength of Materials*») также обсудил только эту брошюру, поскольку даже к 1886 г. мемуар 1813 г., по-видимому, был уже труднодоступен. Комментарий Пирсона к этой важной экспериментальной работе ограничился только критикой не существенного обзора Дюло существующих теорий и сравнения некоторых его заключений о расчетах в свете предложений Робизона и т. д. Однако когда речь зашла о важной экспериментальной части работы, его анализ свелся к одному единственному замечанию: «Остальная часть книги содержит обсуждение экспериментов на стальных стержнях» (том I, стр. 121). Интересно привести список нескольких авторов из числа тех, кто детально изучил труд Дюло в последующие годы. В него входят: Тредгольд (Tredgold [1824, 1]), Савар (Savart [1829, 1]), Лагархельм (Lagerhjelm [1829, 1]), Барлоу (Barlow [1837, 1]), Ходкинсон (Hodgkinson [1831, 1]), Навье (Navier [1833, 1]), Понселе (Poncelet [1829, 1] и [1841, 1] (два издания)), Вертгейм (Wertheim [1844, 1]), Клапейрон (Clapeyron [1858, 1]) и Сен-Венан (Saint-Venant [1856, 1]).

[3]) Aubrey: *Mémoire sur Différentes Questions de la Science des Constructions Publiques et Économiques* (Lyon 1790). (Обре. Мемуар о различных вопросах науки о гражданских и промышленных конструкциях.— Лион, 1790). Эта ссылка взята у Дюло, сам я не видел публикации.

первое, экспериментальное, изучение квазистатической линейной упругостн: установить, насколько общей была корреляция между теорией и экспериментом в 1811 г. Он называл линейные свойства материалов «совершенной упругостью». Дальнейшее обсуждение основано на моем изучении брошюры Дюло 1820 г., сравнении обсуждений и повторного табулирования данных Дюло, произведенных многочисленными исследователями, которые рассматривали их на протяжении длительного промежутка времени, а также на изучении обзора 1819 г. в работе Коши, Пуассона и Жирара, подготовленной для Французской Академии.

Дюло провел в общей сложности 105 экспериментов, многие из которых содержали различные типы испытаний на одних и тех же образцах; такие испытания он относил к категории простых. Опыты, которые все были сделаны с железными образцами, включали: (a) изгиб свободно опертых балок с консолями различиых форм поперечного сечения нагрузкой, приложенной в различных точках; (б) осевое сжатие тех же стержней при разных способах закрепления концов с целью определения эйлеровой критической силы (Дюло был не в состоянии измерить осевую деформацию этих образцов с достаточной точностью, чтобы определить линейность ее зависимости от силы, не говоря уже об определении E-модуля); (c) кручение сплошных и полых стержней с различной формой поперечного сечения; (d) деформирование систем из железных элементов, соединенных различными способами, которые представлялись Дюло практически интересными при проектировании мостов; (e) деформирование арок с защемленными концами.

Как было отмечено выше, все эти эксперименты были поставлены в 1811 г., т. е. только через четыре года после того, как Юнг ввел свои ограниченные концепции высоты модуля и веса модуля, поэтому чрезвычайно интересно обнаружить в работе Дюло не только правильное определение модуля E в современных терминах, но и детализированное квазистатическое определение этого модуля упругости для железа, основанное на детальном изучении 25 тщательно подготовленных экспериментов. Из этих данных Дюло получил также поразительно современное среднее значение модуля E, равное 20 430 кгс/мм^2.

Анализируя свои данные, Дюло нашел, что наиболее отклонившимся от среднего значения модуля E для железа были: максимальное, равное 24 922 кгс/мм^2 и минимальное — 16 121 кгс/мм^2. Из соображений удобства он выбрал величину E=20 000 кгс/мм^2, которая стала общепринятой для физиков и инженеров на протяжении последующих четырех десятилетий, пока более точные эксперименты Вертгейма не стали играть роль стандарта для второй половины XIX века. Подобно всем экспериментаторам высшего класса Дюло произвел много перекрестных проверок и привел детальный критический анализ всех многочисленных описанных экспериментов.

В примечании к выводам своей работы «Законы сопротивления сварочного железа, основанные на результатах предварительных экспериментов» (Duleau [1820,1]), Дюло писал, что в соответствии с хорошо известной формулой найденное им квазистатическое значение модуля упругости приводит к значению скорости звука в железе, равному 5018 м/с [1]). Определению этого значения предшествовала описанная выше дискуссия, развернувшаяся вокруг различия между динамическими модулями, определенными Хладни и Био. Могло бы и не быть предмета для дискуссии, если бы именно этот аспект экспериментальных результатов Дюло не был полностью игнорирован; весьма часто приходится наблюдать подобные исторические ошибки [2]).

Представляя свои данные, Дюло в серии примечаний описывает как предысторию каждого образца, так и частные наблюдения при испытании. Он сводит в таблицы результаты измерений расстояний между опорами, размеров поперечных сечений, которые перепроверяются с помощью взвешивания образцов и измерения их полной длины, прогибов под нагрузкой 10 кг, приложенной посередине пролета, а также результаты вычислений этих прогибов по элементарной теории балок, используя при этом значение модуля, определенное, как указывалось выше, из анализа результатов 25 экспериментов. Он приводит также максимальную нагрузку, до которой образец может остаться «совершенно упругим», т. е. нагрузку, соответствующую пределу упругости.

Дополнительно для каждого из очень большого числа брусьев он табулировал измеренные вертикальные силы, которые сравнивал с вычисленной по формуле Эйлера для критической силы применительно к защемлению или условиям свободного (шарнирного) опирания на концах, имевшим место в эксперименте.

Результаты Дюло, хотя и имеют большое историческое значение, слишком обширны, чтобы представить их здесь в деталях. Читателя можно отослать к мемуару 1820 г., который с экспериментальной точки зрения является замечательным документом. Так как, возможно, это будет более интересно для современника, я выбрал для помещения в настоящую книгу таблицу данных, которые со-

---

[1]) Заметим, что в обзорной статье Коши, Пуассона и Жирара для нагрузки, необходимой для удлинения образца длиною 1 м на 1/10 мм, было дано ошибочное значение 4 кгс/мм^2, которое приводило к значению модуля E, равному 40 000 кгс/мм^2, после чего авторы обзора утверждали: «Исходя из этого результата, можно, пользуясь известной формулой, определить скорость звука в сварочном железе; эта скорость равна 7087,82 м/с». (Cauchy, Augustin Louis (rapporteur, avec Poisson et Girard): Analyse d'un mémoire intitulé: (Duleau) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé. Annales de Chimie et Physique, deuxième serie 12, 133—148, [1819, 1], стр. 145.)

[2]) К объектам, также игнорировавшимся, относится скорость звука, полученная Юнгом, которая, подобно скорости, определенной Дюло, могла бы быть аргументом, поддерживающим Хладни.

Таблица 45

Дюло (1813). См. Навье (1851)

№ п/п	Образцы, с которыми проводился эксперимент (балки)	Расстояние между опорами (м)	Ширина поперечного сечения образца (мм)	Высота поперечного сечения образца (мм)	Прогиб в середине пролета (мм)	E (кгс/мм²)
1	Perigord железо. Поперечное сечение — равносторонний треугольник со стороной 0,038 м. (Угол поворота одинаков при опирании образца на ребро или на сторону.)	3	—	—	7,6	—
2	Perigord железо	1	61	5,5	12,57	19 596,89
3	Тот же образец	0,5	61	5,5	1,71	18 006,86
4	Английское железо после сильной ковки	3,035	34	8,56	136	24 977,72
5	Тот же образец	3,075	8,56	34	13,5	16 004,07
6	Perigord железо	2	30	11	24	20 869,86
7	Тот же образец	1	30	11	3	20 869,86
8	Perigord железо мягкое (употребляемое для подков)	2	70	11,2	9,5	21 390,60
9	Perigord железо	1	68	11	1,5	18 414,58
10	То же после ковки	2	45	12	12	21 433,47
11	Perigord железо	2	40	11,5	21	15 653,86
12	Тот же образец	1	40	11,5	2,5	16 436,55
13	Тот же образец	2	11,5	40	1,67	16 271,80
14	Perigord железо (после ковки)	3	77	14	14,4	22 185,36
15	Английское железо марки В (после ковки)	1,5	67,8	14,7	2	19 585,60
16	Perigord железо	3	25	15	37	21 621,62
17	Тот же образец	3	15	25	14	20 571,43
18	Perigord железо	1	58	16,3	0,57	17 460,20
19	То же	3	39	19,6	10,8	21 282,39
20	Тот же образец	3	19,6	39	2,8	20 734,61
21	Perigord железо	2	60	20	2	20 833,33
22	То же	3	60	20	6,6	21 306,82
23	Тот же образец	3	20	60	0,75	20 833,33
24	Perigord железо	5	120	20	15	21 701,39
25	Landes железо	2	120	21	1	17 996,62
26	Perigord железо	3	39	24,5	6	14 615,23
27	Тот же образец	3	24,5	39	2,33	19 933,70
28	Perigord железо (после ковки)	3	67	26	2,3	24 921,90
29	Perigord железо	5	108	30	4,75	22 561,55
30	Тот же образец	5	30	108	0,4	20 672,71
31	Perigord железо	2,92	31	31	3	22 465,65

Таблица 45 *(продолжение)*

№ п/п	Образцы, с которыми проводился эксперимент (балки)	Расстояние между опорами (м)	Ширина поперечного сечения образца (мм)	Высота поперечного сечения образца (мм)	Прогиб в середине пролета (мм)	E (кгс/мм²)
32	Тот же образец, поставленный на ребро	—	—	—	3,35	—
			Диаметр (мм)			
33	Круглое железо после сильной ковки	3,69	21,49	—	48,25	—
34	То же	2,99	21,51	—	27,5	—
35	Круглое английское железо, то же	2,93	23,52	—	18	—
36	Круглое Arriege железо, то же	2,92	26,82	—	10	—
37	Круглое Bilbao железо, очень мягкое	2,92	31,8	—	5	—
			Ширина образца (мм)			
38	Литая английская сталь, маркированная, «Хантсман»	0,98	13,3	5,9	32,05	26 921,33
39	Тот же образец	0,98	5,9	13,3	8,4	20 173,26
40	Цементитная сталь из Германии, маркированная «Фортсман», используемая для бритв	0,68	14,5	7,8	8	14 246,82
41	Тот же образец	0,68	7,8	14,5	2,1	15 718,00
42	Сталь того же типа	1,845	25,7	21,6	2,8	21 648,81
43	Тот же образец	1,845	21,6	25,7	2,2	19 463,16
44	Сталь того же типа	1,845	28,5	21,9	2,6	20 172,89
45	Тот же образец	1,845	21,9	28,5	1,8	17 204,85
46	Сталь того же типа	1,35	54,8	25,5	0,55	12 306,12
47	Тот же образец	1,35	25,5	54,8	0,27	5 427,86
48	Сталь того же типа	1,35	52	26,6	0,5	12 567,79
49	Тот же образец	1,35	26,6	52	0,3	5 481,03

держатся в книге Навье [1]), изданной в 1851 г. Сен-Венаном (Навье умер в 1836 г.), и к которым я добавил некоторые вычисления для E-модуля (см. табл. 45).

[1]) Navier [1851, 1]. Это третье издание книги Навье, в первый раз опубликованной в 1833 г. Издание 1851 г. содержит Приложение Сен-Венана. В этом Приложении Сен-Венан ссылается на 16 неудачных экспериментов, проведенных в Школе мостов и дорог (École des Ponts et Chaussées) Навье и Бруером.. Навье отнес трудности на счет примененного оборудования, откуда, возможно, возникло впоследствии его недоверие к испытательным машинам. По-видимому, как указал Дюло, основным источником затруднений Навье был скорее неудачный выбор образца, длина которого была слишком мала по сравнению с толщиной для того, чтобы получить имеющие значение результаты при изгибе для сравнения с теорией.

В таблице опущены идентификационные номера, которыми Дюло неизменно выделял каждый эксперимент. Тем не менее я счел необходимым удостовериться в них и проверить точность таблицы.

Многие из 105 экспериментов Дюло послужили предметами отдельных дискуссий на протяжении последующего полувека не только о предполагаемом и действительном национальном превосходстве версии о железе в одной стране над версией в другой, но также относительно деталей частных испытаний (см., например, Ходкинсон (Hodgkinson [1831, 1]) или Барлоу (Barlow [1837, 1])). Так, эксперимент Дюло по изгибу свободно опертой балки с поперечным сечением в форме равностороннего треугольника, нагруженной посередине пролета, в котором он не обнаружил различия в зависимости между прогибом и нагрузкой при опирании балки на вершину или на сторону треугольника, вызвал оживленную дискуссию в 20-х и 30-х гг. XIX века. На рис. 3.15 показаны графики, построенные мною по табличным данным Дюло для указанных двух ситуаций; сам Дюло пришел к заключению об отсутствии разницы на основании близости числовых значений [1].

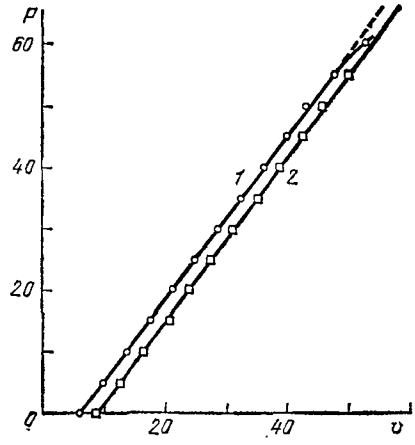


Рис. 3.15. Опыты Дюло (1812). Эксперимент (№ 283) со свободно опертой железной (Perigord) балкой с сечением в форме правильного треугольника, позволивший выполнить сравнение зависимостей между нагрузкой и прогибом посередине пролета, построенных по средним значениям, полученным при опирании балки (правильной треугольной призмы) вблизи ее концов поочередно на каждое из трех ее ребер (кружки) и поочередно на каждую из трех граней (квадратики). v — прогиб посередине пролета в мм, P — нагрузка посередине пролета в кгс. *1* — усредненные значения при опирании на каждое из трех ребер, *2* — усредненные значения при опирании на каждую из трех граней.

Так как Дюло варьировал длину, ширину и высоту своих образцов, он смог показать, что прогиб пропорционален кубу длины и обратно пропорционален ширине и кубу высоты, что согласовывалось с предсказаниями элементарной балочной теории, которой он хотел пользоваться. Каждый из авторов XIX века, обсуждавших труд Дюло, указывал на ошибку в определении положения нейтральной оси в балках, которая имелась во введении, однако это не помешало ему успешно сравнить прогибы в середине пролета, вызванные эквивалентными нагрузками, в балках с квадратным и круглым поперечными сечениями.

В Приложение к четвертому разделу мемуара Дюло 1820 г., в котором, как я уже упоминал выше, он рассматривает работы различных экспериментаторов по этому вопросу, выполненные между 1813 и 1820 гг., он включил и ту, которая, как я полагаю,

является первым экспериментом на сжатие, не связанным непосредственно с выпучиванием. Этот эксперимент был осуществлен Пикте и описан в «Универсальной библиотеке» (Bibliotheque Universelle) за март 1816 г. В этом эксперименте Пикте определял осевую нагрузку, необходимую для укорочения железного стержня на 1/10 000 его первоначальной длины, получив соответствующее ей значение 1,3 кгс/мм². Это приводило к значению модуля E, равному 13 000 кгс/мм², в отличие от значения $E=20\,000$ кгс/мм², найденного Дюло в опытах на изгиб, но ближе к низкому значению модуля, вычисленному Био в 1807 г. по данным опытов по распространению волн в железе и, как будет видно из дальнейшего, согласовывалось также со значением, полученным Вертгеймом в аналогичных экспериментах по распространению волн в очень длинных железных образцах.

Таким образом, к 1816 г. имелись результаты квазистатических экспериментов, подтверждающне данные как Био, так и Хладни, полученные в динамических экспериментах. Хотя теперь достоверно установлено, что такая мультимодульность может иметь место (Bell [1968,1], гл. VI) и, как будет показано ниже, эти результаты начала XIX века находятся в соответствии с отличиями в значениях модуля, полученными в современных исследованиях, никто из экспериментаторов, до Вертгейма в 1840 г., не обращал серьезного внимания на влияние на деформационные свойства термической и механической историй твердых тел, предшествующих эксперименту. На самом деле, как уже отмечалось, Кулон, не обнаружив в 1780 г. никакого различия в результатах для отпущенной и закаленной стали, как представляется, помешал другим экспериментаторам в течение следующих 50 лет всерьез задуматься над этим вопросом.

Мусшенбрук ранее, в XVIII веке, уже использовал свои остроумные испытательные машины для изучения явления продольного изгиба. Оценив должным образом своего предшественника, Дюло исследовал тот же вопрос на очень большом количестве образцов. Для различных значений отношения длины стержня к размеру его поперечного сечения, находящихся в пределах от 200 до 24, он получил среднее значение отношения наблюденной в опыте критической силы к вычисленной по формуле Эйлера, равное 1,16. Дюло не считал, что его результаты обязательно должны вызвать сомнения в применимости теории Эйлера. Дюло отмечает, при описании этих первых, достаточно хорошо выполненных экспериментов, истину, прекрасно известную каждому современному экспериментатору, исследующему проблему потери устойчивости, состоящую в том, что трение и проблема закрепления образцов делают эти испытания чрезвычайно затруднительными[1]) для проведения[2].

---

[1]) Комиссия, назначенная в 1819 г. Французской Академией для рассмотрения мемуара Дюло 1813 г., состоящая из Коши, Пуассона и Жирара, ие была пол-

Вероятно, наиболее значительными по их влиянию на дальнейшее развитие линейной теории упругости являются эксперименты Дюло на кручение длинных железных стержней с квадратной и круглой формой поперечного сечения. (Он также рассматривал кручение трубчатых стержней, в которых был наиболее заинтересован.) Со времени экспериментов Кулона по кручению в 1784 г. и до появления теории Коши в 1829 г. (опубликовано в 1830 г. Caushy [1830,1]) экспериментаторы считали, что стержни с квадратным сечением, испытывающие кручение, могут быть рассчитаны по тем же формулам, что и стержни круглого сечения. По поводу связи теории с экспериментом Био однажды отозвался следующим образом:

«Но для того, чтобы эта связь была эффективной, должны быть соблюдены с величайшей тщательностью два обязательных условия: теория, которой можно доверять, должна быть строгой, а эксперимент, который сравнивается с существующей теорией или служит для построения теории, должен быть очень точным. Я склонен думать, что второе условие является более важным и должно выполняться прежде всего. Ибо в конечном счете, если теория ошибочна, то опыт вскоре обнаружит эту ошибку; если же ошибочны данные эксперимента, то теория едва ли имеет какое-либо средство обнаружения их, так как она просто собирает их в совокупности и строго выводит из них некоторые ошибочные следствия (Biot [1816, 1], стр. XVIII).

Эксперименты Дюло 1812 г. были, несомненно, показательным примером, ибо, когда они были повторены в последующие годы Саваром в 1830 г., а затем более подробно Вертгеймом в 1850 г., казалось, что существовало соответствие между экспериментом и теоретическими предсказаниями Коши. Если просто вычислить модуль упругости, используя теорию Кулона и предполагая, что в прямоугольной призме, так же как и в круговом цилиндре, отсутствует депланация сечений, то для прямоугольного сечения получится более низкое значение μ. Правильная корреляция между значениями, относящимися к кручению призм с круглым и прямоугольным сечениями, при которой средние модули сдвига, найденные в обоих случаях, оказывались идентичными, была установлена только в 1857 г., когда Сен-Венан пересмотрел всю проблему кручения и в то же время вновь проанализировал данные по кручению Дюло, Савара и Вертгейма. Дюло был первым, кто поставил эксперименты на кручение стержней с некруговым поперечным сечением. И тот факт, что корреляция между надлежаще поставленным экспериментом и подходящей теорией не была достигнута, не вызвал какого-либо снижения интереса к предмету в течение отмеченного промежутка времени (до 1857 г.) [1]).

ностью согласна с выводами Дюло относительно причин расхождения теории с экспериментом. Два знаменитых теоретика полагали, что указанное различие может быть отнесено также на счет того, что формула Эйлера, примененная в этом случае, является в некотором смысле приближенной, и результаты эксперимента свидетельствуют о том, что эта формула действительно дает слишком заниженный результат (Cauchy, [Duleay] [1819, 1]).

[1]) Как только возникала ситуация, в которой результаты теории и экспери-

Табулированные Сен-Венаном [1]) данные эксперимента Дюло с железными стержнями круглого и квадратного поперечных сечений представлены в табл. 46.

В этой таблице сравниваются значения модуля μ, вычисленные для стержней квадратного сечения в соответствии с использованием анализа Кулона и на основании теории Сен-Венана, который ввел множитель 0,843462 в знаменатель. Большая близость усредненных значений модуля сдвига для материала в стержнях с круглым и квадратным поперечными сечениями, обнаруживаемая в свете теории Сен-Венана, опиралась, как отметил Сен-Венан, на эти эксперименты Дюло.

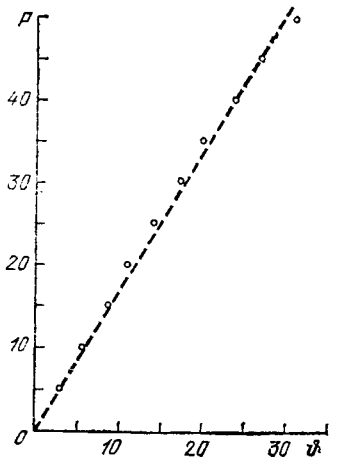


Рис. 3.16. Опыты Дюло (1812). Результаты экспериментов на кручение, из которых сделан вывод (опубликованы в 1813 г.) о применимости линейной функции отклика (линейной зависимости между углом закручивания и крутящим моментом). Испытывалось круглое кованое железо (Perigord) (эксперимент № 87). Длина скручиваемой части равнялась 3,17 м, измеренный диаметр — 0,0197 м. Кружками обозначены экспериментальные данные, штриховой линией — линейная аппроксимация зависимости $P - \vartheta$, предложенная Дюло, ϑ — угол закручивания в градусах, P — сила в кгс (плечо силы P, создающей крутящий момент, равно 0,32 м).

Дюло понимал существование в данных опытах на квазистатическое кручение константы материала, т. е. модуля сдвига. Однако похоже, что он был незнаком с работой Кулона, о чем свидетельствует неудачная форма представления этой величины, которую он избрал для образцов, подверженных кручению. Многие другие, включая Савара, Вертгейма и Сен-Венана, чьи расчеты приведены мною в таблице 46, вычислили верные значения μ из экспериментальных данных 1811 г. (Duleau [1813,1], [1820,1]).

Подобно Вертгейму и Баушингеру, делавшим это намного позже, в XIX веке, Дюло фактически наблюдал нелинейность в зависимости между крутящим моментом и углом закручивания, как это видно из графика, построенного мною по результатам его эксперимента № 87, представленного на рис. 3.16. И Вертгейм, и Баушингер обнаружили это явление и тот факт, что его было намного легче наблюдать в опытах на кручение, чем на растяжение или сжатие. Однако, в отличие от своих последователей, а по этому вопросу и от своих современников [2]) Дюпена и Ходкинсона, Дюло считал,

мента для изотропных тел не совпадали, будь это в 1812, 1938 или 1972 гг., несогласованность немедленно объяснялась наличием якобы необнаруженной анизотропии.

[1]) В приведенный Сен-Венаном список не были включены многочисленные повторения экспериментов, проведенных Дюло, чтобы выяснить количественные вариации в своих экспериментальных данных.

[2]) В 1832 г. Дюло умер от холеры в возрасте 42 лет.

Таблица 46

Дюло (1812) [Из книги Сен-Венана (1857)]

Номер опыта	Вид железа	Длина скручиваемой части (м)	Диаметр круглых образцов и сторона квадратных, определенные с помощью взвешивания (м)	Угол, на который поворачивается один конец при фиксированном втором (градусы sexagesimal *))	$M_x/J\theta = G$ только для круглых стержней (кгс/м²)	$\frac{M_x}{0{,}843462\ J\theta} = G$ для квадратных сечений (кгс/м²)	Средние (для опытов, отмеченных фигурной скобкой) значения G (кгс/м²)
86	Круглое Perigord железо после сильной ковки	2,81	0,0152	13,4	7 336 700 000		
87	Круглое Perigord железо	3,17	0,0196	6	6 685 800 000		
91	Круглое Perigord железо	3,19	0,02205	3,32	7 590 900 000		
92	Круглое Perigord железо	2,89	0,02303	3	6 395 500 000		6 577 070 000
94	Круглое Perigord железо	2,94	0,0265	1,82	6 117 400 000		
95	Круглое Perigord железо	3,35	0,02673	1,87	6 553 600 000		
97	Круглое Perigord железо	2,92	0,03572	0,625	5 359 600 000		
89	Круглое Ariege железо	3,57	0,02149	4,8	6 512 600 000		
90	Круглое Ariege железо	2,89	0,02151	4,5	5 602 700 000		6 058 270 000
96	Круглое Ariege железо	2,77	0,02682	1,65	6 059 500 000		
88	Круглое Английское железо, Даулейс	2,40	0,01983	4	7 246 600 000		
93	Круглое Английское железо	3,24	0,02352	2,34	8 449 900 000		
	Общее среднее для круглого железа				6 659 230 000		
100	Квадратное Perigord железо	2,52	0,02035	3,08	5 248 300 000	6 222 400 000	6 268 150 000
101	Квадратное Perigord железо	3,39	0,03260	0,62	5 325 500 000	6 313 900 000	
98	Английское железо 0,2	4,12	0,01846	6,5	6 004 600 000	7 119 000 000	7 097 350 000
99	Тот же образец	2,52	0,01846	4	5 968 100 000	7 075 700 000	
	Общее среднее для квадратного железа				5 636 625 000	6 682 750 000	

Примечание. Измеренные диаметры были: 0,0142 м и 0,0197 м для опытов # 86 и # 87 соответственно. Измеренные стороны были 0,020 м для опытов # 98 и 99.

*) Sexagesimal bruch. — дробь, имеющая знаменателем число (цифру) шесть с некоторым количеством нулей, например 60, 600, 6000 и т. д. — *Прим. ред. перев.*

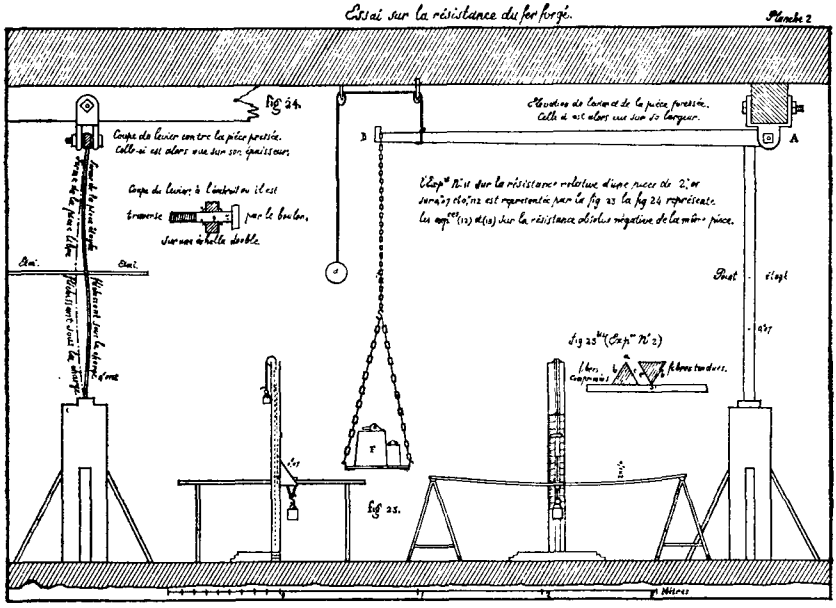


Рис. 3.17. Рисунки Дюло рассмотренных им экспериментальных ситуаций.

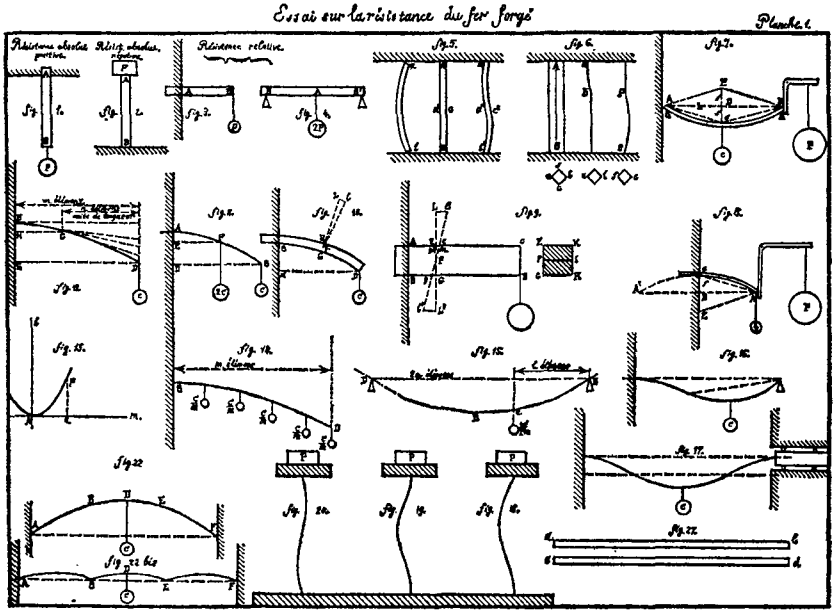


Рис. 3.18. Рисунки Дюло рассмотренных им экспериментальных ситуаций.

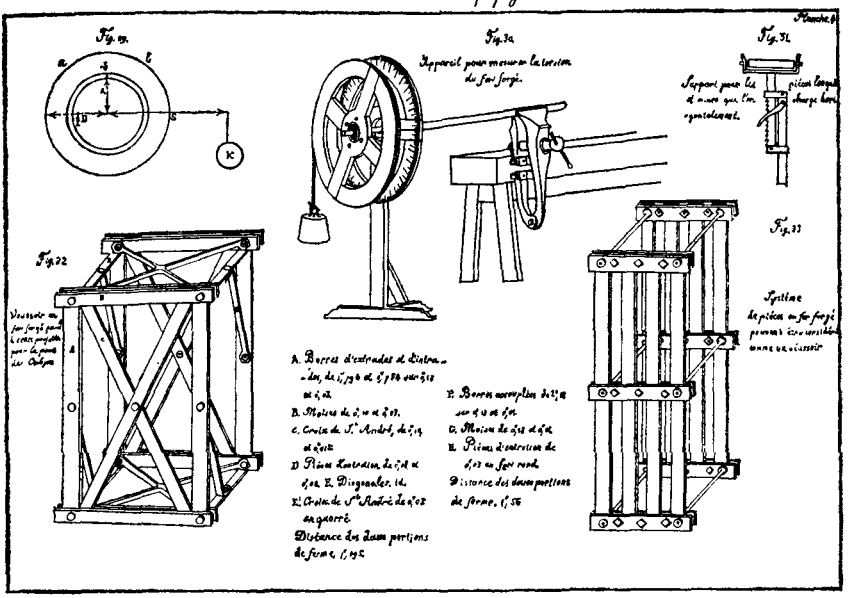


Рис. 3.19. Рисунки Дюло рассмотренных им экспериментальных ситуаций.

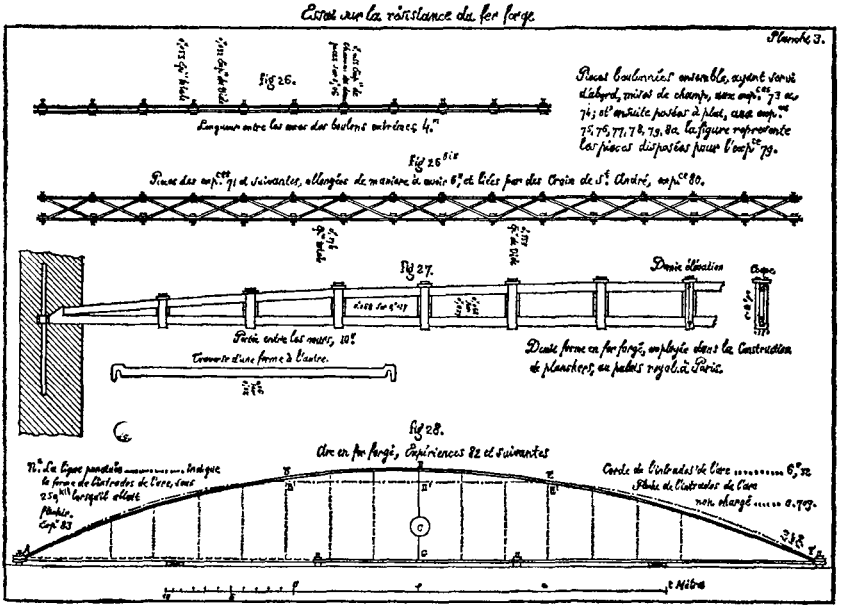


Рис. 3.20. Рисунки Дюло рассмотренных им экспериментальных ситуаций.

что угол закручивания должен быть линейной функцией крутящего момента, так как опыты проводились при нагрузке ниже соответствующей пределу упругости. Он решил не принимать во внимание отклонения от линейности, представив вычисленные значения (штриховая линия) в сравнении с экспериментальными данными (кружки).

До работ Дюло 1812 г. и Дюпена 1811 г. все экспериментальные определения E-модуля Джордано Риккати, Хладни, Юнгом и Био, а также модуля μ Кулоном были динамическими, основанными на определении частоты колебаний или, в единственном случае, Био, на измерении скорости распространения волн. Эксперименты Дюло и Дюпена были первыми квазистатическими в области подлинно малых деформаций. Исчерпывающее исследование Дюло призматических стержней с различной формой поперечного сечения, подвергнутых нагружению, изменяющемуся в широких пределах, представляет собой веху не только в историческом развитии экспериментальной механики твердого тела, но также в теоретическом обосновании линейной теории упругости, которая стала быстро развиваться в последующие годы.

Вследствие важности этих результатов, стимулировавших изучение линейной упругости, я привел на рис. 3.17, 3.18 и 3.19 три из четырех рисунков из книги Дюло 1920 г. Очевидно, что эксперименты были хорошо поставлены, учитывая и явные трудности, встречавшиеся в измерениях при испытании на сжатие. Должны быть отмечены особо эксперименты по определению второй формы выпучивания, о которых дается справка в статье, а также различные виды нагружения, рассмотренные при изучении изгиба. Я не описывал работ по аркам, фермам, так как они главным образом интересны лишь в технологическом отношении, в специальных рассмотренных Дюло ситуациях, однако вследствие их исторической важности я включал их в четвертую фигуру (рис. 3.20) Дюло, относящуюся к этим экспериментальным проблемам.

Первая обширная публикация мемуара Дюло состоялась в 1820 г., как раз в то время, когда Навье, Коши и Пуассон публиковали свои классические мемуары по линейной упругости. Время проведения экспериментов Дюло и их особое значение в последующие годы опровергают распространенное мнение о том, что развитие линейной теории упругости в 20-х и 30-х гг. XIX века, по существу, не зависело от проведенных в это время экспериментов.

3.10. Исследование модулей упругости в течение трех десятилетий (1811—1841) до Вертгейма

В 1841 г. Гийом Вертгейм представил во Французскую Академию запечатанный пакет, содержащий результаты экспериментов, явившиеся основой для мемуара, прочитанного перед Академией годом позже. Эта работа, опубликованная во Франции (Wertheim [1844,1]) в 1844 г. и переведенная на немецкий язык в 1848 г.,

представляла собой первое чрезвычайно полное исследование зависимости динамических и квазистатических постоянных упругости от температуры, остаточной деформации, предварительной термической сбработки, состава сплава, а также их чувствительности к наличию во время деформирования электрического и магнитного полей. Огромное число экспериментов Вертгейма с большинством из известных тогда металлов, из которых можно было изготовить образцы для испытаний, доминировало как в теоретических, так и в экспериментальных исследованиях по механике твердого тела со второй половины XIX и вплоть до нашего века.

Чтобы получить представление о состоянии предмета в годы, предшествующие докладу Вертгейма, следует ознакомиться с исключительно подробным трудом Жана Виктора Понселе (Poncelet [1841,1]), который дает обзор положения дел в области экспериментальной механики твердого тела. Понселе попал в плен во время отступления французов из Москвы в ноябре 1812 г. и провел два года в городе Саратове на Волге (см. Bertrand [1879,1]). Возможно, вследствие этого его научная деятельность в дальнейшем ограничивалась превратностями слабого здоровья. После войны он вернулся в свой родной город Метц, где получил работу в арсенале, а в 1825 г. он становится профессором по инженерной механике в военной школе. В 1827 г. он провел цикл бесед для рабочих города Метца, после чего один из его слушателей, Госселин, попросил разрешение опубликовать заметки, сделанные им на этих лекциях. Понселе, больной и усталый, дал свое согласие, однако отказался принимать участие в этой работе. Заметки были опубликованы [1]) в трех частях между 1827 и 1829 гг. Они имели немедленный успех и, переизданные в 1830 г., также немедленно разошлись.

Понселе был избран в Академию в 1834 г., а в 1839 г., будучи назначенным на должность профессора физической и экспериментальной механики в Сорбонне, он переехал в Париж, где начал переписывать книгу по своим лекциям, прочитанным в Метце. Второе издание вышло в свет в 1841 г. под заголовком «Введение в инженерную механику и экспериментальную физику» (Introduction à la Mécanique Industrielle, Physique ou Expérimentale). Так как я смог ознакомиться только со вторым изданием, я не могу сказать, какая часть работы была закончена в период между 1827 и 1829 гг. по записи его цикла лекций и что было написано в 1839 г., когда Понселе начал готовить второе издание. В более позднее издание Понселе включил некоторый новый материал, например результаты экспериментов 1835 г., которые представил ему Ардан.

Во всяком случае достаточно ознакомиться с этой более поздней работой Понселе (Poncelet [1841,1]), чтобы, сделав минимальные

[1]) Первое издание было озаглавлено «Курс инженерной механики» (Cours de Mécanique Industrielle).

Таблица 47

Поиселе (1841). Таблица удлинений, произошедших под действием последовательно возрастающей нагрузки от нуля до разрушающего значения в образцах, изготовленных из различных металлов

(Сэгюэн) Железная проволока, хорошо отожженная диаметром 1,06 мм, длиной 1,50 м		(Борне) Кабельное железо вязкое диаметром 49,50 мм, длиной 6,42 м		Экспериментальные результаты Ардана по опытам с металлическими проволоками от 1 до 1,5 м длиной; диаметр свинцовой проволоки 4 мм; диаметр проволок из других металлов от 0,4 до 1,6 мм												
					удлинение на 1 м длины (мм)								отпущенная до вишнево-красного каления, неотожженная стальная проволока		расплавленная в тигле холодно-тянутая свинцовая проволока	
					железная проволока		латунная проволока		стальная проволока							
напряжение (кгс/мм²) (f'')	удлинение (мм/м) (f'')	напряжение (кгс/мм²) (F)	удлинение (мм/м) (F)	напряжение (кгс/мм²)	мягкая или отожженная (f)	твердая неотожженная (f')	мягкая или отожженная (l)	твердая неотожженная (l')	с завода (a_1)	отожженная, не отпущенная (a_2)	отжиг до голубого каления (a_3)		напряжение (кгс/мм²) (a_4)	удлинение (мм/м) (a_4)	напряжение (кгс/мм²) (p)	удлинение (мм/м) (p)
25,90	2	2	0,08	5,0	0,294	0,26	0,45	0,55	0,25	0,24	0,23		2,49	0,59	0,10	0,17
27,07	3	4	0,16	10,0	0,588	0,52	0,90	1,11	0,56	0,48	0,48		4,97	0,83	0,30	0,41
28,20	4	6	0,31	15,0	0,882	0,78	1,35	1,70	0,81	0,72	0,72		7,46	1,08	0,43	0,62
29,33	5	8	0,36	20,0	1,176	1,04	1,80	2,28	1,02	0,96	0,96		9,95	1,39	0,50	0,81
30,45	6	10	0,47	25,0	1,470	1,30	2,25	2,98	1,25	1,20	1,20		12,44	1,58	0,70	31,60
32,60	30	12	0,55	30,0	2,500	1,56	7,30	3,70	1,50	1,44	1,44		14,92	1,87	0,90	70,20
33,78	58	14	0,69	32,5	13,000	—	—	—	—	—	—		15,57	Разрушение	1,10	127,20
34,91	72	16	0,86	35,0	14,100	2,22	10,80	4,43	1,80	1,68	1,68				1,30	324,60
36,04	86	18	2,20	40,0	18,000	2,40	49,90	5,20	2,10	1,92	1,92				1,36	Разрушение
36,71	110	20	15,76	42,5	20,500	—	—	—	—	—	—					
37,16	118	22	24,34	45,0	Разрушение	2,82	115,00	6,15	2,36	2,16	2,16					
37,84	120	24	34,79	49,0		3,10	Разрушение	7,19	—	—	—					
Разрушение		26	46,96	50,0		Разрушение		Разрушение	2,65	2,40	2,40					
		28	67,70	52,5					—	—	2,52					
		30	89,39	55,0					3,00	2,66	Разрушение					
		32	132,48	57,5					3,15	2,76						
		33	Разрушение						Разрушение	Разрушение						
11 400		21 200			17 000	19 200	11 111	9091	19 400	20 800	20 800		10 000			
E (кгс/мм²)																

Таблица 48

Пуасель (1841)

Материал	Удлинение, соответствующее естественному пределу упругости (материал не испытывал предварительной пластической деформации)	Нагрузка на мм², соответствующая пределу упругости	Отношение этой нагрузки к разрушающей	Значение модуля E (кгс/мм²)
Кованые железные балки, испытание на изгиб (Дюло)				
Максимальное значение	0,00167	—	—	24 000
Минимальное значение	0,00044	—	—	16 000
Среднее	0,00062	12,4	—	20 000
Кованое железо, изгиб (Тредгольд)				
Среднее значение	0,00071	12,1	0,30	20 000
То же в стержнях (сварочное железо) или в цилиндрах (волочение) (Лагерхельм)				
Сварочное Шведское железо	0,00093	17,2	0,44	20 680
Трос из Английского сварочного железа	0,00052	13,3	0,37	20 750
Среднее	0,00072	15,0	0,40	20 700
Длинные стержни из прочного железа (волочение) (Навье)	0,00093	18,0	0,45	19 400
Толстая железная проволока, неотожженная (волочение) (Вика́)	—	—	—	18 000
Железная проволока диаметром 1,2 мм (волочение) (Ардан)				
Прочная, неотожженная	0,00084	15,0	0,33	18 300
Мягкая, отожженная	0,00088	15,0	0,50	17 000
Сталь и чугун				
Стержни Английской стали, литые, Хантсман, неотпущенные (изгиб) (Дюло)				
Среднее	—	—	—	24 000
Стержни из кованой стали, мягкой, отожженной или неотожженной (изгиб) (Тредгольд	0,00140	29,0	—	20 400

Таблица 48 *(продолжение)*

Материал	Удлинение, соответствующее естественному пределу упругости (материал не испытывал предварительной пластической деформации)	Нагрузка на мм², соответствующая пределу упругости	Отношение этой нагрузки к разрушающей	Значение модуля E (кгс/мм²)
Полосы, Английская сталь, литая, отожженная и отпущенная нагревом до голубого каления (изгиб) (пружины для динамометров) (Морэн)				
Среднее	0,00222	66,0	0,67	30 000
Стальная проволока, литая, вытянутая, неотожженная коммерческая (волочение) (Ардан)				
Первое удлинение	—	—	—	20 800
Последующие удлинения	—	—	—	19 000
То же, отжиг нагревом до красного каления, неотпущенная, податливая (мягкая)				
Первое удлинение	—	—	—	23 600
Последующие удлинения	—	—	—	20 800
То же, отпущенная нагревом до красного каления, отожженная нагревом до голубого каления для пружин (волочение) (Ардан)				
То же, неотожженная, отпущенная нагревом до вишнево-красного каления, хрупкая (волочение) (Ардан)				
Первое удлинение	—	—	—	11 000
Последующие удлинения	—	—	—	10 000
Чугун (изгиб) (Ронделе)				
Среднее	—	—	—	9 840
То же (изгиб) (Тредгольд)				
Среднее	0,00083	10,0	—	12 000

дополнения, получить правильное представление об экспериментальных исследованиях констант упругости, проводившихся, начиная с 1813 г., когда появился мемуар Дюло, и кончая 1842 г., в котором законченный труд Вертгейма был прочитан перед Академией. Помимо того, что она была вообще превосходной, эта монография Понселе ценна также и тем, что вводила в практику новый метод представления экспериментальных данных. Только немногие предшествующие Понселе экспериментаторы, например Джакопо Риккати в 1721 г., публиковали свои данные таким же образом, а именно, представив зависимость между напряжениями и деформациями графически. Понселе впервые стал представлять такие данные на графике, содержащем количественную информацию на абсциссе и ординате.

Как мы видели, одна из трудностей для современных экспериментаторов, интересующихся ранними исследованиями, заключается в необходимости бороться с ограниченностью способа представления результатов, только в табличной форме. Пользуясь представлением данных в обеих формах, Понселе, с одной стороны, использовал преимущество большой точности табличных данных, а с другой — легкость обнаружения общего характера поведения зависимости на графике[1]). В табл. 47 приведены результаты, полученные Сэгюэн (1826), Борне (1834) и Арданом (1835) из экспериментов на растяжение железных, латунных, стальных и свинцовых проволок, а построенные по этим данным графики зависимости между напряжением и деформацией, взятые из книги Понселе, показаны [2]) на рис. 3.21. Можно заметить, что в этих экспериментах напряжения превосходили предел упругости.

На стр. 352 своей монографии Понселе приводит значения модулей, полученных, как указано, по данным испытаний либо на изгиб, либо на растяжение в опытах восьми экспериментаторов от Дюло до Ардана. Таблица Понселе воспроизведена здесь как табл. 48. Мною добавлены только E-модули, вычисленные по данным в области малых деформаций.

В своем классическом мемуаре по константам упругости, представленном Французской Академии 18 июля 1842 г., Вертгейм подвел итог работе, предшествовавшей ему, по этому вопросу:

---

[1]) Обсуждаемый вопрос не совсем тривиален. Данные, опубликованные только в виде графиков, являются дополнительными источниками ошибок для тех, кто считал необходимым перепроверять количественные результаты других авторов. С другой стороны, данные, рассмотренные и опубликованные только в табличной форме, приводят к тому, что сам автор или его читатели могут упустить некоторые важные аспекты изучаемой проблемы. К тому же, очевидно, нельзя требовать от каждого читателя, чтобы он строил кривые по табличным данным в каждой работе, которая может его заинтересовать.

[2]) По поводу обсуждения, приведенного в предыдущем разделе, интересно сказать, что, как отметил Понселе, только данные, полученные Морэном, отличаются существенно от значения постоянной упругости для железа, для которого современное значение должно было бы быть равным 20 800 кгс/мм^2 ($29{,}7 \cdot 10^6$ фунт/дюйм^2).

«Простые металлы (элементы), которые были объектами этих исследований, уже изучались многими. Было бы слишком сложно упоминать здесь многочисленные результаты всех исследований и их ошибки. Желающие могут найти их в «Инженерной механике» Понселе.

Большинство этих исследоваиий предпринималось с целью практического применения. При этом имели дело в основном с металлами, которые используются в конструкциях, не будучи в состоянии принять во внимание их чистоту, плотность и те изменения, которые могли произойти или на самом деле произошли в результате механической обработки или теплового воздействия. Расхождение в результатах, а также недостаток каждого из предложенных общих законов деформированиия являются, по-видимому, следствием разнообразия условий». (Wertheim [1844, 1], стр. 388).

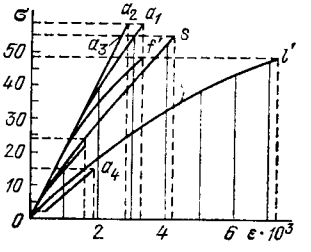


Рис. 3.21. Графическое представление Понселе (1841) опытов Сэгюэн (1826), Борне (1834) и Ардвна (1835) по растяжению железной, латунной, стальной и свинцовой проволок (по данным Ардана (1835)). Это было первое графическое изображение количественной зависимости между напряженнем и удлинением в механнке твердого тела, a_1 — стальная проволока «в состоянии поставки» (без какой-либо предварительной термической обработки), a_2 — отожженная иезакаленная стальная проволока, a_3 — отожженная нагревом до голубого калеиия стальная проволока, a_4 — отпущеиая после доведения до красного калеиия неотожженная проволока, f' — твердая неотожженая железная проволока, l' — твердая неотожженная латунная проволока; ε — деформация, σ — напряжение в кгс/мм².

Подобная критика предшествующих исследований встречалась во введении едва ли не каждой большой работы по изучению констант упругости на протяжении почти 130 лет после Вертгейма, но его критика была первой и одиой из немногих, содержавших конкретные указания на источники разногласий и ошибок при построении определяющих уравнений для твердых тел. Характерно, однако, что Вертгейм дал правильную оценку выдающимся достижениям своих предшественников таких, как Дюло, Герстнер и Вика, в адрес работ которых он выразил большое восхищение.

Главным предметом изучения для экспериментаторов, интересовавшихся упругостью металлов в тридцатилетний период между исследованиями Дюло и Вертгейма, был вопрос о том, улавливается ли измерениями или нет влияние предварительной термической обработки, которой подвергаются твердые тела, на значения константы упругости и характеристику прочности. Кулон, как мы видели, в результате исследования стальных полос, подвергнутых различным термическим обработкам, обнаружил, что состояние материала, который при этом может получиться, изменяется от «превосходно пружинящего» до весьма мягкого, если он полностью отожжен. Тем не менее Кулон пришел к заключению, что в области малых деформаций не наблюдается разница в значениях модулей упругости [1]). В письме, написанном в 1823 г. Томасу Юнгу, Томас Тредгольд (Tredgold [1824,1]) сообщил о подобных результатах, полученных из серии экспериментов со свободно опертыми балками. Испытательная аппаратура Тредгольда показана на рис. 3.22.

[1]) Кулон отметил, что предел упругости понизился.

Его первый эксперимент был проведен со стержнем из кипящей стали «очень хорошего качества».

Далее в письме Тредгольда говорится:

«Он (стержень) был вытянут молотком до предусмотренной мною ширины и толщины, а затем сделан правильной формы напильником. После этого он был закален и отпущен для достижения той степени твердости, которая характерна для металла, поддающегося обработке обычным напильником» (там же, стр. 355).

На рис. 3.23 показаны графики зависимости между нагрузкой и прогибом посередине пролета, полученные для свободно опертой балки длиной 14 дюймов, шириной 0,95 дюйма и высотой 0,375 дюйма, с расстоянием между опорами 13 дюймов.

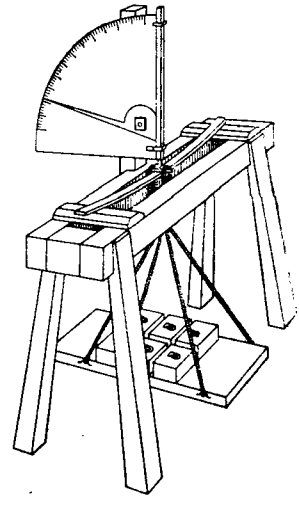


Рис. 3.22. Установка Тредгольда (1824) для испытаний стержней на изгиб.

Стержень, материал которого был отпущен нагревом до «весьма насыщенного соломенно-желтого цвета», и еще раз, до «однородно голубого цвета или до степени отпуска пружин», имел одинаковые прогибы при одинаковой нагрузке. Затем стержень был закален и нагружен выше предыдущего уровня как показано на рис. 3.23 (треугольники), обнаружив повышенный предел пропорциональности.

Второй эксперимент проводился на балке гораздо большей длины, с шириной 0,92 дюйма, высотой 0,36 дюйма и расстоянием между опорами 24 дюйма. Балка была испытана вначале в состоянии, когда материал ее был столь мягок, что «легко поддавался напильнику», дав линейную зависимость между нагрузкой и прогибами, показанную на рис. 3.23 (точки). Балка затем была закалена до твердости, при которой напильник не оставлял следов ни на какой из ее частей и «такие же нагрузки вызывали прогибы, которые не отличались заметно от прогибов в мягком состоянии». После этого степень закаленности была понижена отжигом путем нагрева «до однородно соломенного цвета» и балка была вновь испытана; та же линейность наблюдалась даже при бо́льшей нагрузке (см. рис. 3.23, треугольники).

Тредгольд резюмировал эти эксперименты, сравнив их с экспериментами Юнга, данные которых по колебаниям, как мы видели, дали для высоты модуля значение 8 530 000 футов. Тредгольд получил значение для h, равное 8 827 000 футам из первого эксперимента и 8 810 000 футам — из второго, т. е. при объемном весе 0,286 фунт/дюйм^3 это дает значение E-модуля 21 500 и 21 650 кгс/мм^2 соответственно. Затем он сравнил эти значения с несколько странно выбранными из описанных выше данных Дюло: 9 400 000

футов для литой стали и весьма низким значением 6 600 000 футов для немецкой стали, т. е. 23 100 и 16 250 кгс/мм² соответственно.

Скандинав Лагерхельм (Lagerhjelm [1829,1]) намекнул на то, что англичанин Тредгольд проявил нечто меньшее, чем научная объективность, в выборе данных француза Дюло для сравнения относительных достоинств английской и немецкой стали. Как нетрудно убедиться на основании табулированных результатов моих вычислений по данным Дюло значений модулей (табл. 45), там были два весьма низких значения для немецкой стали. Лагерхельм утверждал, что Дюло считал оба этих значения весьма сомнительными, поскольку измерения удлинений были весьма нерегулярными. Тредгольд выбрал один из этих опытов (эксперимент #61), включив данные его в число четырех для получения среднего значения и в результате составил отчет о международных несоответствиях. Между прочим, изучая ту же таблицу, я не смог найти, откуда Тредгольд взял очень высокое значение модуля, 23 100 кгс/мм² для английской стали, кроме, возможно, той, что названа «сталь Хантсмана», и имеет анормально высокое значение по сравнению со всеми остальными данными, среднее из которых составляет 20 000 кгс/мм². Тем не менее Лагерхельм соглашался с Тредгольдом и Кулоном в том, что касалось их оценки влияния предварительной термической обработки. Он также считал, что отжиг и закалка не могут заметно сказываться на величине констант упругости.

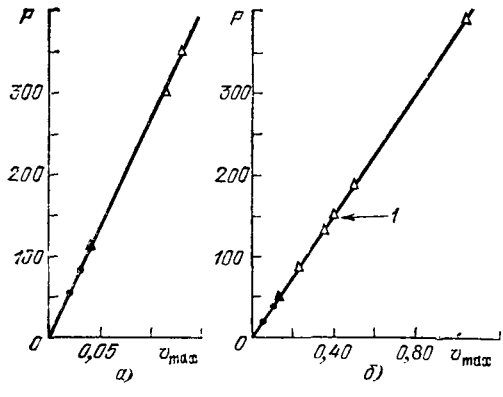


Рис. 3.23. Зависимости между значениями нагрузки и прогиба в середине пролета для стальных балок, полученными на установке Тредгольда (1824), показанной на рис. 3.22. (График построил я по его табличным данным). *а*) Эксперимент 1: балка длиной 14 дюймов, расстояние между осями опор 13 дюймов, поперечное сечение 0,95×0,375 дюйма; *б*) эксперимент 2: балка длиной 25 дюймов, расстояние между осями опор 24 дюйма, поперечное сечение 0,92×0,36 дюйма; v_{max} — прогиб посередине пролета в дюймах, P — сосредоточенная сила посередине пролета в фунтах; кружки — экспериментальные точки для образца до отпуска; треугольники — то же после отпуска. *1* — точка, соответствующая остаточному прогибу посередине пролета, равному 0,012 дюйма.

В своем мемуаре 1841 г. по упругости твердых тел Массон сообщает, что Савар в конце статьи «О механических свойствах жидкостей», вышедшей за несколько лет до этого [1]), высказал пожелание,

[1]) Savart [1837, 1]. Эта работа содержала описанные Массоном данные Савара. Однако среди объемистых ранних публикаций Савара я так и не смог найти место, соответствующее этим данным.

чтобы твердые тела были подвергнуты сравнительному анализу с целью разработки основ общей теории деформации (Masson [1841,1]). Массон продолжал:

«Он доверил мне часть этой работы. Работая в его комнате, под его руководством и с его помощью, я начал эти исследования, которые были прерваны несчастьем, погрузивших всех его друзей, и меня в особенности, в печаль, которую не могло рассеять ничто, разве только воспоминание о его доброте и дружелюбии». (Masson [1841, 1], стр. 451).

В этой выдержке речь шла, разумеется, о смерти Савара. Ни Массон, ни Савар не выполнили намеченной программы, и может возникнуть серьезный вопрос, добились ли бы они успеха, даже при большом старании. Как уже указывалось ранее, Массон продолжил работу в лаборатории Савара во время его болезни и после его смерти, последовавшей 1 марта 1841 г. Массон повторил эксперименты Савара, проведенные в 1837 г., с образцами из латуни, железа, стали и меди длиной, равной одному метру. Образцы, которые использовались в обеих этих сериях опытов, были совершенно одинаковы. Сравнение результатов двух экспериментов, разделенных по времени четырьмя годами, на тех же образцах показано на рис. 3.24 для трех из четырех упомянутых металлов. Большое значение расхождения не позволяет извлечь из этих экспериментов [1]) сколь-нибудь значительный вывод о констаитах упругости.

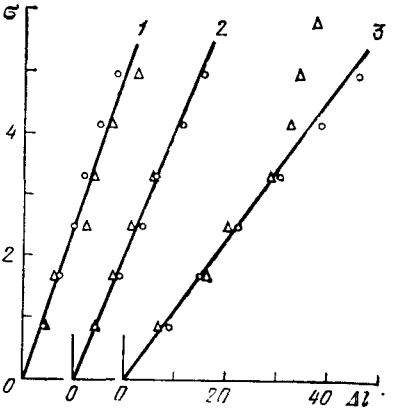


Рис. 3.24. Сравнение экспериментальных результатов Савара (1837) (кружки) и Массона (1841) (треугольники), полученных на тех же самых образцах, подвергнутых растяжению (графики построил я по табличным данным Массона). *1* — железо, *2* — сталь, *3* — латунь; Δl — удлинение в 0,01 мм; σ — напряжение в кгс/мм².

Массон, следуя практике Дюло, представлял константы упругости в форме удлинения единичного куба изготовленного из исследуемого твердого тела, испытываемого при воздействи аксиальной единичной нагрузки, действующей в направлении, перпендикулярном одной из граней. Преобразуя эти данные в E-модуль, получаем значения, указанные в табл. 49.

---

[1]) Как я показал в гл. II, часть трудностей заключается в попытке сравнить результаты этих опытов с наличием того, что теперь извсстно как «эффект Портвена — Ле Шателье», и обнаружение чего следовало бы считать приналлежащим Массону. Однако тот факт, что в этих опытах отсутствовали указания на чистоту материалов, предварительную термическую или механическую обработку, не приводились никакие экспериментальные детали, свидетельствует о несколько ограниченном пониманин требований, которым необходимо удовлетворять при окончательных экспериментальных исследованиях объекта.

Таблица 49

Массон (1841)

Материал стержней	Модуль E		Отношение скорости звука в металле к скорости звука в воздухе	
	(Савар) кгс/мм²	(Массон) кгс/мм²	(Савар)	(Массон)
Медь	14 150	—	12,21	—
Сталь	24 000	24 800	15,22	—
Латунь	10 750	11 200	10,56	—
Железо	29 500	24 500	15,17	—
Цинк	—	12 450	11,85	—
Олово	—	—	—	7,89
Свинец	—	—	—	4,2782

Массон описал с некоторыми подробностями сравнение экспериментов со свинцом и оловом, названным им «плачущим оловом», которое пропускалось через прокатные валки до тех пор, пока не становилось столь же мягким, как свинец, и «совершенно не звенело при ударе». Как оловянные, так и свинцовые стержни были вытянуты до значения диаметра, равного 3 мм. Частоты определялись, как обычно, сравнением со звуками нотной шкалы, давшего для олова значение отношения скорости распространения звука в нем к скорости звука в воздухе, равное 7,89, а для свинца — 4,2782. По непонятным причинам Массон был совершенно поражен тем, что это последнее число дает для скорости звука в свинце значение 1442,48 м/с, почти в точности совпадающее со скоростью 1435 м/с, которую он приписывал воде[1]).

Мы уже упоминали о большом разбросе в данных Барлоу (см. рис. 2.12) и противопоставляли его результатам, полученным в опытах на растяжение железа, аналогичные данные из опытов Вика. Все эти экспериментаторы интересовались главным образом прочностью или предельным сопротивлением этих материалов, однако никакой разумной системы для этих параметров не обнаруживали. Как мы увидим далее, многие из причин, по которым такая система не могла быть найдена, были впервые открыты в значительно более совершенных исследованиях Вертгейма. Массону также казалось странным утверждение Кулона о том, что отпуск не влияет на упругие свойства как при кручении, так и при изгибе. Он взял часовую пружину, измерил ее удлинение, затем подверг ее отжигу и испытал снова и получил, последовательно добавляя нагрузку 4 кгс, значения, указанные в табл. 50.

[1]) По-видимому, Массон использовал результаты известных экспериментов, проводившихся на Женевском озере Колладоном и Штурмом (Colladon and Sturm [1838, 1]), получившим это значение.

Таблица 50

Массон (1841)

Полная нагрузка (кгс)	Дополнительное удлинение при каждом последующем дополнительном нагружении нагрузкой 4 кгс	
	пружина, подвергнутая закалке	отожженная пружина
0	0	0
4	1,4	0
8	12,2	0
12	8,4	12,0
16	4,8	13,6
20	0	9
24	12,4	5
28	6,6	11
32	(нет дополнительной нагрузки)	8
36	(нет дополнительной нагрузки)	4
Среднее удлинение на 1 кгс	$1{,}63 \cdot 10^{-2}$ мм	$1{,}739 \cdot 10^{-2}$ мм

Исходя из этих весьма сомнительных результатов, Массон заключил, что закалка действительно не влияет на упругие свойства. Тем не менее, не описывая самих экспериментов, он сообщил, что в аналогичных опытах с цинком он наблюдал заметную разницу. Он заметил так же, как, впрочем, и многие до него, включая Кулона, что отжиг существенно изменяет величину предела упругости [1]). Его работа описана здесь главным образом для того, чтобы дать картину состояния экспериментов по константам упругости к 1841 г., когда Вертгейм представил на рассмотрение Академии [2]) свой запечатанный пакет. Массон был инициатором атомистического подхода к исследованию констант упругости, который затем был развит в деталях Вертгеймом и несколько позже Фохтом. Массон заметил, что для железа, меди, цинка, олова и серебра произведение значений модуля упругости и атомного веса было почти по-

[1]) Нужно было дождаться фундаментальных исследований предела упругости, проведенных Баушингером в 1886 г. прежде, чем удалось полностью оценить значение этого сложного поведения.

[2]) В 1859 г. Массон и Вертгейм баллотировались на одинаковых условиях как кандидаты «четвертой очереди», на место во франзузской Академии, оставшееся вакантным после смерти Каньяра де Латура. Это было понижением для Вертгейма, который в 1851 г. рассматривался как кандидат третьей категории в Академию на место умершего Гей-Люссака. Если бы Вертгейм получил признание в соответствии со своими заслугами, кто знает, возможно, экспериментальная механика твердого тела достигла бы расцвета, а не пришла бы в упадок во Франции в последующие годы.

стоянным. Значения этого произведения, которое он получил для перечисленных металлов, были: 2,63; 2,39; 2,48; 2,31 и 2,45 соответственно. Он счел это случайным совпадением, но добавил:

«Я думал, что я должен отметить это, поскольку в исследоваииях в столь сложной области, как молекулярная физика, столь мало изучеиной, иикакие даиные не должны оставаться без внимания, каковы бы ии были их численные значеиия» (Masson [1844, 1], стр. 460).

3.11. Гийом Вертгейм: Фарадей без Максвелла

Лишь немногие экспериментаторы в механике твердого тела на протяжении прошедших 300 лет имели огромный энтузиазм или талант, необходимые для осуществления обширнейшей программы, которая создала бы фундаментальную базу для будущих теоретических или экспериментальных исследований в определенной области. Почти все, кто в XIX веке мог бы хоть в какой-то мере претендовать на подобное, были академиками или университетскими профессорами, в распоряжении которых были один или больше научных ассистентов и более или менее подходящее лабораторное оборудование. Такие ученые, как Кельвин, Купфер, Баушингер, Фохт, Бах и Грюнайзен, были уже установившимися и признанными авторитетами, когда приступали к исследованиям, которые связаны с их именами. Очевидно, что совершенно недостаточно просто провести тысячи испытаний, подобно тому как это сделали Луи Леклерк граф де Бюффон (Buffon [1741,1]) или Давид Киркальди (Kirkaldy [1891,1]). Правильные систематические экспериментальные исследования, которые закладывают основу для изучения некоторого вопроса, должны быть четко поставлены, точно осуществлены и вообще задуманы с достаточным воображением, чтобы избежать всех вспомогательных эмпирических допущений, которые в противном случае низведут работу в целом до уровня почти не имеющих смысла догадок при появлении последующих более совершенных работ.

Особенно примечательно, что Гийом Вертгейм в возрасте двадцати пяти лет, новоприбывший в Париж иностранец с законченным год назад медицинским образованием, будучи просто частным лицом, смог всего лишь за три коротких года, выполнив все единолично, заложить экспериментальные основы для сравнительного изучения констант упругости пятнадцати металлов и шестидесяти четырех сплавов, испытанных для установления плотности, состава, чистоты, предела упругости, предельного сопротивления, максимального удлинения и постоянных упругости, которые определялись из динамических опытов на продольные и поперечные колебания, а также квазистатических испытаний, с разгрузкой из каждой области деформации, вплоть до разрушения как для протянутых, так и отожженных металлов. Если к этому добавить, что его эксперименты с чистыми металлами были проведены при комнатной

температуре, а также при 100°C, 200°C и при —20°C и являлись первым изучением влияния температуры на константы упругости и, кроме того, что в них были учтены эффекты электрического и магнитного полей, там, где это оказывалось уместным, то с уверенностью можно заключить, что Вертгейм был одной из самых экстраординарных фигур в истории экспериментальной физики.

Сразу же после этого Вертгейм приступает к аналогичному изучению упругости и прочности разного вида стекол, древесины различных пород и основных тканей человеческого тела — и все это до конца 1846 г. Только лишь в 1854 г., через пятнадцать лет после прибытия в Париж и через год после присуждения ему степени доктора наук, Вертгейм получил свое единственное академическое назначение — должность заместителя профессора на факультете в Монпелье (*Faculté de Montpellier*). С 1855 г. и до своей преждевременной смерти в возрасте 46 лет, когда он «в приступе депрессии» бросился с башни собора св. Катерины в Туре, он был экзаменатором на вступительных экзаменах в Политехнической школе (*École Polytechnique*) в Париже [1]).

Я уже комментировал дискуссию, которая почти всегда сопровождала экспериментальные исследования Вертгейма. Однако восприятие его первых мемуаров по константам упругости не характеризуется наличием атак и окриков. В докладе Понселе, Дюамеля, Пелоуза и Бабине (комиссия, назначенная Академией) о работах, представленных во Французскую Академию в 1842 и 1843 гг., последовательно опубликованных в «Анналах по физике и химии» (*Annales de Chimie et de Physique*) в 1844 г., пророчески утверждалось:

«Рассмотрение в целом работы г. Вертгейма показывает, что в противоположность обычному он не позволяет себе преждевременных теоретических выводов; что указываемые им связи между результатами его экспериментов и молекулярным строением тел имеют огромное значение, но более того, эта его работа, рассматриваемая с экспериментальной точки зрения, содержит такое количество новых определений, численных значений констант, точных измереиий, что Академии не остается ничего другого, как полностью одобрить эту работу, добросовестную и богатую фактами.

Наша комиссия, таким образом, предлагает, чтобы Вы одобрили эти два мемуара г. Вертгейма и рекомендовали их к опубликованию в *Recueil des Savants Étrangers* (Babinet et al. [1844, 1]).

Запечатанный пакет, посланный в 1841 г. Французской Академии, свидетельствует о том, что интерес Вертгейма к физике твердого тела восходит к 1837 г., когда он был студентом-медиком в Вене. В это время, по его утверждению, он послал д'Эстингсхаузену

---

[1]) Об этой связи со вступительными экзаменами в Политехническую школу — назначением, весьма почетным в то время — упоминается в панегирике Поггендорфа (Poggendorff [1863, 1]). Я проверил список экзаменаторов в Политехническую школу за этот период и не нашел никаких ссылок на Вертгейма, как на имеющего ответственную должность в этом качестве. Другие подробности его жизни см. гл. II, раздел 2.14, см. также разделы 2.19, 2.20.

в Вене сравнительный анализ деформационных экспериментов Гьютона-Морво, Ренни, Тредгольда и Хладни, из которого он заключил, что, хотя общие тенденции можно уяснить, полученные результаты фактически недостаточно точны не только в части экспериментальных методов, но и в характеристике химической чистоты материалов образцов, чтобы служить основой углубленного изучения свойств твердых тел. Его собственной целью, как он заявил, является осуществление систематического исследования химически чистых тел.

В одном мемуаре за другим с 1842 по 1860 г. Вертгейм повторял, что видит свою задачу в создании широкой базы, позволяющей проверить применимость с точки зрения физики различных теорий, которые предлагаются без введения частных гипотез, как начальной основы для экспериментального исследования. Он был убежден, что такой подход неизбежно приведет к лучшему пониманию предмета и не только путем отказа от теорий и гипотез, неверно трактующих физическую ситуацию, но и повышением адекватности новых теоретических подходов, которые придут им на смену. Кажется странным, что, преследуя столь ясные цели и выступая за логический подход к физике, Вертгейм постоянно подвергался нападкам за опровержение весьма популярных гипотез. Он обвинялся либо в неспособности осмыслить точки зрения, которые он отвергал на основании эксперимента, либо недооценил роли выдающегося теоретика в построении новых теорий, заменяющих или развивающих старые. Все это было слишком обычным для участи экспериментаторов, новые открытия которых опережают современную им науку. Интересно, что несколько современных ему крупных теоретиков таких, как Коши, Дюамель, Понселе и в некоторых случаях Сен-Венан, относились с пониманием и симпатией к его объективности даже после того, как в их собственных ранних теориях эксперименты Вертгейма обнаруживали физическую ограниченность применения. Так, в докладе Академии по работе Вертгейма 1848 г. о сжимаемости тел, работе, которая выявила неприменимость одноконстантной атомистической теории упругости Коши и Пуассона, мы видим следующее заключение комиссии с Коши в качестве докладчика:

«В заключенне члены Комиссии считают, что г. Вертгейм в своем иовом мемуаре, представленном на их рассмотрение после решения важного вопроса, касающегося как физиков, так и геометров, обсуждает этот вопрос с той же проницательностью, которую он показал в своих предыдущих исследованиях. Поэтому Комиссия выражает миение, что этот мемуар заслуживает одобрения Академии и может быть рекомендован к опубликованию в *Recueil des Savants Étrangers*» [1]).

[1]) См. «*Rapport sur divers Mémoires de M. Wertheim*» (Wertheim [1851, 9], стр. 329, 330). Несмотря иа то, что все три комиссии, назначеиные Академией для рассмотрении различных мемуаров Вертгейма, со всей убедительиостью рекомендовали включить их в «*Recueil des Savants Étrangers*», ни один из ннх не был опубликован в этом нздании.

3.12. Мемуар Вертгейма 1842 г.: значения E для 15 элементов и первое изучение эффектов температуры окружающей среды, предварительной истории обработки образцов, уровня нагружения и межатомного расстояния

Подобно мемуарам Кулона, сочинения Вертгейма являются образцом ясного изложения экспериментальных исследований. Они выгодно отличаются от бессвязных полузавершенных публикаций, обычных для механики твердого тела в то время. Вертгейм неизменно начинал с обширного, полного и в высшей степени полезного исторического обзора, содержащего хорошо документированную библиографию. За этим следовали: четкая постановка задачи, детальное и тщательное описание приборов и пределов их возможностей, тщательно табулированный раздел, содержащий все результаты, представленные в легко понимаемой читателем форме, и, наконец, сводка пронумерованных окончательных заключений.

Первый мемуар состоял из трех частей, первая из которых была представлена Академии 18 июля 1842 г.; вторая — 8 мая 1843 г. и третья — 22 июля 1844 г. В этой работе (Wertheim [1844, 1(a), (b), (c)]), его первом исследовании по физике, Вертгейм в возрасте двадцати пяти лет заложил экспериментальные основы наших знаний об упругости кристаллических тел при малых деформациях; и сразу же приобрел международную репутацию ведущего авторитета в этой области. В первом разделе своего мемуара он приводит обзор ранее выполненных исследований по определению значений коэффициентов упругости и скорости звука в твердых телах, включая железо, медь, свинец, цинк, серебро и платину. Он отметил не только большой разброс данных, полученных в таких опытах, но и тот факт, что чистота и состав рассматриваемых материалов почти всегда были неизвестны исследователям. Он констатировал, что параметры упругости не изучались как функции температуры или как величины, значения которых зависят от меры тщательности определения плотности, или от того, было ли тело подвергнуто влиянию электрического и магнитного полей, выраженному в терминах наблюдаемого предела упругости, а также то, что параметры упругости не изучались в зависимости от хорошо установленной предварительной термической истории, или от влияния на их значения вида испытаний динамического и квазистатического, проводимых с достаточной точностью; Вертгейм отметил то, на что ранее не обращалось внимания, на большое отличие в значениях констант упругости, определенных динамически или квазистатически.

Результатом первой программы Вертгейма, реализованной в опытах со свинцом, оловом, кадмием, золотом, цинком, палладием, медью, платиной, чугуном, тремя видами железной проволоки и проволоки из английской стали, было определение значений модуля E для литых, вытянутых, отожженных и предварительно разру-

шенных образцов. Эксперименты при комнатной температуре заключались в измерении плотности как до, так и после разрушения, определении значений модуля в опытах с продольными и поперечными колебаниями, а также квазистатических значений модуля при

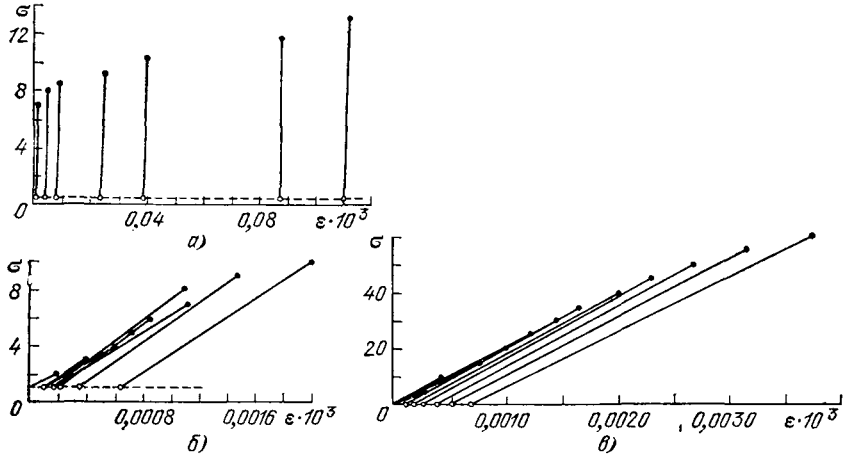


Рис. 3.25. Примеры результатов Вертгейма (1842) по повторным квазистатическим нагружениям образцов из серебра и железа. *а*) Серебро кованое, тянутое и отожженное; *б*) серебро кованое, тянутое и отожженное; *в*) железо тянутое. ε — деформация, σ — напряжение в кгс/мм².

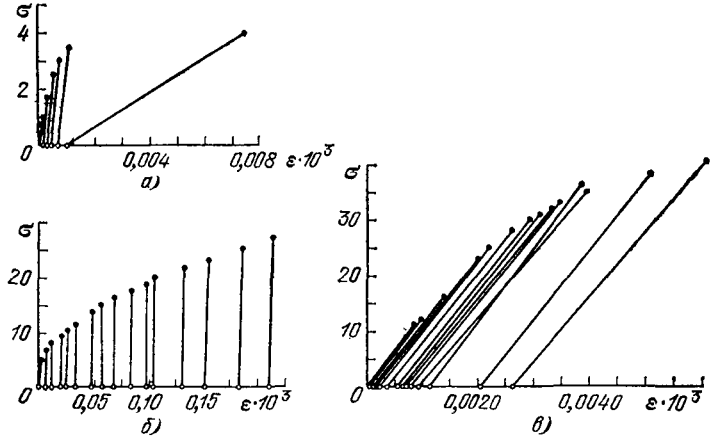


Рис. 3.26. Примеры результатов Вертгейма (1842) по повторным квазистатическим нагружениям образцов из цинка и меди, подвергнутых растяжению. *а*) Чистый цинк; *б*) медь кованая, тянутая и отожженная; *в*) медь кованая и тянутая; абсцисса точки, обозначеиной светлым кружком — остаточная деформация, черным кружком — полная деформация (упругая и остаточная). ε — деформация, σ — напряжение в кгс/мм².

разгрузке растянутых образцов, проводившейся из целой серии пластических состояний, для каждого из которых указывалась остаточная деформация. Для одного образца он часто производил

до 40 отдельных определений квазистатического модуля. Независимо от того, был образец отлит, отожжен или протянут, он устанавливал визуально обнаруживаемый предел упругости, разрушающую нагрузку и максимальное остаточное удлинение. Кроме того, в каждом случае и для каждого условия он вычислял скорость звука. Несколько примеров квазистатических результатов Вертгейма, которые взяты из его табулированных данных, представлены на рис. 3.25 и 3.26. Окончательное значение модуля E вычислялось как среднее по наклонам всех кривых.

Значения модулей, найденные в опытах с продольными колебаниями, определялись при помощи методики Хладни, в соответствии с которой закрепленные посередине длины стержни натирались на конце [1]). а зажатые по концам проволоки натирались посередине. Частота колебаний определялась сонометром. Частоты поперечных колебаний определялись с помощью тщательно сконструированного прибора, в котором короткая проволока, укрепленная на конце стержня, касалась вращающегося диска, покрытого графитом. Диск приводился во вращение системой грузов, а синхронизация путем калибровки — сравнением с нанесенными на диск метками тщательно калиброванным камертоном — тип калибровки, который Вертгейм приписывал Дюамелю, предложившему его на одной из своих лекций. Весь прибор был смонтирован на массивном дубовом столе, имеющем ножную педаль, с помощью которой система приводилась в действие.

Вертгейм заметил, что с целью контроля можно сопоставить частоты продольных колебаний, определенные с помощью сонометра, с частотами поперечных, найденными измерениями, использующими калибровку; при этом, возбуждая поперечные колебания, можно сделать видимыми малые продольные колебания, даже в узлах поперечных.

Подсчет числа таких продольных колебаний, приходящихся на один цикл поперечных, давал возможность сравнить результаты двух экспериментальных подходов. В табл. 51 такое сравнение для литой стали и латуни показывает, что число продольных колебаний в секунду, полученное как произведение числа поперечных колебаний на число продольных, приходящихся на один цикл поперечных, весьма близко к непосредственно найденному числу продольных колебаний в секунду, измеренному сонометром. Вертгейм показал, что для стержней разных длин при рассматриваемых граничных условиях отношение частоты поперечных колебаний к частоте продольных равно 0,55958. Эта же величина для литой стали и для латуни равнялась соответственно 0,56184 и 0,55974. Так осуществлялся перекрестный контроль экспериментальных результатов, повы-

[1]) Шерстяная ткань, пропитанная смолой (для металлических стержней) или смоченная водой (для стеклянных), служила наиболее распространенной для генерирования колебаний.

шающий доверие к ним; это вообще было характерно для всех исследований Вертгейма.

Таблица 51

Вертгейм (1842)

	Удельный вес (гс/см³)	Радиус стержней (мм)	Частота поперечных колебаний (1/с)	Число продольных колебаний на каждое поперечное колебание	Произведение этих двух чисел (частота продольных колебаний) (1/с)	Частота продольных колебаний в соответствии с показаниями сонометра (1/с)
Литая сталь	7,841	5,060	7,204	175,4	1263,6	1267,0
Латунь	8,452	5,029	4,867	179,0	871,2	864,5

Таблица 52

Вертгейм (1842)

	Модуль упругости, найденный из опытов с		Отношение скорости звука в металле к скорости звука в воздухе, найденное из опытов с	
	продольными колебаниями (кгс/мм²)	поперечными колебаниями (кгс/мм²)	продольными колебаниями	поперечными колебаниями
Висмут	3290	2473	5,455	4,731
Сурьма	4817	3144	8,028	6,486

Вертгейм предположил, что в силу различного распределения напряжений в двух описанных выше ситуациях найденная им корреляция указывает на то, что однородность и изотропность действительно присущи рассматриваемым материалам. Для образцов из висмута и сурьмы, которые он относил к неоднородным металлам, эксперименты по продольным и поперечным колебаниям, как это видно из табл. 52, приводили к существенно различным значениям модуля и отношения скорости звука в этих материалах к скорости в воздухе. Окончательные результаты измерений при комнатной температуре, за исключением данных для висмута и сурьмы, не поддающихся интерпретации, представлены в табл. 53.

Коэффициент упругости и скорость звука получились путем усреднения значений модуля, найденных при различных значениях остаточной деформации в условиях растяжения. Следуя экспери-

Таблица 53

Вертгейм (1842)

	Модули упругости, определенные в опытах с (кгс/мм²)			Отношение скорости звука в металле к скорости звука в воздухе, определенное в опытах с			Удельный вес (гс/см³)
	продольными колебаниями	поперечными колебаниями	квазистатическим растяжением	продольными колебаниями	поперечными колебаниями	квазистатическим растяжением	
Свинец							
литой	1993,4	1985,2	1775,0	3,974	3,966	3,561	11,215
вытянутый	2278,0	1781,2	1803,0	4,257	3,764	3,787	11,169
отожженный	2146,0	1854,2	1727,5	4,120	3,841	3,697	11,232
разрушенный		1788,6			3,749		11,308
Олово							
вытянутое	4006,0	3839,7		7,480	6,829		7,313
отожженное (без обработки)	4418,0	3703,4		7,338	6,719		7,290
литое	4643,0	4172,0		7,465	7,076		7,404
вытянутое	4564,0	4148,0		7,401	7,086		7,342
разрушенное		3918,0			6,909		7,293
Кадмий							
вытянутый	6090,3	5424,0		7,903	7,456		8,665
отожженный	4241,0	5313,0		6,651	7,444		8,520
разрушенный		4084,0			6,518		8,541
Золото							
вытянутое	8599,0	8644,6	8131,5	6,424	6,441	6,247	18,514
отожженное	6372,0	5989,0	5584,6	5,603	5,432	5,245	18,035
разрушенное		5833,0			5,212		19,077
Серебро							
вытянутое	7576,0	7820,4	7357,7	8,057	8,186	7,940	10,369
отожженное	7242,0	7533,0	7140,5	7,903	8,060	7,847	10,304
разрушенное		7648,0			8,115		10,320
Цинк, литье в форму из очищенного песка, литье в кокиль	7536,0	6778,0		9,683	9,188		7,134
	9338,0	9423,0	9021,0	10,774	10,823	10,591	7,146
Цинк (без обработки)							
вытянутый	9555,0	8793,6	8734,5	11,007	10,560	10,524	7,008
отожженный	9292,0	9641,0		10,814	11,016		7,060
разрушенный		9324,0			10,822		6,997
Палладий							
вытянутый		12 395	11 759		10,066	9,804	11,350
отожженный		11 281	9 789,0		9,450	8,803	11,225
Медь							
вытянутая	12 536	12 513	12 449	11,167	11,157	11,128	8,933
отожженная	12 540	11 833	10 519	11,167	10,847	10,703	8,936
разрушенная		12 040			10,970		8,890
Платиновая проволока							
тонкая	16 176	15 928		8,241	8,177		21,166
отожженная	14 292	14 373		7,823	7,845		20,753
средняя	17 165	17 153	17 044	8,467	8,456	8,437	21,275

Таблица 53 *(продолжение)*

	Упругие модули, определенные в опытах с (кгс/мм²)			Отношение скорости звука в металле к скорости звука в воздухе, определенное в опытах с			Удельный вес (гс/см³)
	продольными колебаниями	поперечными колебаниями	квазистатическим растяжением	продольными колебаниями	поперечными колебаниями	квазистатическим растяжением	
отожженная	15 611	15 355	15 518	8,111	8,045	8,087	21,083
толстая	16 159	15 814		8,218	6,130		21,259
отожженная	15 560	15 683		8,074	8,106		21,207
разрушенная		16 748			8,421		20,987
Железо (Берри)							
вытянутое	19 903	18 547	20 869	15,108	14,584	15,472	7,748
отожженное	19 925	19 410	20 794	15,108	14,913	15,433	7,757
разрушенное		17 538			14,179		7,751
Железная проволока (без обработки)			18 613			14,798	7,553
Литая сталь							
вытянутая	19 823	18 247	19 549	15,108	14,495	15,003	7,717
отожженная	19 828	18 811	19 561	15,108	14,716	15,006	7,919
разрушенная		16 728			13,965		7,710
Стальная проволока. Английская							
вытянутая	19 445	20 714	18 809	14,961	15,442	14,716	7,718
отожженная	19 200	21 070	17 278	14,961	14,673	14,193	7,622
разрушенная		16 728			13,965		7,710
Железная проволока (без обработки)							
отожженная до голубого каления			18 045			14,700	

ментальной практике Герстнера и Ходкинсона, Вертгейм нагружал свои образцы до заранее предписанных значений напряжений и деформаций, а затем снимал нагрузку; после этого он снимал упругую деформацию и измерял значение остаточной деформации с помощью оптического катетометра, позволявшего при длине образцов, равной 1 м, иметь разрешающую способность по деформациям, равную $\varepsilon = 10^{-5}$. Затем прикладывалась бóльшая по уровню нагрузка и весь процесс повторялся. Пример из очень большого количества данных, которые он табулировал, приведен в табл. 54. При вычислении модулей по данным Вертгейма можно заметить, что он исключал начальную нагрузку, которая вызывала удлинение, меньшее чем 10^{-3}.

Различными параметрами, которые Вертгейм использовал при описании своих данных, были:

P — нагрузка (кгс/мм²);

Таблица 54

Вертгейм (1842). Медь кованая и протянутая. Плотность = 8,933. Длина стержия = 450 мм. Радиус поперечного сечения = 1,4986 мм

P Нагрузка (кгс/мм²)	L' Расстояние между отмечениями точками в образце, находящемся под действием нагрузки (мм)	L Расстояние между упомянутыми отмеченными точками в стержие без нагрузки (до нагружения) (мм)	a Упругое удлинение на метр (мм) ($10^3\varepsilon_e$)	a' Остаточное удлнение на метр (мм) ($10^3\varepsilon_p$)	E Модуль упругости (кгс/мм²)
0	—	787,22	—	—	—
3	787,39	787,22	0,216	—	—
4	787,45	787,22	0,292	—	—
5	787,53	787,22	0,393	—	12 700
6	787,64	787,22	0,533	—	11 249
7	787,65	787,22	0,546	—	12 820
8	787,74	787,22	0,660	—	12 121
9	787,80	787,22	0,736	—	12 218
10	787,86	787,22	0,813	—	12 300
11	787,90	787,22	0,863	—	12 737
12	787,99	787,26	0,927	0,050	12 954
13	788,09	787,28	1,028	0,076	12 637
14	788,17	787,27	1,143	0,063	12 250
15	788,20	787,27	1,181	0,063	12 700
16	788,31	787,30	1,282	0,101	12 474
17	788,36	787,30	1,346	0,101	12 628
18	788,44	787,31	1,435	0,114	12 543
19	788,49	787,31	1,498	0,114	12 679
20	788,55	787,32	1,562	0,127	12 804
21	788,62	787,32	1,651	0,127	12 720
22	788,69	787,32	1,740	0,127	12 644
23	788,80	787,34	1,858	0,152	12 384
24	788,90	787,40	1,905	0,228	12 599
25	788,95	787,40	1,968	0,228	12 700
26	789,06	787,43	2,070	0,267	12 560
27	789,15	787,43	2,148	0,267	12 360
28	789,28	787,50	2,260	0,355	12 386
29	789,43	787,62	2,298	0,508	12 616
30	789,53	787,64	2,400	0,533	12 499
31	789,68	787,71	2,502	0,622	12 390
32	789,84	787,77	2,627	0,698	12 182
33	789,97	787,83	2,715	0,774	12 151
34	790,13	787,94	2,779	0,914	12 234
35	790,33	787,96	3,007	0,939	11 637
36	790,50	788,20	2,619	1,244	12 334
38	791,22	788,83	3,033	2,043	12 529
40	792,00	789,28	3,452	2,614	11 588

Химический состав: 98,82% Cu, 0,38% Ag, 0,80% Fe.
$E = 12\,513$ кгс/мм² (7,675 поперечных колебаний в секунду).
$E = 12\,536$ кгс/мм² (1855 продольных колебаний в секунду).

L' — расстояние между отмеченными точками в стержне, находящемся под действием растягивающей нагрузки (мм);

L — расстояние между отмеченными точками в ненагруженном образце (мм);

a — упругое удлинение на метр (мм);

a' — остаточное удлинение на метр (мм);

E — коэффициент упругости (кгс/мм²).

Отметим, что Вертгейм измерял предел упругости, определявшийся как относительное удлинение, при котором остаточная деформация, согласно наблюдению, была равна $\varepsilon = 10^{-5}$. Это, разумеется, гораздо меньше, чем 0,2%, которые часто используются в современной практике. По мнению Вертгейма, которое совпадало с мнением Ходкинсона и которого позднее придерживался Баушингер, в действительности вообще не существует предела упругости, ниже которого не наблюдалось бы никакой остаточной деформации. Вертгейм считал, что дело тут только в усовершенствовании измерений, которые, если их сделать более точными, обнаружили бы микропластическую деформацию, каков бы ни был уровень общей деформации [1]).

Прибор для квазистатических испытаний Вертгейма был снабжен приспособлением, позволяющим ему прикладывать нагрузку весьма плавно, «без малейшей встряски». Этот прибор был таким, что его можно было поместить внутрь трехслойного кожуха, две внутренние стенки которого были из меди, а внешняя— из белой жести. Между двумя медными цилиндрами был засыпан песок. Печь нагревала внутреннюю секцию до установленного уровня температуры, который контролировался термометрами, расположенными вдоль образца. Модули при удлинении для рассматриваемых металлов определялись при 100 и 200°С. Затем установка была изменена таким образом, что в нее помещалась смесь из толченого льда с серной кислотой; это позволяло выполнить аналогичные испытания при температурах от —15 до —20°С. Поскольку Вертгейм не был уверен в том, что в этих условиях удается получить значения динамических модулей упругости, его сравнение модулей упругости и отношений скоростей звука в металле и в воздухе при четырех температурах, показанное в табл. 55, было основано на квазистатических измерениях удлинений. Это было первое исследование зависимости констант упругости от температуры. В своем анализе этого большого количества результатов, Вертгейм был первым, кто систематически стал изучать малые деформации металлов (Wertheim [1844, 1], [1845, 1], [1850, 2], а также см. Бодримона (Baudrimont [1850, 1])). Никто до него не рассматривал и, конечно, ни один из предшественников не сравнивал свойства металлов в таком установлен-

[1]) Эта точка зрения разделялась большинством старательных экспериментаторов, но решительно отрицалась многими заурядными теоретиками и небрежными экспериментаторами XIX столетия. Современная микропластичность, разумеется, подтвердила догадку Ходкинсона, Вертгейма и Баушингера.

Таблица 55

Вертгейм (1842)

Отожженные металлы	Плотность	Модуль упругости (кгс/мм²)	Отношение скорости звука в металле к скорости звука в воздухе	Плотность (вычисленная)	Модуль упругости (кгс/мм²)	Отношение скорости звука в металле к скорости звука в воздухе	Плотность (вычисленная)	Модуль упругости (кгс/мм²)	Отношение скорости звука в металле к скорости звука в воздухе
	от 10° до 15°С			при 100°С			при 200°С		
Свинец	11,232	1 727	3,697	11,075	1 630	3,616			
Золото	18,035	5 584	5,245	17,953	5 408	5,174	17,873	5 482	5,221
Серебро	10,304	7 140	7,847	10,245	7 274	7,943	10,187	6 374	7,456
Медь	8,936	10 519	10,703	8,891	9 827	9,910	8,840	7 862	8,890
Платина	21,083	15 518	8,087	21,027	14 178	7,740	20,969	12 964	7,412
Железо	7,757	20 794	15,433	7,729	21 877	15,859	7,696	17 700	14,295
Железная проволока (без обработки)	7,553	18 613	14,798	7,543	19 995	15,347			
Литая сталь	7,719	19 561	15,006	7,694	19 014	14,819	7,669	17 926	14,412
Стальная проволока,	7,622	17 278	14,193	7,597	21 292	15,781	7,573	19 278	15,040
Английская стальная проволока, отожженная до голубого калеиия	7,420	18 045	14,700	7,410	18 977	15,085			
Неотожженные металлы	при 10°С			при —15°С					
Золото	18,889	8 603	6,362	18,896	9 351	6,931			
Серебро	10,458	7 411	7,935	16,463	7 800	8,139			
Палладий	10,661	10 289	9,261	10,664	10 659	9,424			
Платина	20,513	15 647	8,233	20,518	16 224	8,382			
Медь	8,906	12 200	11,042	8,910	13 052	11,399			
Железная проволока (без обработки)	7,553	18 613	14,798	7,555	17 743	14,446			
Сталь, отожженная до голубого каления	7,420	18 045	14,700	7,422	17 690	14,553			
Латунь	8,247	9 005	9,744	8,431	9 782	10,151			

ном, сравнительно чистом состоянии. Вертгейм показал, что коэффициенты упругости уменьшаются с ростом температуры от —15 до 200°C для всех металлов, за исключением железа и стали. Для железа при изменеиии температуры от —15 до 200°C модуль упругости возрастает, достигая максимального значения в промежутке между 100 и 200°C; при этом его значение при 200°C становится меньше, чем при 100°C. Далее он обнаружил, что модули, найденные в динамических экспериментах, систематически оказываются больше, чем средние их значения, полученные в квазистатических опытах на растяжение. Вертгейм отнес это расхождение на счет различия между тем, что сегодня носит название изотермической и адиабатической ситуаций. Стремясь вычислить отношение удельных теплоемкостей из этих данных, он использовал зависимость, предложенную Дюамелем,

$$K = 1{,}8\frac{v'^2}{v^2} - 0{,}8, \tag{3.2}$$

где K — отношение удельных теплоемкостей, v' — скорость, найденная из опыта на продольные колебания, v — скорость, вычисленная на основании квазистатических измерений.

Как указал Рудольф Юлиус Эммануэль Клаузиус (Clausius [1849, 1]) в своей сильной, хотя отчасти некорректной критике Вертгейма и Вебера, состоящей в том, что динамическая скорость в формуле Дюамеля является дилатационной волновой скоростью в неограниченной среде, которая заметно выше, чем скорость распространения продольных колебаний в стержне. Клаузиус пытался опровергнуть термические опыты Вебера (см. гл. II, раздел 2.12) и определенные по их данным удельные теплоемкости не на основании ограничений и приближений, связанных с термодинамическим анализом, а исходя из предположения, что Вебер не учитывал эффекта упругого последействия, который, как полагал Клаузиус, должен иметь место в металлах так же, как и в шелке. Вычислив заново отношения Вертгейма, найденные на основе измерения скоростей волн в стержнях, Клаузиус получил значения удельных теплоемкостей, которые, как он считал, были невозможными. Отсюда он заключил, что Вертгейм также должно быть не учитывал эффекта упругого последействия в металлах. В написанном в сильных выражениях ответе на это предположение о том, что упругое последействие может быть причиной расхождения между динамическими и квазистатическими измерениями, выполненными Вебером и Вертгеймом, Вертгейм в своем последнем мемуаре 1860 г. отклонил предположение Клаузиуса о том, что причиной расхождения было упругое последействие Вебера (Wertheim [1860, 1]. См. также [1852, 3]).

Ни скорости волн расширения, ни скорости сдвиговых волн, которые предсказываются линейной теорией упругости для неограниченной среды, не могли быть измерены в каких бы то ни было телах ни в 1842 г., ни несколькими десятилетиями позже. Не только

Вертгейма, но и многих других исследователей [1]) озадачивал вопрос о том, как связаны скорости продольных и поперечных волн в стержнях со скоростями волн расширения и сдвиговых волн, которые получаются из линейной теории упругости. Была сделана попытка использовать аналогию путем сравнения измеренных скоростей волн в жидкости в трубах и в больших массах воды, а также проведены экспериментальные исследования скоростей продольных и поперечных волн в больших плитах, в которых было введено ошибочное предположение о том, что волны Ламба (плоские волны расширения в плоскости тонких плит) распространяются со скоростью волн расширения линейной теории.

То, что использование Вертгеймом скорости продольных волн в стержнях в формуле Дюамеля (3.2) было ошибочным, лучше всего может быть увидено в ретроспективном освещении проблемы сороковых лет XIX века. По очевидным причинам мы не приводим здесь ни данных Вертгейма, ни их коррекцию Клаузиусом. Критика Клаузиуса экспериментов Вебера была просто неверной. Экспериментальный источник неправильности производимого Вертгеймом сравнения динамических и квазистатических модулей возникает из факта, первоначально замеченного Кулоном в 1784 г. и состоящего в том, что значение модуля уменьшается с возрастанием остаточной деформации; отсюда среднее значение модуля, найденное из квазистатических опытов при различных значениях остаточных деформаций, возникающих при относительно большой общей деформации, меньше, чем значение динамического модуля, вычисленного по продольным или поперечным колебаниям, происходящим при чрезвычайно малых деформациях. Амплитуда деформаций в динамических измерениях Вертгейма всегда была ниже, чем минимальная наблюдаемая квазистатическая деформация. Грюнайзен в первом десятилетии XX века проверил этот вопрос сопоставления адиабатических и изотермических модулей в той же области деформаций $\varepsilon = 10^{-6}$, рассмотрев как динамическую, так и квазистатическую ситуации, и показал для металлов, изучавшихся Вертгеймом, что разница в значениях модулей E была чрезвычайно малой — в четвертом знаке после запятой [2]).

Касаясь определения предела упругости, Вертгейм отметил, что путем введения произвольного предположения о соответствии его нагрузке, вызывающей остаточную деформацию равную 0,00005, указанный предел может рассматриваться как напряжение, отве-

---

[1]) Средн иих былн, иапример, Кошн, Дюамель и такой выдающнйся экспернментатор, как Рено.

[2]) Многие авторы современиых справочинков по ультразвуку обычно предполагали, правда, без экспериментальных подтверждений, что нх существенно большие расхождения между результатамн динамнческих н квазистатнческих измерений можно отнести только на счет ожидаемых различнй между адиабатнческимн и изотермнческими деформацнямн. Как мы уже внделн в гл. II, для правильного сравнеиня результатов необходнмо точно устаиовнть амплитуды.

чающее «столь малой остаточной деформации, которую только еще в состоянии измерить инструмент». Он подчеркивал, что проводил свои эксперименты очень медленно с серебром, медью, золотом и платиной, никогда не изменяя нагрузку внезапно и на большую величину. Отсюда он заключил, что остаточное удлинение является неизвестной функцией продолжительности действия нагрузки. Нагрузка, которая по прошествии некоторого времени представляется не вызывающей измеримое остаточное удлинение, на самом деле вызывает его, но по прошествии более продолжительного времени.

«Не является невозможным, что то же самое пронзойдет для удлнннения меньшего чем 0,00001 единицы длнны, хотя наши инструменты н не могут его измернть. Поэтому можно сказать, что чнсла, выражающне предел упругости, могут снизиться прн усовершенствовании инструмента и прн условнн воздействия нагрузки более продолжительный промежуток времени» (Wertheim [1844, 1 (c)], стр. 439) [1]).

Результаты Вертгейма показывают, что хотя продольные и поперечные колебания приводят к примерно одинаковым значениям модуля упругости, те из них, которые получены из опытов с продольными колебаниями, всегда оказываются слегка выше, чем из опытов с поперечными колебаниями. Малое систематическое отклонение такого рода можно ожидать в значении модуля, вычисленного по данным опыта с поперечными колебаниями, но без учета влияния на прогиб инерции поворота поперечных сечений или сдвига и поперечной деформации. Ни один из этих трех аспектов влияния на динамический изгиб, требующих некоторой коррекции элементарной теории [2]), не рассматривался еще долгое время после 1842 г. Поэтому ошибка, конечно, присутствовала во всех значениях E, вычисленных на основе опытов с динамическим изгибом, начиная от выполнявшихся Юнгом в 1807 г. до проводившихся Грюнайзеном в 1907 г. Е. Гоэнс (Goens [1931, 1]) в 1931 г. был первым, кто принял во внимание как инерцию поворота сечений, так и влияние сдвига на прогиб в подобных экспериментах.

Другим аспектом констант упругости, вызвавшим некоторый интерес до 1840 г., была возможная зависимость упругости твердых тел от малых вариаций плотности. За исключением дерева, в котором такая вариация наблюдалась, эксперименты проводились с точностью, недостаточной для решения этого вопроса. Вертгейм продемонстрировал, что упругость металлов также немного меняется с изменением плотности. Он показал, что закон Герстнера, описанный выше, справедлив для всех металлов, в которых могут возникнуть остаточные деформации. В одном из своих заключений он отмечал:

---

[1]) В немецком переводе этой статьн 1848 г. прнведенная цитата находится на стр. 57; см. [1844, 1 (c)], примечанне.

[2]) См. недавине работы Харди и Паркииса (Hardie and Parkins [1968, 1]), а также Харта (Hart [1968, 1]), в которых детальное сравненне модулей E, включая все нзвестные коррекцни, показало, что небольших расхождений в результатах эксперимментов, которые наблюдал Вертгейм, используя свон элементарные вычнсления, конечно же, следовало ожидать.

«Остаточное удлиненне возникает не скачком или толчком, а только непрерывным образом. Изменяя нагрузку и продолжительность ее действия в подходящем режиме, можно получнть любое остаточное удлиннение» (Wertheim [1844, 1(a)], стр. 452).

Иными словами, Вертгейм пришел к заключению, что зубчатость на диаграмме напряжение — деформация, которую комментировал еще Массон (Masson [1841, 1]) и которая известна в наши дни (несправедливо по отношению к первооткрывателю) как эффект Портвена — Ле Шателье, может быть устранена при загружении мертвой нагрузкой, если приращения нагрузки будут достаточно велики. Этот факт хорошо известен тем, кто в наше время изучал обсуждаемый эффект при использовании мертвой нагрузки.

Еще одно наблюдение Вертгейма, которое положило начало значительному количеству исследований Томлинсона, Фохта и других [1]) в последующие годы, касалось уменьшения значения модуля E для металлов с ростом их атомного объема. Вертгейм отметил, что произведение значений модуля E и межатомного расстояния в седьмой степени, почти постоянно. В табл. 56 указаны: S — удельный вес, A — атомный вес, $\lg \alpha$ — логарифм межатомного расстояния, E — модуль упругости, $\lg E\alpha^7$ и $\lg (E\alpha^7)_{\text{ср}}$ — логарифм произведения $E\alpha^7$ при комнатной температуре и логарифм среднего значения этого произведения для каждого из металлов, которые рассматривал Вертгейм. С экспериментальной точки зрения обнаружение связи между константой упругости и параметром кристаллической решетки является исторической вехой в физике твердого тела [2]).

Вертгейм произвел аналогичные сравнения значений $\lg E\alpha^7$ для различных металлов при 100°C, отметив при этом, что поскольку с повышением температуры упругость падает с бо́льшей скоростью, чем скорость, с которой увеличивается удлинение, то в этом может крыться некоторый эффект. Он понимал, что для этих данных или полученных при более низкой температуре разность температур была недостаточной для окончательных исследований. Интересно отметить, что в своем мемуаре 1842 г. Вертгейм подчеркивал желательность экспериментального исследования констант упругости анизотропных тел, а также указывал на те трудности, которые могут возникнуть при изготовлении образцов. Из намеченной программы, которая была выполнена Фохтом в опытах с многочисленными кристаллами примерно полувеком позже, Вертгейм, как будет видно из дальнейшего, успел исследовать только древесину.

---

[1]) См., например, Джеймса Реддика Партингтоиа (Partington [1952, 1], стр. 96), который ссылается иа исследования Вертгейма как на первые такого рода.

[2]) Массон (Masson [1841, 1]) годом ранее предположнл, что для железа, меди, цинка, олова и серебра произведение значенний модуля E и атомного веса является постоянным.

Таблица 56

Вертгейм (1842)

		A	$\lg \alpha$	E (кгс/мм²)	$\lg (E\alpha^7)$	Логарифм среднего значения $E\alpha^7$
Свинец						
литой	11,215	1294,498	0,684733	1 775	8,04233	
вытянутый	11,169		0,688030	1 803	8,07221	8,05469
отожженный	11,232		0,687213	1 727	8,04778	
разрушенный	11,038		0,686240	1 788	8,05605	
Олово						
чистое	7,313	735,294	0,667453	3 839	8,25637	
отожженное	7,290		0,667910	3 703	8,24397	
Олово (без обработки)						
литое	7,404		0,665663	4 172	8,27998	
вытянутое	7,342		0,666883	4 148	8,28602	8,26715
разрушенное	7,293		0,667850	3 918	8,26801	
Кадмий						
литой	8,665	696,770	0,635063	5 424	8,17976	
отожженный	8,520		0,637507	5 313	8,18789	8,14944
разрушеиный	8,541		0,637150	4 084	8,07114	
Золото						
вытянутое	18,514	1243,013	0,608990	8 131	8,17307	
отожженное	18,035		0,612783	5 584	8,03643	8,07533
разрушенное	19,077		0,604320	5 833	7,99613	
Серебро						
вытянутое	10,369	675,803	0,600783	7 357	8,07218	
отожженное	10,304		0,601693	7 140	8,06555	8,07737
разрушенное	10,320		0,601470	7 648	8,09384	
Цинк						
чистый, литой	7,146	403,226	0,583830	9 021	8,04206	
обычный, вытянутый	7,008		0,586653	8 734	8,04778	8,06002
отожженный	7,060		0,586880	9 641	8,09228	
Палладий						
вытянутый	11,539	665,900	0,589360	11 759	8,19589	8,16337
отожженный	11,225		0,591070	9 789	8,12823	
Платина						
вытянутая	21,259	1233,499	0,587867	15 814	8,31411	
отожженная	21,207		0,588220	15 683	8,31297	
вытянутая	21,275		0,587757	17 044	8,34587	
отожженная	21,083		0,589070	15 518	8,31433	8,31789
вытянутая	21,166		0,588500	15 928	8,32167	
отожженная	20,753		0,591353	14 373	8,29702	
разрушеиная	20,987		0,589730	16 748	8,35207	
Медь						
вытянутая	8,933	395,695	0,548790	12 450	7,93670	
отожженная	8,936		0,548743	10 519	7,86318	7,91020
разрушеиная	8,890		0,549490	12 040	7,92706	
Железо						
вытянутое	7,748	339,205	0,547090	20 869	8,14913	
отожженное	7,757		0,546923	20 794	8,14639	

Таблица 56 *(продолжение)*

	S	A	$\lg \alpha$	E (кгс/мм²)	$\lg (E\alpha^2)$	Логарифм среднего значения $E\alpha^2$
разрушенное	7,751		0,547035	17 538	8,07322	
Железная проволока обычная	7,553		0,550780	18 613	8,12528	
Литая сталь вытянутая	7,717		0,547670	19 549	8,12482	8,11330
отожженная	7,719		0,547633	19 561	8,12482	
Стальная проволока вытянутая	7,718		0,547653	18 809	8,10794	
отожженная	7,622		0,549463	17 278	8,08373	
разрушенная	7,710		0,547805	16 728	8,05808	
Стальная проволока, отожженная до голубого каления	7,420		0,553353	18 045	8,12981	

3.13. Мемуар Вертгейма 1843 г.: первые эксперименты с двух- и трехкомпонентными сплавами, включающие изучение влияния на модуль E химического состава и скорости нагружения для 64 сплавов

Во втором разделе мемуара, представленного Академии в 1843 г., содержалось, как подчеркнула Академическая комиссия, первое исследование деформирования двух- и трехкомпонентных сплавов. Как указал Вертгейм во введении к этому разделу своей работы, единственными сплавами, свойства которых при деформировании исследовались когда либо ранее, помимо, конечно, обычного определения сопротивления разрушению, были латунь и бронза. Для каждого из 64 сплавов, которые во всех случаях Вертгейм получал сам, была произведена проверка процентного содержания компонентов с помощью анализа проб, взятых с обоих концов проволочных образцов. Он писал, что отбросил большое количество стержней, для которых обнаруживалось различие в составе на их концах. Расплавленная смесь заливалась в чугунную форму длиной 50 см, затем стержни вытягивались прежде, чем подвергнуться анализу. Для каждого сплава были определены динамические модули, причем в двадцати случаях с помощью метода продольных колебаний, а в сорока пяти — методом изгибных колебаний. Для восьми сплавов модули были найдены на основе квазистатических испытаний при растяжении тем же способом, который был описан выше для чистых металлов. Результаты этих испытаний представлены в табл. 57.

Вертгейм (1843) Таблица 57

Компоненты сплава или название сплава	Химическая формула	Плотность: вычисленная	Плотность: измеренная	Опытно определенное процентное содержание компонентов		Модули упругости (кгс/мм²): вычисленные	Модули упругости (кгс/мм²): найденные в опытах с колебаниями: продольными	Модули упругости (кгс/мм²): найденные в опытах с колебаниями: поперечными	Модули упругости (кгс/мм²): найденные из квазистатических опытов с образцами, подвергнутыми осевой деформации	Отношение скорости звука в металле к скорости звука в воздухе из опытов на: колебания	Отношение скорости звука в металле к скорости звука в воздухе из опытов на: квазистатическое растяжение	Предел упругости	Максимальное удлинение (мм)	Прочность (кгс/мм²)
Свинец, олово	$Pb_{16}Sn_{13}$	9,919	10,073	68,50	31,50	2430	2596			4,786		<0,2	0,552	0,93
	PbSn [a]	9,801	9,408	64,39	35,61	2514	2969			5,295		<0,2	2,077	2,46
	Pb_3Sn_7	8,996	8,750	43,42	56,58	2946	3512			5,973		<0,1	1,591	2,07
	Pb_2Sn_7	8,584	8,378	32,98	67,02	3162	3700			6,265		<0,2	0,340	1,07
Свинец, висмут	$Pb_{12}Bi_7$	10,692	11,037	62,44	37,56	2322	2021			4,034		<0,2	0,262	1,52
	PbBi	10,498	10,790	48,60	51,40	2446	2367			4,415		0,1	0,440	1,79
	PbBi	10,316	10,403	35,45	64,55	2564		2838		4,923			0,025	5,22
Свинец, сурьма	Pb_2Sb [b]	10,059	10,101	74,27	25,73	2489		2183		4,382				1,87
	PbSb	9,592	10,064	64,51	35,49	2693		2592		4,784				5,59
	$PbSb_2$	8,636	8,946	43,63	56,37	3109		3242		5,674				
	$PbSb_3$	8,241	8,499	34,99	65,01	3282		3536		6,080				
Свинец, золото	$Pb_{20}Au$	11,540	11,301	95,56	4,44	2281		2227		4,185			0,055	
Свинец, серебро	Pb_8Ag_2	10,958	10,743	73,64	26,36	3373		3095		5,060				
Свинец, платина	$Pb_{85}Pt$	11,325	11,473	98,88	1,12	2134	2684			4,560		0,4 0,6	0,026	1,65
	Pb_8Pt	11,930	12,207	87,08	12,92	3713		3107		4,756				
Свинец, цинк	Pb_6Zn	11,013	11,199	95,15	4,85	2356		2144		4,125			0,069	2,75
	Pb_4Zn	10,890	11,172	91,91	8,09	2548	2493			4,454		0,1	0,060	2,02
	Pb_2Zn	10,705	11,130	87,90	12,16	2902	2833			4,756		0,2	0,060	2,02
	PbZn	10,165	9,430	74,72	25,28	3921		4007		6,145				3,47
	Pb_2Zn_8	9,880	9,043	67,88	32,12	4444		6647		8,081				3,40
	$PbZn_5$	8,758	8,397	40,88	59,12	6511		6108		8,039				
	$PbZn_{10}$	7,970	7,910	24,31	75,69	7880		7352		9,088			0,004	4,40

Свинец, медь	Pb_5Cu	11,083	11,165	94,21	5,79	2 555		2 113		4,100			0,043	2,13
Олово, висмут	Sn_9Bi_{10}	8,980	8,685	33,23	66,77	3 155		3 610		6,078			0,028	8,19
	Sn_3Bi_4	9,064	8,890	29,91	70,09	3 127		2 874		5,360			0,015	6,63
Олово, сурьма	Sn_4Sb	7,155	7,211	20,75	79,25	3 761		4 033		7,050				8,86
	Sn_8Sb_5	7,027	7,052	59,52	40,48	3 815		4 695		7,692			0,010	7,82
	Sn_3Sb_2	7,008	7,007	56,60	43,40	3 823		5 168		8,096				
Олово, цинк	Sn_2Zn	7,243	7,366	77,11	22,89	4 974	5336			8,023		0,2	0,246	5,78
	Sn_3Zn_2	7,234	7,255	74,31	25,69	5 113	5982			8,560		<0,2	0,252	5,00
	$SnZn$	7,201	7,143	63,40	36,60	5 653	6453			8,959		0,2	0,036	4,68
	Sn_3Zn_7	7,141	7,193	43,51	56,49	6 639		7 113		9,376		0,5 0,3 0,5	0,124	2,44
	$SnZn_3$	7,125	6,746	38,47	61,53	6 888		6 976		9,525		0,2	0,082	4,32
	$SnZn_5$	7,087	6,957	26,08	73,92	7 502	7314			9,665		0,4	0,023	7,52
Олово, платина	$Sn_{50}Pt$	7,724	7,578	96,77	3,23	4 090		5 309		7,890				4,75
Олово, медь	Sn_5Cu_6	7,931	8,332	61,07	38,93	6 868		6 113		8,074				
	$SnCu_2$	8,148	8,531	47,90	52,10	7 939		8 280		9,287				
Tamtam-металл [1])	$SnCu_7$	8,580	8,813	21,62	78,38	10 082		9 784		9,932				
То же, упроченный	то же		8,686	21,62	78,38			7 716		8,884				
Бронза	$SnCu_{22}$	8,806	8,738	7,87	92,13	11 192		8 115?		9,085?				
То же, упрочненная	то же		8,537	7,87	92,13			6 734?		8,372?				
Олово, железо	$Sn_{20}Fe$	7,300	7,266	97,78	2,22	4 052		4 881		7,726				
	$Sn_{20}Fe$	7,309	7,418	96,03	3,97	4 327	5001			7,740				2,40
Серебро, палладий [c])	Ag_2Pd_3	10,957	10,903	38,10	61,90	10 542		10 003		9,029	9,222	20,23	0,004	50,46
	Ag_5Cu [d]	10,225	10,121	90,00	10,00	8 290		8 913		8,846				44,05
Серебро, медь	$AgCu$	9,819	9,603	61,72	38,28	9 617		8 590		8,915	8,831	21,25	0,002	51,97
Золото, платина	Au_7Pt_2	19,122	19,650	77,87	22,13	10 231		9 844		6,848				7,12
Золото, железо	$Au_{19}Fe_2$	18,215	18,842	97,22	2,78	8 920		9 024		6,524			0,016	20,41
Цинк, медь	$Zn_{13}Cu_4$	7,495	7,301	76,80	23,20	10 149		7 678		9,667				4,10
	$ZnCu$	7,997	8,265	50,07	49,93	10 749		8 774		9,713				18,68
	Zn_3Cu_4	8,129	8,310	42,99	57,01	10 906		9 105		9,867				36,80
Чистая латунь коммерческая	$ZnCu_2$	8,313	8,606	33,20	66,80	11 123		10 163	8 543	10,244	9,392	15		60,22
Томпак	то же	8,311	8,655	33,35	66,65	11 120		11 218	9 277	10,732		16,20	0,140	32,5
Берлинская латунь	Zn_8Cu_{17}	8,329	8,427	32,35	67,65	11 142		9 823	9 394	10,177	9,890			
	Zn_2Cu_{11}	8,640	8,670	15,79	84,21	11 509	10 290		8 644	10,270	9,812	30—40	0,003	48,3

Таблица 57 *(продолжение)*

Компоненты сплава или название сплава	Химическая формула	Плотность: вычисленная	Плотность: измеренная	Опытно определенное процентное содержание компонентов			Модули упругости (кгс/мм²): вычисленные	Модули упругости (кгс/мм²): найденные в опытах с колебаниями: продольными	Модули упругости (кгс/мм²): найденные в опытах с колебаниями: поперечными	Модули упругости (кгс/мм²): найденные из квазистатических опытов с образцами, подвергнутыми осевой деформации	Отношение скорости звука в металле к скорости звука в воздухе из опытов на: колебания	Отношение скорости звука в металле к скорости звука в воздухе из опытов на: квазистатическое растяжение	Предел упругости	Максимальное удлинение (мм)	Прочность (кгс/мм²)
Металл типа similor [2])	$ZnCu_6$	8,663	8,636	14,96	85,04		11 538	9 778			10,031	9,431	40	0,001	51,9
Свинец, висмут, олово	$Pb_2Bi_3Sn_2$	9,870	9,795	35,80	46,92	17,28	2 653	2 626			4,881	4,881	<0,2	0,695	1,74
Свинец, сурьма, олово	$Pb_4Sb_2Sn_5$	8,977	9,196	49,36	15,05	35,59	2 873		2 735		5,141			0,032	7,80
	$PbSbSn_3$	8,433	8,317	32,06	17,82	50,12	3 202		3 232		5,876				5,62
Свинец, олово, цинк	$Pb_{14}Sn_4Zn_9$	10,109	10,212	73,63	11,96	14,41	3 037	2 486			4,651		<0,2	0,162	1,44
Олово, сурьма, медь	$Sn_4Sb_2Cu_3$	7,458	7,751	50,57	28,16	21,27	4 992		5 770		8,133				4,17
Цинк, медь, никель	$Zn_9Cu_{15}Ni_2$	8,256	8,403	33,96	57,24	8,80		9 617		9 261	10,032	9,896	20—30	0,001	
Никель-серебро [3]), используется в искусстве	$Zn_4Cu_{18}Ni_5$	8,525	8,541	18,24	60,54	21,22		10 227		10 788	10,315	11,594	19—24	0,001	61,88
очень пластичный packfong [4])	$Zn_5Cu_6Ni_3$	8,170	8,436	36,51	43,00	20,49		11 722		11 500	11,112	11,006	30—40	0,001	55,0
коммерческий packfong [4])	$Zn_2Cu_5Ni_3$	8,463	8,615	20,39	50,58	29,03			12 250	10 333	11,240	10,324	45	0,002	68,1

a) Мягкий припой b) Типографский металл c) Зубной материал d) Французское монетное серебро.

[1]) Бронза, кованная молотом, из которой в Китае изготовляют гонги и цимбалы, содержит 80% меди и 20% олова. — *Прим. ред. перев.*

[2]) Очень желтая латунь, используемая для изготовления дешевых ювелирных изделий. — *Прим. ред. перев.*

[3]) Нет соответствия между названием металла и химической формулой. — *Прим. ред. перев.*

[4]) Искаверканное слово «packtong», происходящее от названия сплава меди и никеля на одном из регнональных китайскнх диалектов, которое в английской транскрипции имеет вид «peh t'ung»; по-китайски peh — белый, t'ung — медь. — *Прим. ред. перев.*

Анализируя эти данные, Вертгейм отметил, что в общем случае при расположении атомов в виде последовательности по признаку значения межатомного расстояния обнаруживается возрастание значений модулей с уменьшением межатомного расстояния. Он наблюдал, что подобно описанной выше ситуации, характерной для чистых металлов, предел упругости и прочность не поддаются представлению при помощи обобщенной модели. В частности, он пришел к заключению, что ни предел упругости, ни максимальное удлинение, ни прочность не могут быть вычислены для бинарных сплавов *a priori*, исходя из известных соответствующих значений характеристик для каждого из двух компонентов и химического состава. С другой стороны, он обнаружил, что модуль E изменяется линейно с изменением процентного содержания компонентов. Конечные крайние точки определялись по экспериментально найденным значениям E для чистых металлов [1]). Указанная линейная зависимость для тех сплавов, для которых было испытано достаточное количество образцов с различным процентным содержанием компонентов, показана на рис. 3.27.

Вертгейм вычислил ожидаемые значения модулей, исходя из этой линейной зависимости (см. табл. 57), для сравнения их с экспериментальными данными. Если усреднить все 59 значений, для которых были выполнены такие вычисления, как для двух-, так и для трехкомпонентных сплавов, то получится число, отличающееся менее чем на 2% от значения, найденного подобным же усреднением всех соответствующих экспериментальных наблюдений. Все это разумеется не связано с рассмотрением фазовых диаграмм, изменений положения точек плавления и т. д.

Ознакомившись с этим первым сравнительным исследованием свойств 64 сплавов и 16 чистых металлов, многие из современников Вертгейма полагали, что его наблюдение линейной зависимости между упругостью и процентным содержанием компонентов сплавов имеет чрезвычайно важное значение для понимания строения твердых тел. В то время как для чистых металлов, как показал Вертгейм, модуль изменяется обратно пропорционально седьмой степени межатомного расстояния, аналогичной зависимости для сплавов обнаружено им не было.

В результате всех этих исследований Вертгейм создал фундаментальную базу почти для всех успешных теоретических и экспериментальных разработок в механике твердого тела в последующие 60 лет. Что касается вопроса о влиянии отжига на константы упругости, который поднял Кулон и на который дали неверный ответ Тредгольд и Лагерхельм и другие, то Вертгейм показал, что учет тщательно определенной предварительной термической обработки

---

[1]) Вернер Кёстер ста пятью годами позже осуществил интересное расширенное исследование этого вопроса, которое будет рассмотрено ниже (см. Köster and Rauscher [1948, 1]).

действительно может оказать влияние на большое изменение значения E. Он первым осознал необходимость точного установления термомеханической истории, малых различий в химическом составе, температуры окружающей среды и способа проведения экспери-

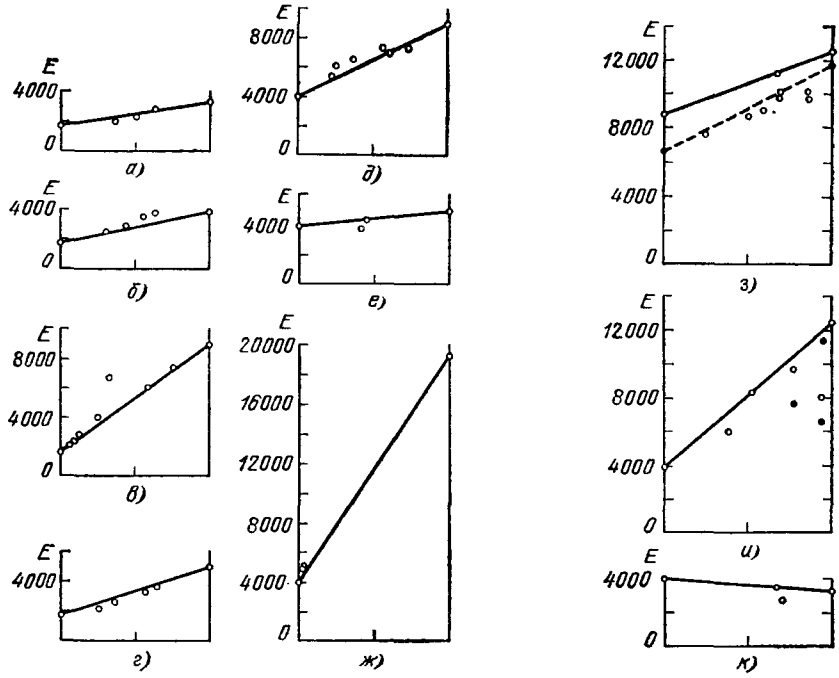


Рис. 3.27. Опыты Вертгейма (1843) по определению модуля E для указанных сплавов при различном процентном содержании образующих их компонентов. (Это были первые определения значений модулей упругости металлических сплавов.) В приводимых ниже указаниях на компоненты сплавов 100% компонента, упоминаемого первым, расположены в левом конце диаграммы, а 100% компонента, упоминаемого вторым — в правом конце диаграммы. *а*) Сплавы свинца и висмута; *б*) свинца и олова; *в*) свинца и цинка; *г*) свинца и сурьмы; *д*) олова и цинка; *е*) олова и сурьмы; *ж*) олова и железа; *з*) цинка и меди (штриховой линией обозначены данные для отожженных образцов) использовалась песчаная форма для отливки цинка); *и*) олова и меди (черными кружками обозначены данные для упрочненных образцов); *к*) олова и висмута; E — модуль упругости в кгс/мм².

мента для того, чтобы любая попытка сравнить эксперимент и теорию имела смысл, и это составило характерную черту его подхода к рассматриваемой ветви физики.

3.14. Мемуар Вертгейма 1844 г.: первое изучение зависимости значения модуля E от напряженности электрического и магнитного полей

Для того чтобы завершить свои исследования, Вертгейм в третьем разделе этого мемуара изучил влияние электрического тока и магнитного поля на модуль упругости и прочность металла. Образ-

цы, которые были защищены от действия воздушного потока, были подключены к источнику электрического тока. Он измерял удлинение при постоянной нагрузке перед подключением электрического тока, затем еще раз в процессе прохождения тока через образец и, наконец, после того как ток был отключен. Во всех случаях измерялась температура. Он производил наблюдение над каждым образцом при четырех-пяти различных значениях силы тока, которую измерял гальванометром. Для всех многочисленных исследованных чистых металлов Вертгейм обнаружил, что модуль упругости всегда уменьшался, причем интенсивность уменьшения возрастала с увеличением силы электрического тока. Он нагревал образцы до различных заданных значений температуры, зависящих от их электрического сопротивления и силы электрического тока, пропускаемого через образец, и измерял и то, и другое. Так как зависимость констант упругости от температуры в рассматриваемом диапазоне температур была ему уже известной, он имел возможность произвести коррекцию на температурный эффект. В таблице 58 приведены результаты опытов Вертгейма со всеми теми металлами, для которых им были получены температурные данные.

В дополнение к значению модуля E при комнатной температуре в отсутствие электрического тока, обозначенному E_1, Вертгейм приводит значение E_2 — модуля упругости, вычисленное по измеренному изменению температуры в отсутствие электрического тока, а также значение E_3 — модуля упругости при прохождении тока и измеренной температуре. Разность между E_2 и E_3 представляет, таким образом, эффект влияния электрического тока на величину модуля независимо от температуры. Вертгейм сравнил значения $(E_2—E_3)/E_2$, продемонстрировав, что для всех рассмотренных им металлов модуль зависит от силы тока. Он заметил далее, что степень уменьшения модуля зависит также в какой-то мере и от электрического сопротивления металла. Он также наблюдал, что прочность, или предельное сопротивление проволоки на разрыв, определенно уменьшалась при прохождении по ней тока, но был не в состоянии отделить возможное влияние теплового эффекта на это изменение.

Для проверки заключения о том, что модуль упругости является функцией силы электрического тока, Вертгейм осуществил эксперименты по вибрации. При этом обнаружилось, что отключение электрического тока сопровождается отчетливо заметным изменением частоты, соответствующим изменению модуля. Он проводил эти эксперименты с проволоками длиной примерно 3,5 м, закрепленными по концам и подключенными к источнику электрического тока. Продольные колебания создавались путем натирания образца посредине его длины; результаты определения изменений частот колебаний представлены в табл. 59. В табл. 60 приведены данные для золота и стали, характеризующие изменение разрушающей нагрузки при прохождении электрического тока.

Таблица 58

Вертгейм (1844)

	s	F	P	L_1	p	l_1	α	t	E_1	E_2	E_3	$\frac{E_2-E_3}{E_2}$	$\frac{R}{s}$
Серебро	0,154	8,03	13	707,57	3	706,38	1,685	14,8		6 539	5 936	0,0922	6 773
		6,69		707,36		706,19	1,657				6 036	0,0769	
		4,55		707,35		706,26	1,543	4,2			6 479	0,0092	
		3,96		707,34		706,26	1,529	4,5			6 539	0,0000	
		0,00		707,28		706,20	1,529	0,0	6 539	7 248			
Серебро	0,119	0,00	13	776,28	3	775,23	1,354	0,0	7 383				
		10,17		777,12		775,95	1,508	38,9			6 632	0,0850	8 765
		8,50		776,78		775,63	1,483	17,7			6 744	0,0738	
		7,26		776,54		775,48	1,367	9,4			7 316	—0,0047	
		0,00		776,44		775,35	1,406	0,0	7 113				
Медь	0,887	0,00	26	851,45	5,3	850,04	1,659	0,0	12 479				1 750
		10,30		851,51		850,11	1,647	5,4		12 423	12 570		
Медь	0,364	10,04	27,5	867,03	5,5	865,54	1,721	2,7		13 628	12 780	0,0622	4 264
		8,50		866,97		865,49	1,710	0,0		13 698	12 865	0,0608	
		8,03		866,98		865,52	1,687	1,9		13 677	13 042	0,0464	
		0,00		866,86		865,46	1,606	0,0	13 698				
		0,00		866,87		865,49							
Медь	0,241	13,78	21	812,82	5	811,35	1,565	15,7		11 225	10 222	0,0894	6 426
		9,79		812,45		811,29	1,430	13,8		11 255	11 190	0,0058	
		8,50		812,41		811,22	1,467	8,2		11 307	10 907	0,0354	
		7,54		812,25		811,12	1,393	2,4		11 361	11 485	0,0109	
		0,00		812,23		811,09	1,405	0,0	11 384				
Золото	0,0276	3,96	14	538,85	4	538,00	1,580	142,0		6 985	6 329	0,0939	63 260
		3,64		538,81		537,95	1,599	135,5		7 391	7 255	0,1537	
		2,45		538,71		537,96	1,394	137,9		7 383	7 173	0,0284	
		1,60		538,67		537,90	1,431	130,1		7 408	6 986	0,0570	
		0,00		538,56		537,87	1,280	0,0	7810				

Таблица 58 *(продолжение)*

	s	F	P	L_1	p	l_1	α	t	E_1	E_2	E_3	$\frac{E_2-E_3}{E_2}$	$\frac{R}{s}$
Латунь	0,143	13,78	30	712,48	10	710,64	2,589	179,5		9 193	7 724	0,1598	39 175
		10,30		712,33		710,61	2,420	181,8		9 155	8 263	0,0974	
		10,04		712,02		710,38	2,309	167,4		9 284	8 663	0,0669	
		8,03		711,04		709,48	2,199	102,3		9 861	9 096	0,0776	
		5,00		710,42		708,95	2,074	27,7		10 522	9 645	0,0834	
		3,40		710,10		708,68	2,004	9,2		10 686	9 981	0,0660	
		2,00		709,98		708,58	1,976	2,3		10 123	10 747	0,0581	
		0,00		709,81		708,54							
		0,00		709,79		708,45	1,857	0,0	10 767				
Железо	0,169	6,69	50	817,09	12	815,33	2,159	91,4		20 800	17 604	0,1537	52 006
		6,31		816,94		815,24	2,085	84,0		20 677	18 222	0,1187	
		4,70		816,54		814,88	2,037	47,9		20 107	18 654	0,0723	
		2,50		816,22		814,62	1,964	12,4		19 361	19 347	0,0007	
		0,00		816,00		814,40	1,965	0,0	19 342				
Железо	0,0216	2,05	60,5	783,31	14,3	781,31	2,560				18 048		
Шведское		1,95		790,92		789,03	2,395	137,6		23 024	19 287	0,1623	406 900
		1,90		790,81		788,91	2,408	124,3		22 798	19 183	0,1585	
		1,75		790,47		788,59	2,384	90,6		22 223	19 380	0,1279	
		1,25		789,97		788,14	2,322	43,9		21 426	19 897	0,0714	
		0,60		789,60		787,80	2,285	8,3		20 819	20 220	0,0288	
		0,00		789,45		787,71							
		0,00		789,49		787,71	2,234	0,0	20 677				
Сталь	0,1293	5,10		778,32		776,22	2,705	137,3		20 355	17 187	0,1556	67 973
		4,55		777,93		775,85	2,681	93,8		19 883	17 345	0,1277	
		3,85		777,52		775,57	2,514	65,4		19 577	18 494	0,0553	
		2,50		777,13		775,21	2,476	23,7		19 125	18 775	0,0183	
		0,00		776,92		775,01	2,464	0,0	18 868				

Таблица 58 *(продолжение)*

	s	F	P	L_1	p	l_1	α	t	E_1	E_2	E_3	$\frac{E_2-E_3}{E_2}$	$\frac{R}{s}$
Сталь	0,0502	4,32	60,0	752,96	20,0	751,06	2,530	183,2		21 480?	15 812		171 080
		3,96		752,87		751,10	2,356	196,2		21 641?	16 974		
		2,50		751,54		749,81	2,307	39,0		19 646	17 336	0,1176	
		1,50		751,13		749,53	2,135	12,4		19 352	18 738	0,0317	
		0,00		750,98		749,41							
		0,00		750,96		749,41	2,082	0,0	19 216				
Платина	0,329	9,60	30	669,32	15	668,51	1,212	105,1		15 178	12 380	0,1843	30 395
		6,97		668,79		668,06	1,093	42,4		16 336	13 728	0,1596	
		5,69		668,55		667,92	0,943	35,6		16 461	15 903	0,0339	
		5,00		668,47		667,88	0,883	35,6		16 461	16 980	—0,0315	
		3,96		668,31		667,74	0,854	15,2		16 839	17 572	—0,0435	
		0,00		668,26		667,68							
		0,00		668,24		667,65	0,876	0,0	17 120				
Платина	0,0940	6,31	26	748,36	12	747,49	1,164	177,0		13 854	12 028	0,1318	106 383
		5,00		748,01		747,15	1,51	126,8		14 781	12 163	0,1771	
		4,18		747,39		746,68	0,951	75,0		15 738	14 723	0,0645	
		3,40		746,99		746,38	0,817	42,5		16 339	17 113	—0,0474	
		2,30		746,86		746,25		22,8		16 702	17 127	—0,0255	
		0,00		746,71		746,10	0,818	0,0	17 124				

s — площадь поперечного сечения проволоки в мм²;
F — сила тока;
P — нагрузка/мм²;
L_1 и l_1 — расстояние между рисками при воздействии нагрузки и электрического тока;
p — нагрузка/мм², необходимая для натяжения проволоки;
α — коэффициент теплового расширения;
t — температура в °С при включенном токе;
R — электрическое сопротивление на единицу площади поперечного сечения образца.

Таблица 59

Вертгейм (1844)

	Диаметр (в мм)	Сила тока	Частота продольных колебаний
Медь	0,59	0,00	1058
		7,80	1041
Сталь	0,31	0,00	1358
		1,50	1326
		2,10	1313
Сталь	0,14	0,00	1403
		1,50	1391

Таблица 60

Вертгейм (1844)

	Площадь поперечного сечения проволоки (мм²)	Предел прочности при растяжении (кгс/мм²)		Сила тока
		при отсутствии тока	при наличии тока	
Золото	0,0276	12,2	7,6	3,64
Проволока из шведского	0,0216	114—118	110,0	1,20
железа	—	—	99,0	2,00
Железная проволока обычная	0,169	59,2	60,5	5,00
Сталь	0,0508	102,0	102,0	2,50
	—	—	99,5	4,18
Сталь	0,1293	89,1	80,6	4,55

Вертгейм считал существенно важным тот факт, что изменение модуля исчезало сразу же после отключения электрического тока. Такого внезапного изменения не было у намагниченного железа. В эксперименте с отожженным железом, в котором ток большой силы пропускался через образец непрерывно в течение шести часов, он не заметил ни малейшего остаточного удлинения.

Намотав покрытую хлопчатобумажной нитью медную проволоку диаметром несколько больше 1 мм вокруг двух стеклянных трубок 80 см длиной так, что получился двойной слой проволоки в 900 витков, Вертгейм получил магнитное поле. Его задачей было изучение влияния напряженности магнитного поля на константы упругости. Разумеется, такой эффект мог быть заметен только в железе и стали. Независимо от того, воздействовал северный или южный полюс магнитного поля, в мягком железе и стали можно было наблюдать небольшое падение значения модуля упругости. После снятия магнитного поля Вертгейм обнаружил, что значение модуля упругости не вернулось полностью к своему первоначальному уровню даже по

прошествии промежутка времени продолжительностью до двадцати четырех часов. Это изменение модуля в присутствии магнитного поля наступало не сразу в момент возникновения поля, а происходило постепенно, в течение некоторого промежутка времени. По этому поводу Вертгейм заключил: «Таким образом, представляется, что намагничивание воздействует на упругость не непосредственно, а ее изменение происходит в результате перегруппировки молекул» (Wertheim [1844, 1 (c)], стр. 623 (в немецком переводе 1848 г. стр. 114), см. также [1844, 2]).

3.15. Мемуары Вертгейма 1845—1846 гг. по упругости стекла, древесины и тканей человеческого тела

Новые эксперименты Вертгейма по влиянию электрического тока и магнитного поля на деформационные свойства металлов стимулировали многочисленных экспериментаторов как на континенте, так и в Англии в проведении различных динамических и квазистатических измерений, достигших кульминации в 1911 г. в исследовании вопроса Уокером (Walker [1907, 1], [1908, 1], [1911, 1]). Вертгейм же, продолжая свои исследования сопротивления твердых тел деформации, на протяжении следующих двух лет обратился к рассмотрению динамических и квазистатических свойств стекла и дерева, и в 1846 г. был первым в обстоятельном изучении механических свойств тканей человеческого тела.

В первой из этих работ, которая была выполнена совместно с Жаном Пьером Эженом Наполеоном Шевандье (Wertheim et Chevandier [1845, 2], [1847, 3] [1]), Вертгейм по своему обыкновению дает исторический обзор предшествовавших исследований. Он отметил, что Жан Даниэль Колладон и Жан Шарль Франсуа Штурм (Colladon et Sturm [1838, 1] [2]) нашли значение модуля упругости стержня из стекла неизвестного происхождения, равное 10 000 кгс/мм^2; что эксперименты Савара со стеклом дали отношение скорости звука в нем к скорости в воздухе, находящееся в пределах от 15,39 до 16,28, в то время как Хладни получил эту величину равной 16,6. Он мог бы добавить, что Юнгом получена высота модуля, по которой можно вычислить значение модуля E, равное 7390 кгс/мм^2. Далее он подчеркнул, что никто из перечисленных авторов не приводит данных о природе испытываемого стекла или деталей его изготовления (были ли стержни вытянуты или отлиты, были ли образцы отожжены и т. д.) и ни один из авторов не указывает точности, с которой проводился эксперимент. Поэтому, заключает Вертгейм, никаких имеющих какое-то значение выводов сделать из этих работ нельзя.

Для изучения влияния отжига на модуль E Вертгейм и Шевандье вытягивали стержни из оконного и зеркального стекол до длины от

[1]) Переведено на немецкий язык в 1848 г.
[2]) Представлено Академин в 1827 г.

10 до 12 м, из которых выбирались наиболее регулярные участки длиной от 1 до 2 м. В десяти неотожженных образцах из оконного стекла они определили скорость звука, отношение которой к скорости звука в воздухе варьировалось в пределах 14,75—17,19. Для шести аналогичных стержней из зеркального стекла были получены значения этого отношения от 14,04 до 17,41. Вертгейм и Шевандье при помощи, как они писали, «машины высокой точности, которая была в нашем распоряжении», изготовили серию совершенно правильных и одинаковых образцов квадратного поперечного сечения, которые потом были тщательно отожжены. В опытах с этими образцами они получили упомянутое отношение, которое теперь находилось в весьма близких границах: 16,48—16,76 для оконного стекла и 15,70—16,02 для зеркального. Таким образом, возникла возможность осуществить систематические исследования и получать воспроизводимые результаты для значений динамических и квазистатических модулей стекла. Вертгейм и Шевандье определили также плотность материала образцов до и после отжига, а также предел прочности. Они нашли средние коэффициенты упругости для зеркального стекла, обычного стекла, используемого для изготовления бокалов и хрусталя. При этом динамические модули определялись в опытах на продольные колебания, а квазистатические — в испытаниях на растяжение. Ими было изучено также влияние на модуль упругости малых металлических добавок, которые используются для производства цветного стекла. Эти результаты даны в табл. 61.

Вертгейм и Шевандье нашли, что результатом отжига является очень небольшое возрастание плотности и небольшое увеличение модуля E. Поскольку существовали неясности относительно зависимости вибрационных характеристик стекла от длины образцов, они отметили, что во всех тщательно проведенных экспериментах частота продольных колебаний была в точности обратно пропорциональна длине. Далее ими было обнаружено, что для любого конкретного вида стекла константы упругости, определенные по продольным колебаниям, неизменно выше, чем найденные в опытах на растяжение. То же самое наблюдалось в несколько меньшей степени у металлов и позже было обнаружено у древесины. В том, что этот эффект значителен для стекла, можно убедиться по данным Вертгейма и Шевандье, приведенным в табл. 62.

Вертгейм и Шевандье нашли, что деформируемость литого или вытянутого стекла не зависит от плотности, если в том и другом случаях материал был отожжен. Вместе с тем добавление свинца существенно снижает как модуль упругости, так и прочность, а добавка марганца, окрашивающего стекло в фиолетовый цвет, ведет к их увеличению. Добавка кобальта, меди и марганца в хрусталь не оказывает заметного влияния на его упругие свойства.

За только что описанной работой, представленной Академии 2 июня 1845 г., немедленно последовала другая, которую можно отнести к одной из наиболее исчерпывающих экспериментальных

Таблица 61

Вертгейм и Шевандье (1845)

	Длина стержня (м)	Площадь поперечного сечения (мм²)	Плотность		Частота колебаний	Отношение скорости звука в стекле к скорости звука в воздухе	Модуль упругости, найденный в опытах на колебания (кгс/мм²)	Сопротивление разрыву при растяжении (кгс/мм²)
			до закалки	после закалки				
Оконное стекло	1,668	78,31	2,517	2,523	1651,6	16,584	7810	1,847
	1,566	27,07			1777,7	16,759	7975	1,680
	1,000	50,00			2782,6	16,750	7967	—
Зеркальное стекло								
вытяжка	0,775	95,67	2,454	2,467	3422,5	15,967	7081	—
литое	2,991	165,07			882,8	15,894	7008	1,424
литое	2,495	123,00			1066,7	16,020	7120	1,327
литое	1,662	165,07			1590,0	15,908	7020	1,448
литое	1,325	165,07			1969,2	15,707	6844	—
Стекло для бокалов с натриевой основой								
обычное	2,261	123,00	2,447	2,448	1158,4	15,766	6848	0,831
обычное	2,437	122,95	2,455	2,455	1097,6	16,104	7165	0,935
высококачественное	1,408	79,83	2,430	2,435	1868,6	15,837	6873	1,026
высококачественное	1,327	85,54	2,432	2,437	1984,5	15,852	6892	1,110
Стекло для бокалов с калиевой основой								
обычное	1,481	93,72	2,453	2,459	1753,4	15,632	6763	0,774
обычное	1,422	96,61	2,453	2,460	1855,1	15,879	6980	0,983
обычное	1,762	90,08	2,452	2,454	1488,4	15,787	6883	1,261
высококачественное	1,001	96,61	2,453	2,460	2585,8	15,581	6720	—
Стекло для бокалов								
молочное	1,087	134,49	2,513	2,525	2285,7	14,956	6356	Слишком хрупко для испытания на растяжение
молочное	0,922	133,73	2,513	2,525	2694,7	14,956	6356	
фиолетовое	1,283	102,00	2,556	2,559	2031,8	15,692	7080	0,848
фиолетовое	1,072	—	2,556	2,561	2461,6	15,884	7275	—
Хрусталь								
белый	1,870	182,35	3,326	3,330	1084,8	12,211	5588	0,741
фиолетовый	1,383	176,70	3,241	3,250	1467,9	12,220	5462	0,652
голубой	2,135	204,06	3,372	3,374	934,3	12,008	5475	0,652
голубой	1,074	—	3,361	3,357	1839,1	11,890	5341	—
зеленый	1,284	199,92	3,311	3,315	1580,2	12,214	5565	0,617
зеленый	0,951	—	3,311	3,321	2105,3	12,052	5429	—

Таблица 62

Вертгейм и Шевандье (1845)

Вид стекла	Модуль упругости (кгс/мм²), определенный из опытов	
	на колебания	на квазистатическое растяжение
Зеркальное	6844	6183
Обычное для бокалов с натриевой основой	7165	6722
Высококачественное для бокалов	6892	6040
Фиолетовое для бокалов	7080	5000

программ в области механики твердого тела. В манускрипте объемом в 136 страниц [1]), содержащем 35 больших таблиц и 6 листов рисунков, опубликованном затем в виде брошюры в 135 страниц (Chevandier et Wertheim [1848, 1]) Вертгейм и Шевандье дали первое законченное исследование упругой анизотропии дерева (Wertheim et Chevandier [1846, 1] (резюме), см. также Wertheim [1847, 2], Chevandier et Wertheim [1848, 1]).

Программа началась с порубки 94 деревьев на западных склонах Вогезов, которые росли на вогезских песчаниках, цветных песчаниках и известняках-ракушечниках. Среди выбранных древесных пород были дуб, бук, пихта, сосна, граб, береза, акация, ильм (вяз), ясень, платан, клен, осина, тополь и ольха. Мемуар начинается с обзора работ 23 авторов XVIII и XIX веков, которые экспериментировали с древесиной, и заключения, что, несмотря на обширную литературу по этому вопросу, сопротивление древесины деформации, по-прежнему, остается неопределенным. Детали этой работы, которая была представлена даже в *Comptes Rendus abstract* (Wertheim et Chevandier [1846, 1]), слишком многочисленны, чтобы их можно было здесь рассмотреть. Вертгейм и Шевандье приступили к исследованию различия упругих свойств и прочности образцов, взятых из разных частей одного и того же дерева, при разных влажностных условиях в сравнении с характеристиками влажности дерева в целом. Они систематически изучили модули упругости и скорости звука, определенные по продольным и поперечным колебаниям, а также по квазистатическим испытаниям как на растяжение, так и на изгиб. Однако наибольший интерес представляет их детальное исследование анизотропии древесины [2]) на образцах, которые выре-

[1]) Объем первоначального манускрипта указывался во введении к докладу Академической Комиссии [1847, 2].

[2]) Это исследоваиие было высоко оценено Сен-Венаном; его комментарии к этой работе появились в Приложении к тому, содержащему лекции Навье (Navier [1864, 1]) которые Сен-Венан издал и снабдил примечаниями.

зались в радиальном и тангенциальном к годичным кольцам направлениях в плоскости поперечного сечения на различных уровнях по высоте ствола и при разных средних значениях радиусов. Они сравнивали эти результаты со значениями модулей, найденными для образцов, вырезанных в вертикальном вдоль волокон направлении. Результаты такого сравнения представлены в табл. 63 и 64.

Таблица 63

Вертгейм и Шевандье (1846)

Порода дерева	Плотность	Отношение скорости звука в древесине к скорости звука в воздухе	Модуль упругости [а] в направлении волокон (кгс/мм²)	Отношение модуля упругости, найденного по колебаниям, к полученному при растяжении в квазистатических испытаниях	Предел упругости (кгс/мм²)	Прочность на разрыв (кгс/мм²)
Акация	0,717	14,19	1261,9	1,193	3,188	7,93
Пихта	0,493	13,96	1113,2	1,056	2,153	4,18
Граб	0,756	11,80	1085,7	1,105	1,282	2,99
Береза	0,812	13,32	997,2	1,212	1,617	4,30
Бук	0,823	10,06	980,4	1,087	2,317	3,57
Дуб	0,808	—	977,8	—	—	6,49
Дуб	0,872	11,58	921,3	1,117	2,349	5,66
Сосна	0,559	10,00	564,1	1,086	1,633	2,48

[а] Средние результаты измерений в направлении волокон для одинаковых образцов, взятых из нескольких деревьев, приведенные к влажности 20%.

Среди 16 выводов, каждому из которых соответствует своя таблица данных, были следующие: модуль упругости у древесины, определенный по продольным колебаниям, как и у металлов и стекла, всегда оказывается больше, чем найденный из квазистатических опытов на растяжение; значение модуля упругости, определенное на маленьких образцах, в общем хорошо согласуется со значениями модулей, полученными на больших брусках, взятых из того же дерева; малые остаточные деформации всегда измеримы даже при сравнительно малой полной деформации; древесина обнаруживает заметную анизотропию; для получения воспроизводимых результатов необходимо определять содержание влаги (Вертгейм и Шевандье определяли влажность по лучинкам, отщеплявшимся от каждого образца, а также сравнивали результаты естественной и принудительной сушки); модули упругости и прочность уменьшаются в одинаковой мере с увеличением возраста дерева; различие в почвах в местах произрастания деревьев оказывает заметное влияние на упругие свойства древесины одного и того же вида; при условии учета содержания влаги механические свойства древесины не зави-

Таблица 64

Вертгейм и Шевандье (1846)
Измерения в радиальном и тангенциальном направлениях

Порода дерева	В радиальном направлении			В тангенциальном направлении		
	модуль упругости (кгс/мм²)	отношение скорости звука в древесине к скорости звука в воздухе	прочность на разрыв (кгс/мм²)	модуль упругости (кгс/мм²)	отношение скорости звука в древесине к скорости звука в воздухе	прочность на разрыв (кгс/мм²)
Граб	208,4	10,28	1,007	103,4	7,20	0,608
Осина	107,6	9,72	0,171	43,4	5,48	0,414
Ольха	98,3	8,25	0,329	59,4	6,28	0,175
Платан	134,9	9,02	0,522	80,5	6,85	0,610
Клен	157,1	9,26	0,716	72,7	6,23	0,371
Дуб	188,7	9,24	0,582	129,8	7,76	0,406
Береза	81,1	6,46	0,823	155,2	9,14	1,063
Бук	269,7	11,06	0,885	159,3	8,53	0,752
Ясень	111,3	8,39	0,218	102,0	7,60	0,408
Ильм	122,6	8,56	0,345	63,4	6,11	0,366
Тополь	73,3	8,44	0,146	38,9	6,32	0,214
Пихта	94,5	8,05	0,220	34,1	4,72	0,297
Сосна	97,7	8,53	0,256	28,6	4,78	0,196

сят от промежутка времени, прошедшего с момента порубки дерева; место, из которого взят образец, вдоль ствола или вдоль радиуса среза, оказывает заметное влияние на значения констант упругости и прочности, которые уменьшаются с высотой или удалением от оси ствола.

Последней работой в этом большом систематическом исследовании упругости и прочности, выполненном Вертгеймом, был мемуар (Wertheim [1847, 1]) по механическим свойствам основных тканей человеческого тела, представленный Французской Академии 28 декабря 1846 г. Эта работа, которую я описал в некоторых деталях в предыдущей главе (гл. II, раздел 2.14), привела к эмпирической зависимости между напряжениями и деформациями для органических тел, зависимости, которая позже стала применяться для описания свойств одного тела за другим. Неожиданное появление этого первого обширного труда по упругим свойствам человеческих тканей стимулировало многолетние экспериментальные исследования континентальных физиологов, некоторые из которых упоминались в гл. II.

Я не думаю, что будет преувеличением утверждать то, что эти шесть основных мемуаров Вертгейма, вышедших между 1842 и 1846 гг., превратили экспериментальную механику твердого тела из немногочисленного набора изолированных, плохо сформулированных и в основном невоспроизводимых фактов в экспериментальную науку. Построив это фундаментальное здание (ясное понимание

требований согласованной и последовательной программы экспериментов в механике твердого тела, правильный выбор переменных, в терминах которых реакция твердых тел на воздействие сил могла бы быть точно определена, обеспечена представимость и воспроизводимость ряда точно измеренных параметров (более 3000) в широком диапазоне хорошо определенных состояний материалов), Вертгейм приступил к решению своих главных задач, на которые он указывал в нескольких публикациях и в особенности в работе, в которой дан обзор его целей и намерений и которая была представлена в Венскую Академию [1]) в 1850 г. Он хотел проверить применимость уже известных тогда теорий без предварительного предположения о том, что они верны. В его время это означало установление соответствия между физическими наблюдениями и результатами быстро формирующейся линейной теории упругости, развивающей идеи в аспекте термодинамики твердого тела, а также современными ему гипотезами, связывающими атомистические и континуальные представления. Во всех остальных мемуарах на протяжении 14 лет после 1846 г., за исключением, пожалуй, его диссертации на степень доктора наук [2]), он последовательно рассматривал именно эти вопросы.

Хотя к моменту проведения Вертгеймом обсуждавшихся работ прошло уже 20 лет после вклада Коши и Пуассона в теорию, сделанного в конце 20-х гг. XIX века, теоретики и экспериментаторы одинаково принимали идею о том, что на основании рассмотрения центральных сил можно успешно объединить атомистическую структуру твердых тел и линейную континуальную теорию упругости. Эта атомистическая теория, описывающая свойства упругих тел в общем случае анизотропности, снижающая число упругих постоянных с 21 до 15, могла быть рассмотрена экспериментаторами середины XIX века только для частного случая — для изотропных материалов. Рассмотрение экспериментаторами анизотроп-

[1]) Это было во время его избрания в члены-корреспонденты Академии (Wertheim [1850, 1]).

[2]) В некрологе после смерти Вертгейма Ф. К. Поггендорф (Poggendorff [1863,1]) неверно указал 1848 год как год получения Вертгеймом докторской степени, дату, которую затем повторили некоторые более поздние авторы.

Содержание его докторской было опубликовано в «Анналах по химии и физике» (*Annales de Chimie et de Physique*, Wertheim [1854, 1], см. также [1852, 2]) в 1854 г. Это было первое количественное изучение фотоупругости, которое привело Вертгейма к открытию линейной зависимости между напряжениями и показателями двойного лучепреломления в твердых телах, известной теперь, как «закон Вертгейма». Кокер и Файлон в своей хорошо известной книге по фотоупругости (Cocer and Filon [1931, 1]) ссылаются на закон Вертгейма и подробно описывают некоторые из его экспериментов. Последующие авторы цитируют только работу Давида Брюстера (Brewster [1816, 1]), наблюдавшего явление в 1816 г., и теоретическую работу Франца Е. Неймана 40-х гг. XIX века. Наблюдения Брюстера были явно недостаточны; они только указали на существование явления. До первого исследования Вертгейма в 1852 г. были проведены некоторыми другими исследователями лишь несколько неудачных экспериментов на изгиб. Отчасти успех Вертгейма был следствием того, что для решения проблемы он воспользовался опытами на простое растяжение и сжатие.

ных твердых тел в терминах, известных ныне как «соотношения Коши», началось в 80-х гг. прошлого века после бесплодных попыток в предыдущие десятилетия. В соответствии с этой теорией для любого изотропного тела коэффициент Пуассона должен был быть равен 1/4, так что в линейной теории упругости изотропных тел для экспериментального определения оставалась только одна независимая константа.

3.16. Первые эксперименты Вертгейма по определению коэффициента Пуассона, доказавшие неприменимость атомистической теории Пуассона — Коши для описания напряженно-деформированного состояния кристаллических тел (1848)

В мемуаре 1848 г. Вертгейм (Wertheim [1848, 1]) первым поставил под вопрос одноконстантную теорию. Он начал с замечания о том, что Каньяр де Латур (Cagniard de Latour [1828, 1]) в 1828 г. осуществил единственное экспериментальное измерение, подтверждающее равенство коэффициента Пуассона фиксированному значению 1/4. Симон Денис Пуассон (Poisson [1827, 1])[1]) тотчас сослался на это измерение как на указание физической применимости своей теории. В то время обычный путь проверки соотношений Коши заключался в требовании, чтобы относительное изменение объема растянутого стержня составляло половину его продольной деформации. Только с 1879 г., с появлением зеркального тензометра Баушингера, стало возможным прямое измерение поперечного сужения или расширения стержня, подверженного малому продольному растяжению или сжатию.

Каньяр де Латур растягивал латунную проволоку длиной 2 м до деформации $\varepsilon=0{,}0015$ в наполненной водой стеклянной трубке и измерял уровень воды до и после деформации. В обоих случаях он вынимал фиксированный небольшой участок проволоки из воды и отмечал разницу в ее уровнях. Каньяр де Латур утверждал, что действительно относительное изменение объема составляет 1/2 от продольной деформации. Вертгейм критически и правильно расценил это заключение, указав на ошибку, которая была неизбежна в силу относительно большого диаметра трубки и удаления части воды при извлечении из нее образца и того факта, что при $\varepsilon=0{,}0015$ латунная проволока должна иметь заметную остаточную деформа-

[1]) В этой заметке Пуассон привел немногочисленные вычисления с целью доказать, что недавно поставленный эксперимент Каньяра де Латура с латунной проволокой находился в соответствии с его теорией. Он подсчитал, что́ должна предсказать теория, если бы эксперимент был распространен на пластины или мембраны постоянной толщины, хотя и признавал те трудности, которые могут возникнуть при осуществлении таких экспериментов. Насколько мне известно, ни один экспериментатор не воспользовался этими предложениями Пуассона 1827 г.

цию. Он справедливо отклонил этот эксперимент как проверку теории, которая предназначалась только для малых линейных, идеально упругих деформаций.

Анри Виктор Рено (Regnault [1842, 1], [1847, 1]), изучая поведение резервуаров в своих исследованиях сжимаемости воды, отметил, что его результаты, по-видимому, не согласуются с теорией Пуассона — Коши. Он предложил Вертгейму более детально рассмотреть эту проблему. Первый эксперимент Вертгейма в связи с этим был проведен с резиновым стержием квадратного поперечного сечения, достаточно большого для того, чтобы измерения можно было осуществить с помощью штангенциркуля (Wertheim [1848, 1]). Его деформации достигали 200%, т. е. значения, при котором, как указывал позже Джеймс Клерк Максвелл, он не мог ожидать применимости элементарной теории упругости. Отметив, что остаточная деформация была минимальной, особенно в области малых деформаций, Вертгейм сравнил свои одновременно измеренные значения продольных удлинений и поперечных сужений со значениями коэффициента Пуассона $\nu=1/4$, $\nu=1/3$ и $\nu=1/2$, обнаружив при этом, как видно из рис. 3.28 (на котором изображен график, построенный по его данным), что в области малых деформаций данные, несомненно, не позволяют получить значение 1/4, предсказанное для изотропных тел.

Я вычислил отношение $\varepsilon_r/\varepsilon$, предполагая несжимаемость. Из этих вычислений, результаты которых графически показаны на рис. 3.28 сплошной линией, можно увидеть, что измерения были выполнены Вертгеймом достаточно тщательно, чтобы выявить те различия, которые он искал. Несмотря на то, что Вертгейм указал значение коэффициента Пуассона и для больших деформаций, он прежде всего интересовался результатами в начальной области, показанной на рис. 3.29, которые, по крайней мере для этого материала, несомненно, подтверждали справедливость его возражений.

Этим экспериментом, к которому, по неоднократному утверждению Вертгейма, он относился просто как к введению в исследование, проведенное позднее, было положено начало значительной дискуссии в последующие годы после того, как, выражаясь образно, было потревожено осиное гнездо, тем, что показывалась для всех известных тел несовместимость линейной континуальной теории со всеми признанной и привлекательной атомистической теорией Пуассона и Коши [1]).

Основательность экспериментального подхода Вертгейма к этому вопросу проявилась в том, что он рассмотрел его с семи различ-

[1]) Пуассон (1781—1840) умер еще до экспериментов Вертгейма, вызвавших полемику, а для Коши (1789—1857) атомистическая теория была маловажной. Пожалуй, ни в одной другой области теоретики и экспериментаторы так не расходятся, как в оценке важности числовых значений констант. По эстетическим соображениям природа явления и ее объяснение не обязательно должны находиться в соответствии [1].

ных точек зрения, включая упомянутое предварительное непосредственное измерение. Он использовал капиллярные трубки для измерения изменения объема полых труб при растяжении; он повторил исследования, которые проводил Рено, с помощью сферического пьезометра; он сравнил частоты продольных и крутильных колебаний

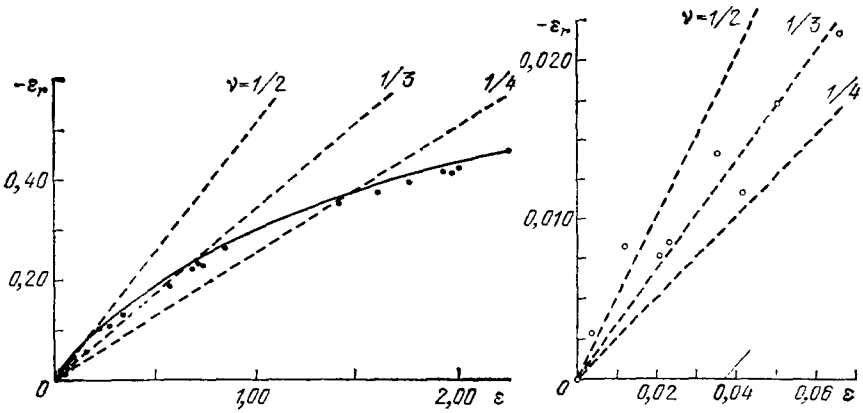


Рис. 3.28. Измерения Вертгеймом (1848) поперечных и продольных деформаций (кружки), обработанные результаты которых сопоставляются с тремя значениями коэффициента Пуассона. Образцом для испытания служила резиновая призма. Я добавил теоретическую кривую для несжимаемого материала (сплошная линия). ε — относительная продольная деформация, ε_r — относительная поперечная деформация, $\nu=-\varepsilon_r/\varepsilon$.

Рис. 3.29. Начальный участок экспериментальных графиков Вертгейма (1848), показанных на рис. 3.28, для зависимости между продольной и поперечной деформациями резиновой призмы; основываясь на этих результатах Вертгейм пришел к выводу, что коэффициент Пуассона для этого материала больше чем 1/4. ε — относительная продольная деформация, ε_r — относительная поперечная деформация, $\nu=-\varepsilon_r/\varepsilon$.

цилиндрических стержней; он сопоставил измеренные скорости звука в воде, находящейся в большом резервуаре и заключенной в цилиндрических трубах, чтобы установить аналогию для сравнения скорости звука в неограниченном теле и в цилиндрических стержнях; он исследовал расстояния между узловыми линиями в колеблющихся круглых пластинах и, наконец, он осуществил теперь, может быть, более сомнительное определение «глубокого тона» поперечных колебаний, сопровождающих продольные колебания стержней [1]). Во всех случаях он обнаружил, что коэффициент Пуас-

[1]) Хотя Вертгейм имел далеко идущие планы, собираясь измерить волновую скорость вынужденных колебаний земной коры, измерить скорость дилатационных и сдвиговых волн в телах, не сталкиваясь с непреодолимыми трудностями на границе, в 1847 г. не представлялось возможным. Непротиворечащим истине было предположение Вертгейма о том, что в вибрирующем стержне скорости волн, состоящих из дилатационного и сдвигового компонентов, имеют меньшие значения амплитуд, чем в неограниченном твердом теле, но отношение значений указанных скоростей в обоих сравниваемых случаях одинаково. Как мы увидим, даже Коши согласился с этой концепцией в своей рецензии на мемуар Вертгейма, посвященный описанию и обсуждению рассматриваемого здесь эксперимента.

сона имеет большее значение чем 1/4, предписанное одноконстантиой теорией Пуассона и Коши. Поскольку для всех твердых тел, малую деформацию которых он изучал, он получил значения, равные примерно 1/3, он предложил модифицировать молекулярную теорию каким-либо образом, чтобы привести ее в соответствие с тем, что он считал экспериментальными фактами для изотропных тел [1]).

Эксперименты с полыми цилиндрами проводились на трех латунных и пяти хрустальных образцах. Латунные образцы были примерно 1 м в длину с внутренним диаметром 5 мм и тщательно измеренной толщиной стенок, равной 1, 2 и 3 миллиметрам. Пять образцов из хрустального стекла имели различные длины и диаметры. Детали эксперимента содержатся в мемуаре (Wertheim [1848, 1]), представленном Академии в феврале 1848 г. Использование капиллярных трубок для измерения объема привело Вертгейма, с характерной для него обстоятельностью, к самостоятельному углубленному изучению явления капиллярности. Результаты этих исследований содержались в большом мемуаре 1857 г., опубликованном несколькими годами позже (Wertheim [1861, 2]). Изменение уровня воды в этих опытах определялось с помощью катетометра.

Измерение удлинений латунных и стеклянных образцов производилось между двумя фиксированными на них точками с использованием двух подзорных труб, которые приводились в движение микрометрическими винтами с головками, градуированными делениями 0,001 мм. Разрешающая способиость аппаратуры Вертгейма при измерении деформаций в этих экспериментах была 10^{-6}, т. е. на порядок величины больше, чем в его предыдущих опытах. Основные

---

[1]) Во многих комментариях на протяжении следующей половины века, особеино в комментариях Пирсона в 1886 и 1893 гг. и Верде (Verdet) — современника Вертгейма, Вертгейм постоянно подвергался критике за утверждеиие о том, что величина $\nu = 1/3$ относится к фундаментальным свойствам всех изотропных тел. Однако совершенио очевидно, что Вертгейм рассматривал это лишь как весьма вероятную возможность; и в своем мемуаре 1848 г., посвященном этому вопросу, и в последнем — 1860 г.— он подчеркивал, что речь идет только о тех материалах, с которыми он экспериментировал, и что для них величина ν равна не 1/4, а примерно 1/3. Так, в 1860 г., возражая Верде, Вертгейм [1860, 1] писал (я взял эту цитату из англнйского перевода, появившегося в «Философском журнале» (*Philosophical Magazine* за 1861 г., стр. 449 (см. примечание к работе Wertheim [1860, 1])):

«Господа Ламе и Максвелл допускали, что определеиный выше коэффициент или, что то же самое, отношение между объемной и линейной сжимаемостями, может отличаться для разных материалов. Только эксперимент может определить, так ли это на самом деле, как я непременио отмечал и в своем первоначальном мемуаре, и в некоторых из опубликованных мною позднее. Господин Верде, таким образом, ошибается, утверждая, как это он сделал в выдержке из мемуара, который мы обсудим позже и автором которого является господин Кирхгоф, то, что я «пытался показать с помощью многочисленных экспериментов,что этот коэффициент имеет для всех тел одинаковое значение, равное 1/3». Напротив, настаивая на точности этой величины для тех материалов, которые являлись объектами моих исследований, я исключал те, которые еще не подвергались эксперименту».

проблемы, описанные автором, были связаны с изменением температуры; прибор, представляющий собой герметически закрытый сосуд, в котором из воды удаляется воздух, становился «истинным термометром». Мемуар 1848 г. содержит большое количество таблиц, очень детально описывающих удлинение и изменение объема каждой трубки при многочисленных значениях осевой нагрузки. Данные, содержащиеся в резюме, включающие значения модулей, полученные по измеренному удлинению при осевом напряжении, равном 1 кгс/мм², приведены в табл. 65, а изменения внутреннего объема при указанных значениях удлинений приведены в табл. 66.

Если коэффициент Пуассона $\nu=1/4$, то вычисленное изменение объема при инфинитезимальной деформации должно быть равно $\Delta V=\frac{1}{2}(\Delta L/L)V$; если же $\nu=\frac{1}{3}$, то $\Delta V=\frac{1}{3}(\Delta L/L)V$, где $V=LS$, а S — первоначальная площадь поперечного сечения трубы. По

Таблица 65

Вертгейм (1848)

Материал	Номер трубки	$\Delta L/L$	E (кгс/мм²)	Материал	Номер трубки	$\Delta L/L$	E (кгс/мм²)
Латунь	I	0,0000939	10645,2	Хрусталь	I	0,0002596	3852,5
	II	0,0001015	9855,5		II	0,0002324	4302,6
	III	0,0001035	9664,9		III	0,0002873	3481,1
					IV	0,0002258	4429,0
					V	0,0002284	4379,1

Таблица 66

Вертгейм (1848)
Удлинение и увеличение объема

Номер трубки	S (мм²)	s (мм²)	ΔL (мм)	w (мм)	$\Delta L\cdot S$	$\frac{1}{2}\Delta L\cdot S$	ws	$\frac{1}{3}\Delta L\cdot S$
Материал: латунь								
I	19,182	0,14248	0,08450	3,6508	1,62095	0,81047	0,52017	0,54032
II	19,292	0,14413	0,09109	3,7718	1,75733	0,87866	0,54363	0,58578
III	19,113	0,18358	0,09308	3,0561	1,77898	0,88949	0,56104	0,59299
Материал: хрусталь								
I	48,978	0,18358	0,21908	21,033	10,7301	5,3650	3,8613	3,5767
III	32,710	0,14248	0,24848	16,997	8,1279	4,0639	2,4217	2,7093
IV	15,668	0,14248	0,19508	8,051	3,0565	1,5282	1,1472	1,0188
V	12,032	0,14248	0,19844	5,465	2,3877	1,1938	0,7786	0,7959

сравнительным данным, приведенным в табл. 66 для различных значений толщины стенок латунных трубок, а также длин и диаметров стеклянных, изменение объема, измеренного с помощью капиллярных трубок (s — площадь поперечного сечения, а w — изменение высоты столба воды), во всех случаях существенно отличалось от значения, ожидаемого на основании теории Пуассона — Коши для изотропных тел. Среднее изменение объема в семи экспериментах было 1,40481. Если $\nu=1/3$, то ожидаемое изменение объема должно быть 1,40283, в то время как величина $\nu=1/4$ давала совсем другое значение, равное 2,07593. Как Вертгейм отметил, модули латунных трубок уменьшались с увеличением толщины стенок. Трубки с более тонкими стенками были пропущены через волочильное устройство большее число раз. Сравнивая эти результаты со своими опытами с проволоками, Вертгейм показал, что часть этого различия была следствием изменения плотности. Вариации в его значениях модулей для стекла, однако, озадачивали еще больше, поскольку Вертгейм получил значения динамического модуля, найденные по продольным колебаниям (показаны в табл. 67), которые оказались не только бо́льшими, но и более между собой согласованными.

Таблица 67

Вертгейм (1848)

Номер трубки (хрустальное стекло)	D	L_1	n_1	v_1	E (кгс/мм²)
I	3,202	0,878	2306,3	12,190	5354,0
II	3,206	0,689	3011,8	12,491	5629,7
III	3,202	0,912	2245,5	12,328	5476,7
IV	3,198	0,908	2281,6	12,471	5597,3
V	3,195	0,874	2348,6	12,356	5489,8

Согласованность значений модулей, приведенных в табл. 67 для полых хрустальных труб со значениями модулей для сплошных стержней с квадратным поперечным сечением, данными выше в табл. 61, позволила Вертгейму прийти к заключению, что материал, с которым он экспериментировал, изотропен.

В том же мемуаре Вертгейм опубликовал спецификацию своих образцов достаточно подробную для того, чтобы его данные могли быть критически оценены и в 1972 г. с тем же успехом, как в 1848 г. Эта спецификация включала размеры его капиллярных трубок в нескольких местах, калибровку объема и результаты достаточно точных измерений удлинений.

Значения одновременно определенных модулей и сравнение данных, полученных на образцах, которые Вертгейм выбирал при

больших различиях их размеров, должны были убедить серьезных современных ученых в том, что для стекла и латуни Вертгейм ясно продемонстрировал обоснованность подозрения Рено, т. е. что молекулярная теория Пуассона — Коши, согласно которой $\lambda=\mu$, $\nu=1/4$, неприменима [1]).

---

[1]) Авторы XX века обычно приписывают Фохту экспериментальное доказательство того факта, что соотношения Коши не описывают поведения кристаллических тел. В действительности же исследования Фохтом монокристаллов, проведенные через много лет после Вертгейма, просто подтвердили первоначальное открытие. Эти авторы, сами того ие подозревая, находятся в плену предубеждения, создаиного в конце XIX и начале XX веков твердолобыми приверженцами привлекательности атомистической теории Пуассона — Коши, которые вынуждены были уступить экспериментальным результатам лишь тогда, когда были сокрушены их различающимися значениями. Эту ситуацию, пожалуй, наиболее точно выразил Пьер Мари Дюгем в 1903 г. незадолго до окончания дискуссии по поводу одноконстантной теории. В своем труде «Эволюция механики» *(L'Évolution de la Mécanique)* он писал:

«Исследование изотропных тел привело Пуассона к замечательно простому заключению: если призма, сделанная из такого материала, подвергается растяжению, отношение поперечного сужения к продольному удлииеиию всегда одинаково и равно 1/4, более того, в каждом изотропном теле отношеиие коэффициента объемного расширеиия к коэффициенту продольного упругого удлинения равно 2/3. Подтверждает ли эксперимент это заключение? Корню и Кирхгоф нашли его удовлетворительным в некоторых частных случаях, одиако по результатам Вертгейма это не так для металлов. Следовательно, твердое тело, даже изотропное (см. É. Mathieu: Théorie de l'élasticité des corps solides, t. I, p. 6 et 39, Paris, 1890) нельзя рассматривать как систему молекул, взаимное притяжение или отталкивание которых является функцией расстояиия между ними... без воздействия иа них некоторых реакций связей, подобных тем, которые рассматриваются в аналитической механике.

Приверженцы теории Пуассона, действительно, могли всегда оправдаться, выступая с аппеляцией, пытающейся опровергнуть эксперимент, путем утверждения, что те тела, чьи свойства не соответствуют уравнениям, просто не являются изотропными, а являются поликристаллическими с хаотическим расположением кристаллоидов; таким защитникам всегда удавалось использовать эту лазейку, хотя оии могли быть опровергиуты посредством неопровержимого аргумента.

Все, что теория Пуассона утверждает для изотропиых упругих тел, должно на основе правильной логики быть справедливым и для жидкостей. Поэтому, если для действительно изотропных тел коэффициеит объемного расширения, будучи умноженным на 3/2, дает коэффициеит упругости при растяжеиии, то это же соотиошение должно оставаться верным и для жидкости. Однако этого не может быть, ибо в жидкости объемиый модуль отличен от нуля, в то время как модуль при растяжении равен нулю.

Поэтому невозможно поступить с принципами, на которых, по мнеиию Пуассона, должна базироваться физическая механика, иначе, как сдать их в архив либо избавиться от них. Ведь даже сам Пуассон оказался в положении безнадежной защиты. Чтобы убедиться в этом, достаточно прочесть его «Вводные замечания» *(Notions préliminaires)*, с которых он начинает свой «Мемуар по равновесию жидкостей» *(Mémoire sur l'équilibre des fluides)*. Теперь он не только отказался от рассмотрения элементов тела, как безразмерных точек, не только наделяет их формой [particules figurées], но даже вводит под названием «действие второго порядка» *(secondary action)* силы, зависящие от формы молекул и прнпятствующие их движению или облегчающие его, иа долю которых выпадает та же роль, которую в аналитнческой механике играют реакции связей.

Когда, чтобы защитить себя, теория прибегает к уловкам и крючкотворству,

В экспериментах Рено с пьезометром, которые по его предложению повторил Вертгейм, но с упором на учет сжимаемости материала самого контейнера, а не находящейся в нем жидкости, использовалась полая сфера, к которой было приложено внутреннее и внешнее давление. Если значения внутреннего и внешнего давления были одинаковы, то в оболочке должно возникнуть гидростатическое сжатие, как это имело бы место в сплошной сфере под действием равномерно распределенного нормального внешнего давления. Когда прикладывалось известное внутреннее давление, можно было измерить при помощи капилляров вызванное им изменение объема, ограниченного наружной поверхностью. При известном внешнем давлении таким же образом измерялось изменение внутреннего объема. Комбинируя результаты для указанных режимов можно было выполнить грубую оценку сжимаемости сферического тела, исходя из линейной теории упругости. Перси Уиллиамс Бриджмен (Bridgman [1949, 1]) в историческом введении к своей книге «Физика высоких давлений» *(Physics of High Pressure)* в 1949 г. подчеркивал, что метод определения сжимаемости с помощью пьезометров имеет ограничения в применении. Это становится совершенно очевидным после ознакомления с результатами Рено или Вертгейма.

Вычисления Вертгейма, выполненные с целью определения значения величины ν для латуни и стекла при помощи сферического пьезометра, содержали ошибку. Значение модуля упругости E было слишком велико для теории Пуассона — Коши, а определенное значение ν заметно превышало 1/3. Для цилиндрических стеклянных пьезометров с полусферическими основаниями вычисления были правильными: корреляция с $\nu=1/3$ была несколько более убедительной. Так как при $\nu=1/3$ объемный модуль равен модулю E, а при $\nu=1/4$ составляет только $^2/_3\,E$; разница не является пренебрежимо малой. Несмотря на количественные недостатки этих данных (Wertheim [1848, 1]), они давали дополнительное, независимое свидетельство тому, что атомистическая теория Пуассона — Коши неприменима к стеклу и латуни. А демонстрация этого факта, выполненная на основании очень различающихся экспериментов, что теория, претендующая на общность для твердых тел, не описывает свойств двух таких несходных материалов, с очевидностью сужала до частных случаев ее любую возможную физическую основу.

Со своей пытливой, но понятной настойчивостью в этом вопросе, Вертгейм подошел к проблеме с совершенно другой точки зрения в заметке по кручению в 1848 г. (Wertheim [1848, 3], [1849, 1]).

ей бесполезно следовать, она становится невозможной для восприятия, да и вряд ли стоит стараться воспринять ее, ибо для каждого беспристрастного ума она становится несостоявшейся доктриной. Такова механическая физика». [Lorsqu'une théorie, pour se défendre, multiplie ainsi les ruses et les chicanes, il est inutile de la poursuivre, car elle devient insaisissable; mais il serait oiseux de la saisir, car, pour tout esprit juste, c'est une doctrine vaincue. Telle est la Mécanique physique.] Duhem [1903, 1]; стр. 86—88.

Отношение частот продольных и крутильных колебаний стержней должно быть равно корню квадратному из отношения модуля E к модулю сдвига μ. Таким образом, мы имеем величину $n/n' = \sqrt{2(1+\nu)}$, которая при $\nu=1/4$ равна 1,5811, а при $\nu=1/3$ равна 1,6330. Исследуя продольные колебания двухметровых стержней из литой стали, железа и латуни, Вертгейм получил значения, указанные в табл. 68.

Таблица 68

Вертгейм (1849)

	Длина $2l$ (м)	n Частота продольных колебаний	n' Частота крутильных колебаний	n/n'	Среднее
Литая сталь	2,0	2585,8	1580,2	1,6364	1,6309
Железо	2,06	2560,0	1565,8	1,6350	
Латунь	2,0	1747,4	1077,9	1,6212	

Производя и тот, и другой эксперимент с одними и теми же образцами, Вертгейм свел к минимуму ошибку, которая возникает при рассмотрении отношений больших чисел[2], таких, как E и μ, полученных из квазистатических испытаний разных образцов. В своей заметке по кручению он дал обзор результатов Кулона (Coulomb [1784, 1]) по кручению железных и латунных стержней, данных Дюло (Duleau [1813, 1], [1820, 1]) по железным стержням, Савара (Savart [1829, 1]) по стержням из чугуна, меди и латуни и данных Джулио (Giulio [1842, 1]) по железу. Вертгейм показал, что, предположив $\nu=1/3$, можно вычислить значения E, сравнимые с теми, которые получены непосредственно в опытах по осевому растяжению. Он подчеркнул, что несколькими годами ранее Савар, определяя для латуни отношение частот n/n', получил значение $n/n'=1{,}6668$. Этому отношению соответствует значение ν, которое не только больше 1/4 и ближе к 1/3, но фактически равно 0,385. Последнее значение, одно из тех, что приняты в наши дни, превышает $\nu=1/3$ больше чем на две трети разности между 1/3 и 1/4. Значение $\nu=0{,}385$, очевидно, слишком велико, чтобы его можно было объяснить разбросом данных около величины $\nu=1/3$. Интересно отметить, что когда Вертгейм в своем последнем мемуаре (Wertheim [1860, 1]) 1860 г. вновь вернулся к рассмотрению этого вопроса, он попытался отклонить значение $\nu=0{,}387$, полученное Густавом Робертом Кирхгофом (Kirchhoff [1859, 1]) прямым измерением в 1859 г., и он отметил важность экспериментального доказательства того, что по крайней мере для латуни величина ν может отличаться от 1/3.

3.17. Успех Вертгейма в первом определении частоты стоячих волн в столбах жидкости (1848)

Следующие исследования Вертгейма, относящиеся к вопросу о том, имеет ли атомистическая теория Пуассона — Коши какого-либо физического двойника, привели к открытию в акустике жидкости, которого одного, как выразил уверенность Верде (Verdet [1861, 1]) в своей заметке для «Института» *(L'Institut)* в 1861 г. о научной деятельности «покойного Вертгейма», было бы достаточно для того, чтобы он занял прочное место в физике. Вертгейм описал свой экспериментальный успех с решением этой проблемы в докладе, прочитанном Французской Академии в 1847 г., и подробном мемуаре, вышедшем годом позже.

В саду Французского колледжа (Collège de France), используя сжатый воздух и водяные резервуары из лаборатории Рено, Вертгейм сумел добиться контроля над струей жидкости так, чтобы создать стационарные колебания в цилиндрических жидкостных столбах (Wertheim [1842, 2])[1]).

С помощью своего сонометра он сравнил отчетливо воспринимаемые частоты основного тона и некоторых обертонов. Затем при пяти различных значениях температуры окружающей среды он произвел первые измерения скорости звука в водяных столбах. Он также определил скорость звука в цилиндрических столбах одиннадцати других жидкостей от соленой воды до спирта и эфира. Эти результаты вместе со значениями скорости, соответствующими распространению звука в свободном поле, представлены в табл. 69.

В полученных результатах наиболее важным для Вертгейма было то, что отношение скорости волн в воде в свободном поле[1] к скорости, найденной им в его столбе жидкости, равнялось $\sqrt{3/2}$. Для сравнения он воспользовался данными Колладона и Штурма (Colladon et Sturm [1838, 1])[2]), которые определяли скорость звука в воде на Женевском озере. Ударяя под водой по колоколу, они определяли продолжительность распространения звука как в спокойной, так и волнующейся[3]) воде от источника до разных точек. По их заключению скорость звука в воде при температуре 8,1°C равнялась 1435 м/с. Измерения Вертгейма скорости звука в водяном столбе дали величину 1173,4 м/с. Умножая ее на $\sqrt{3/2}$, он получил для сравнения с измерением Колладона и Штурма значение 1437,1 м/с. Это было почти полное совпадение. При сравнении предсказываемой

[1]) Вертгейм отмечал, что водяные органы существовали много столетий назад.

[2]) Этот мемуар был представлен Академии 11 июня 1827 г.

[3]) Описание чуть не случившегося несчастья с пловцом под водой и человеком в лодке во время сильного шторма характеризует самоотверженность физиков во имя науки. Верде, позднее в Париже коллега Вертгейма и автор уже упомянутой его научной биографии, написанной после его смерти в 1861 г., был гребцом в лодке во время этого инцидента. См. Colladon et Sturm [1838, 1], стр. 343.

Таблица 69

Вертгейм (1848)

Наименование жидкости	Температура (°C)	Плотность	Скорость звука		Сжимаемость
			в столбе (м/с)	в неограниченной среде (м/с)	
Вода из Сены	15,0	0,9996	1173,4	1437,1	0,0000491
то же	30,0	0,9963	1250,9	1528,5	0,0000433
то же	40,0	0,9931	1324,8	1622,5	0,0000388
то же	50,0	0,9893	1349,0	1652,2	0,0000375
то же	60,0	0,9841	1408,2	1724,7	0,0000346
Морская вода искусственная	20,0	1,0264	1187,0	1453,8	0,0000467
Раствор хлористого натрия	18,0	1,1920	1275,0	1561,6	0,0000349
Раствор сернокислого натрия	20,0	1,1089	1245,2	1525,1	0,0000393
Раствор сернокислого натрия	18,8	1,1602	1292,9	1583,5	0,0000348
Раствор углекислого натрия	22,2	1,1828	1301,8	1594,4	0,0000337
Раствор азотнокислого натрия	20,9	1,2066	1363,5	1669,9	0,0000301
Раствор хлористого кальция	22,5	1,4322	1616,3	1979,6	0,0000181
Обычный спирт при 36°C	20,0	0,8362	1049,9	1285,9	0,0000733
Чистый спирт	23,0	0,7960	947,0	1159,8	0,0000947
Эссенция скипидара	24,0	0,8622	989,8	1212,3	0,0000800
Серный эфир	0,0	0,7529	946,3	1159,0	0,0001002

скорости дилатационных волн в неограниченном твердом теле $c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ со скоростью продольных колебаний в стержне $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ получается отношение c_1/c_0 равное $\sqrt{3/2}$, если $\nu = 1/3$ и $\sqrt{6/5}$, если $\nu = 1/4$.

То, что при $\nu = 1/3$ в (неограниченных) твердых телах отношение скорости волн расширения (дилатационных волн) к скорости распространения продольных волн в стержнях дает в точности то же числовое значение, что и отношение скоростей волн в воде, в ситуации, которая, как было предположено, была аналогичной, убедило Вертгейма в фундаментальной важности этого факта [1]).

[1]) Кроме того, Вертгейм находился под влиянием того факта, что если отношение $\sqrt{6/5}$ применить к воде, то для скорости звука в воде Колладон и Штурм должны были получить значение 1285 м/с вместо найденного ими значения 1435 м/с. Такое большое расхождение исключало вероятность экспериментальной ошибки.

Рано или поздно каждый серьезный экспериментатор встречается со случайным численным совпадением, но редко в ситуации столь драматичной, как Вертгейм. Хотя на Вертгейма и оказал сильное влияние результат этого наблюдения,

Будь он лучше знаком с ранними работами Пуассона по равновесию жидкостей или изучи он внимательнее сочинения Максвелла, на которого ссылался в своем мемуаре 1860 г, Вертгейм вряд ли придавал бы столь большое значение аналогии между твердыми телами и жидкостями, которые он рассматривал. Впрочем, в то время, когда соотношение между теорией и экспериментом было таково, что среди многих непроверенных концепций существование дилатационных и сдвиговых скоростей волн в любых телах еще не было продемонстрировано, экспериментатору не казалось неразумным ожидать обнаружения в стержнях двух волновых скоростей, хоть и меньших по величине, но оказывающихся в том же отношении, что и скорости дилатационных и сдвиговых волн в свободном поле. Точно так же не представлялось невероятным допустить существование сдвиговых волн в воде. Вертгейм интересовался, не может ли быть отнесено двойное эхо, которое слышал Верде [1]), когда находился в лодке неподалеку от колокола, на счет второй, сдвиговой волны в воде (Wertheim [1851, 4]).

Подобно Юнгу 35 годами ранее, Верде также был смущен тем, что касается соотношения между объемной и линейной сжимаемостью жидкостей, как это следует из замечания в обзоре 1861 г. работы Вертгейма о том, что эта аналогия нуждается в дополнительных доказательствах. Тот факт, что прошло более десяти лет после выхода в свет широко известной статьи Вертгейма об этой аналогии, прежде чем появилась первая критическая работа по этому поводу, свидетельствует о непонимании вопроса большинством исследователей в середине XIX века. В самом деле, в 1851 г. Академическая комиссия, состоящая из Рено, Дюамеля и Коши (Wertheim [1851, 9]), причем Коши — в качестве докладчика, заключила, что близкая корреляция предсказанной Вертгеймом скорости звука, исходя из скорости в водяном столбе, с данными Колладона и Штурма, является еще одним доказательством неприменимости атомистической теории [2]) к описанию физической природы.

В стиле, характерном для такого великого экспериментатора, каким он был, Вертгейм сопровождал свои опыты доскональным изучением всех вспомогательных эмпирических допущений. Так, он заметил, что на протяжении двух веков эксперименты со столбами воздуха неизменно обнаруживали скорость звука меньшей, чем в неограниченном пространстве, вследствие наличия концевых отверстий у труб и эффекта диаметра, поэтому он попытался выяснить, присутствуют ли эти эффекты при распространении звука в столбах

как впрочем и на многих его современников, его подход к проверке теории с помощью независимых экспериментов следует признать правильным. Что́ делает его случай в чем то необычным, так это то, что его независимые проверки подтвердили использование им аналогии между твердым телом и жидкостью.

[1]) Об этом сообщил Колладон (Colladon [1842, 1]).

[2]) См. комментарий Дюгема (Duhem [1903, 1]) по этому вопросу в разделе 3.16 (примечание).

жидкости. Комментируя тот факт, что повседневный опыт в физике возбуждения звука был почерпнут из комнат, шкафов, стаканов и бутылок, т. е. из ограниченных областей, наполненных воздухом, Вертгейм выражал жалобы экспериментатора в отношении ограничений и переупрощений современных ему теорий. После длинного исторического обзора изучения эффектов сопел, концевых условий и влияния диаметра Даниилом Бернулли, Эйлером, Вильямом Гопкинсом, Пелисосансом, Био, Хамелем, Саваром, Пуассоном, Лисковиусом, Сондаусом и Пинаром Вертгейм (Wertheim [1851, 2, 6, 7], [1860, 2]) дал подробное, критическое описание выполненного им экспериментального изучения предмета, включая точные данные, использованные для сравнения его результатов с полученными в работах других авторов. В условиях рассмотрения широкого разнообразия размеров труб и сопел он показал согласованность с «законом одинаковых объемов», сформулированным Марином Мерсенне (Mersenne [1636—1637, 1], стр. 335) двумя столетиями ранее. Интересно отметить осторожность, которую Вертгейм проявлял, пока не убедился в том, что его предыдущий выбор сопла в цилиндрах, заполненных воздухом и погруженных в жидкость, сделан соответствующим образом, чтобы обеспечить точное определение скоростей звука.

3.18. Вертгейм о колебаниях пластин и «глубоком тоне» колеблющихся стержней

Через год после своих динамических опытов с жидкостями, в 1848 г. Вертгейм (Wertheim [1851, 3]) [1]) рассмотрел атомистическую теорию Пуассона — Коши с совершенно другой точки зрения. Следуя серии экспериментов с пластинами, проведенных за год до этого Густавом Робертом Кирхгофом [2]), и расширяя их, он осуществил свою серию опытов по поперечным колебаниям тонких круглых пластин из железа, стекла и латуни. Его задача заключалась в том, чтобы показать, что модули E, определенные по основному тону и по первым двум октавам, а также по измерениям соответствующих узловых фигур в эксперименте Хладни, совпадут со значениями E, подсчитанными по значениям модулей сдвига, которые постоянно публиковал теперь Теодор Купфер, но в отличие от него, исходя из условия, что $\nu = 1/3$, а не $1/4$, как полагал сам Купфер.

Сначала Вертгейм проверил изотропию листового материала, сравнив динамические модули, измеренные по продольным колебаниям полос, вырезанных в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Для латуни он получил $E = 10\,626{,}8$ кгс/мм^2 в направлении проката и аналогичное значение $E = 10\,797{,}8$ кгс/мм^2 в перпендику-

---

[1]) Указанная статья была представлена Академии в 1849 г.

[2]) Эти эксперименты были опубликованы Кирхгофом тремя годами позже (Kirchhoff [1850, 1]).

лярном направлении [1]). Далее он проверил изотропность мягкого железа, трех латунных и трех стеклянных пластин, отметив, что средние радиальные расстояния (полученные по нескольким измерениям) до эллиптических узловых линий формы колебаний, соответствующей первой частоте, и двух первых симметричных форм колебаний, соответствующих обертонам, были такими, какими ожидались и по значению и по направлению. Как, по-видимому, подозревал Вертгейм, эксперименты и вычисления были неадекватны целям, которые они преследовали.

Вертгейм опубликовал одну дополнительную работу по своему экспериментальному изучению теории Пуассона — Коши. Она служит интересным комментарием к тому, как числовое совпадение в наблюдаемом, но не понятном поведении в совокупности с теоретически ожидаемым, но пока экспериментально не обнаруженным подобным поведением может быть причиной фундаментальной ошибки, которая затем широко распространяется. Инфинитезимальная линейная теория упругости предсказывает существование в изотропных телах дилатационных и сдвиговых волн, различие в скоростях которых зависит от коэффициента Пуассона. Многие экспериментаторы отмечали, что продольные колебания сопровождались звучанием, получившим название глубокого тона, слышимость которого менялась пока продолжался процесс колебаний [2]). Савар (Savart [1837, 1]) отождествлял источник глубокого тона с поперечными колебаниями, происходящими с частотой, которая почти точно на октаву была ниже частоты продольных колебаний, независимо от того, рассматривалась ли частота колебаний первая, или вторая, или третья. Звук глубокого тона характеризовался как резкий и воспринимался только прерывисто. При его возникновении заметно ослабевал тон продольных колебаний. Это явление, которое Вертгейм охарактеризовал в 1851 г., как известное каждому, кто имеет дело с экспериментами этого типа, обычно было причиной разрушения стеклянных и хрустальных образцов во время испытаний на продольные колебания [1].

---

[1]) Это были не только первые специальные эксперименты, демонстрирующие изотропиость рассматриваемых материалов — факт, который были вынуждены отметить большинство последующих критиков Вертгейма, постоянно нападавших на него по этому поводу, но и проверка изотропности, осуществленная на 40 лет раньше экспериментов Фохта, которого обычно считают первым, кто всерьез занялся этим вопросом.

[2]) В экспериментах, в которых наблюдалось это явление, продольные колебания получались с помощью натирания стержня вдоль его оси пропитанной тканью. Эта техника, введенная впервые Хладни, использовалась затем Саваром и Вертгеймом для определения динамических модулей. Указанное явление обычно наблюдалось в экспериментах вплоть до 1880 г., после чего при изучении продольных колебаний в стержнях они стали возбуждаться посредством удара. После этого сообщения о глубоком тоне исчезли из литературы. Представляется стоящим вновь вернуться к изучению этого явления, для получения которого, очевидно, потребуется известное экспериментальное мастерство.

Вертгейм в мемуаре 1851 г. (Wertheim [1851, 4]), представленном Академии 10 декабря 1849 г., подробно описал, каким образом можно выделить глубокий тон и сообщил о серии экспериментов, начиная от тех, в которых он использовал фигуры Хладни, и кончая теми, в которых изучал следы, оставляемые иглой, укрепленной на конце стержня, на слое угольного порошка, покрывающего стеклянную пластинку. Эти данные представлены на рис. 3.30, где *1*, *2* и *3* — следы, оставленные иглой, перпендикулярной оси балки, на пластинке, параллельной этой оси. При этом *1* относится к случаю, когда игла укреплена на широкой стороне[2] прямоугольного поперечного сечения балки, а *2* и *3* — на узкой стороне сечения.

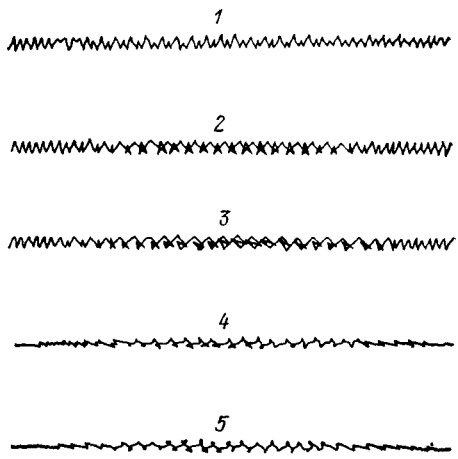


Рис. 3.30. Экспериментальное подтверждение Вертгеймом (1849) существования поперечных осцилляций «глубокого тона», сопровождающих продольные колебания и имеющих частоту на октаву ниже продольных. Разные цифры относятся к различным положениям иглы, записывающей показанные здесь результаты на вращающемся диске.

На рис. 3.30, *4* и *5* показаны следы иглы, расположенной перпендикулярно оси стержня, на пластинке, параллельной ей[3]. В своем пространном обсуждении Вертгейм, подобно Савару, не отмечал возможности совместных мод колебаний. После некоторых правдоподобных объяснений глубокого тона Вертгейм предположил, что он возникает в результате распространяющихся по стержню сдвиговых волн со скоростью распространения сдвиговых волн в неограниченном теле, деленной на $\sqrt{3/2}$. Таким образом, это было то же отношение, в каком находились скорость дилатационных волн в неограниченном теле и скорость продольных волн в стержне. При $\nu=1/4$ для изотропных тел отношение скорости дилатационной волны к скорости сдвиговой равно $\sqrt{3}$, а при $\nu=1/3$ оно равно 2. Так как глубокий тон неизменно имел частоту в два раза меньшую, чем у звучащей моды, независимо от того, была ли она основным тоном или одним из первых двух обертонов, Вертгейм счел это дополнительным свидетельством в пользу того, что $\nu=1/3$, и поэтому теория Пуассона — Коши не должна применяться [1]).

Среди прочих Вертгейм рассматривал сейсмологические опыты как единственную надежду на выяснение вопроса о реализации теоретических скоростей волн в неограниченном теле. Опережая свое

[1]) См. раздел 3.17.

время, он предложил использовать наземные взрывы для измерения продолжительности распространения двух волн до фиксированного места. Он, несомненно, не был одинок, полагая, что колебания «глубокого тона» распространяются в стержнях со скоростью сдвиговых волн, как это, например, можно видеть в независимом от него утверждении о существовании этого эффекта Вильямса Гопкинса (Hopkins [1847, 1], стр. 78) в Докладе Британской Ассоциации (British Association Report) [1]) в том же 1847 г.; более того, я был не в состоянии найти ни тени критики этой идеи в работах авторов, комментировавших труды Вертгейма на протяжении следующих двух десятилетий. В докладе Академической комиссии [2]) 1851 г. Рено, Дюамель, Деспре и Коши согласились с интерпретацией Вертгейма глубокого тона поперечных колебаний. Они рассматривали эти эксперименты как подтверждение заключения Вертгейма о том, что теория Пуассона — Коши, о которой авторы доклада с досадой заметили, что она была обобщена «одним из нас», должна быть отклонена.

В 1860 г. Вертгейм стал проявлять некоторое раздражение по отношению к дискуссии, которая последовала за выходом в свет его первого мемуара о равновесии твердых тел и продолжалась уже двенадцать лет. Я привожу его замечания из английского перевода статьи, опубликованного в «Философском журнале» (*Philosophical Magazine*) [3]):

> «Несколько известных геометров, не повторив моих экспериментов и не обсуждая точность, пытались привести их в соответствие с устаревшей теорией с помощью многочисленных и, к сожалению, совершенно произвольных гипотез. Я кратко упомяну и подвергну обсуждению эти гипотезы прежде, чем начну описывать мои новые эксперименты по этому вопросу».

Эти новые эксперименты были, по-видимому, испытаниями на изгиб, описанными в мемуаре, оставшемся незаконченным ко времени его смерти [4]).

Из числа тех многих, которые подобно Сен-Венану, были не склонны отказываться от ранее предложенного простого атомистического обоснования линейной упругости, большинство обычно возражали, утверждая, что тут «должна быть» анизотропия или какой-нибудь вид геометрической неоднородности, или какие-либо эф-

---

[1]) Гопкинс, правда, ссылается на общие поперечные колебания стержня.

[2]) Доклад был написан Коши. См. Wertheim [1851, 9].

[3]) См. стр. 448 английского перевода (1861) статьи Вертгейма [1860, 1]. Этот мемуар был впервые опубликован за месяц до его самоубийства в Туре.

[4]) Верде в своей статье о Вертгейме в «Институте» (L'Institut [1861, 1]) охарактеризовал состояние этих манускриптов как совершенно непригодное для посмертного опубликования. Он утверждал, что Вертгейм измерял изменение объемов образцов при изгибе и нашел, что это изменение неодинаково у балок с прямоугольным сечением, изгибаемым в положение «на ребро» или плашмя. Очевидно, продолжал Верде, эти опыты должны были провести его к совершенно другой демонстрации некорректности молекулярной теории. (Все мои старания обнаружить манускрипты не увенчались успехом.)

фекты закалки [1]). Вертгейм был частично выведен из равновесия подобными заявлениями, исходящими от Клаузиуса и Сен-Венана. Он отметил, как любопытно то, что, несмотря на различные типы однородности, связанные с геометрической формой, все эксперименты, проведенные со сферами, находящимися под давлением, и с цилиндрами как полыми, так и сплошными при их растяжении, кручении и изгибе, дают один и тот же первоначальный результат, т. е. $\nu \neq 1/4$.

3.19. Полемика Вертгейма с точки зрения XX века

В течение добрых полувека после наблюдений Вертгейма, даже после несметного количества экспериментальных подтверждений его результатов, представленных другими авторами, он оставался объектом критических нападок за установление того, что для металлов и стекла его экспериментальные результаты дали иное значение коэффициента Пуассона, а именно $\nu = 1/3$, т. е. за то, что он доказал необоснованность одноконстантной теории. В своем последнем мемуаре он разъяснил, что подобные нападки, включая и исходящие от Верде, который вскоре стал его научным биографом, попросту ошибочны. Он соглашался с Максвеллом и Ламе в том, что для других материалов в будущем могут быть найдены и отличающиеся значения отношения линейной и объемной сжимаемости, что это отличие для резины в противоположность металлам уже установлено. Возможно, точкой зрения Вертгейма являлось то, что можно надеяться на использование его данных, приводящих к значению $\nu = 1/3$, для создания новой атомистической теории, справедливой для твердых тел с таким значением ν. Он в какой-то мере напоминал своих критиков, когда пытался не учесть данных Кирхгофа для железа и латуни: $\nu \neq 1/4$, а также $\nu \neq 1/3$. Экспериментатор такого высокого мастерства, как Вертгейм, имеет полное, слишком часто забываемое право позволить себе удовольствие надеяться на то, что его работа явится стимулом для создания новой теории [2]).

---

[1]) К этому можно добавить еще четыре пуикта, по которым Вертгейм подвергался критике, как это лучше всего видио из утверждений Пирсона в «Истории» (Todhunter and Pearson [1960, 1], т. I, стр. 714) при обсуждении мемуара 1848 г. о равновесии твердых тел. Он говорит о человеке, изучавшем математику у Якоби, Дирихле и Штейнера: «Мемуар весьма поучителен в том отношении, что указывает на опасиость для физика не осозиавать глубоко последовательиость математического процесса». Поскольку рассматриваемый материал был чисто экспериментальным, приведенная цитата является в то же время еще одним примером ограниченного понимания Пирсоиом экспериментальной механики. Как раз упорство Пирсона и его обычные отрицательные отзывы о Вертгейме, несмотря ни на что, вновь и вновь привлекали внимание к его данным, пока более десяти лет тому назад не вызвали у меня интерес, любопытство и желание ближе ознакомиться с его экспериментами.

[2]) Намеки или прямые призывы Вертгейма к геометрам были неверно поняты. Чаще всего можно было найти заявлеиия, подобные сделанному, почти через семьдесят лет после призыва Вертгейма Лявом, который, не вдаваясь в существо тео-

В своем предположении, что теоретики могли вполне принять значение $\nu = 1/3$, Вертгейм снова опередил свое время. Ровно через 100 лет после того, как Вертгеймом был опубликован первый мемуар по константам упругости, Вернер Кёстер (Köster [1943, 1]) в 1943 г.

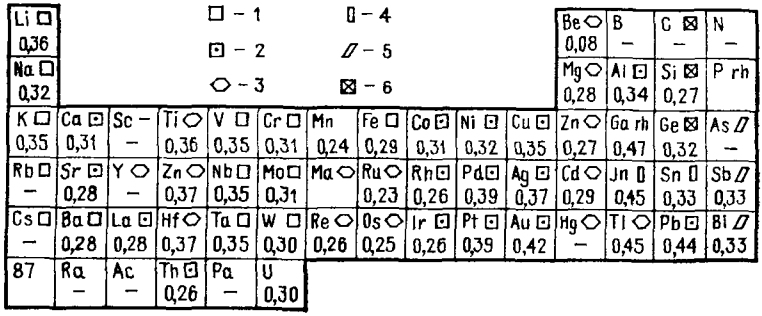


Рис. 3.31. *Систематизация Кёстером (1948) экспериментально найденных значений коэффициента Пуассона элементов. 1 — объемноцентрированная кубическая решетка, 2 — гранецентрированная кубическая, 3 — гексагональная, 4 — тетрагональная, 5 — ромбоэдрическая, 6 — алмазная.*

подвел итог рассмотрению данных по упругим постоянным для изотропных тел, которые имелись в его распоряжении в середине XX века, в терминах двух линейных зависимостей, связывающих упругие постоянные E, K, μ и ν, и пришел к выводу, что хотя и наблюдаются вариации в величине коэффициента Пуассона, среднее его значение $\nu = 1/3$ вполне удовлетворительно для теоретических целей. Проверка независимо определенных значений величин K, μ и E убедила Кёстера в том, что, несомненно, ряд поликристаллических металлов являются изотропными или близкими к изотропным телам. Используя отношения K/E и E/μ, он нашел сравнимые значения ν. В соответствии с той или другой формулой он вычислил коэффициенты Пуассона для 46 элементов. Эти значения указаны на рис. 3.31.

Как будет показано ниже, где я дам описание продолжения работы Кёстера в 1948 г., среднее значение коэффициента Пуассона для 46 элементов равно 0,337; при среднем значении 0,325 — для одиннадцати элементов с объемноцентрированной кубической решеткой; 0,330 — для шестнадцати элементов с гранецентрированной кубической решеткой; 0,303 — для десяти элементов с гексагональной решеткой; 0,390 — для двух элементов с тэтрагональной решет-

---

рии Пуассона — Коши, похоже считал, что экспериментальные результаты Вертгейма не следует принимать во внимание, поскольку не существует теории, которая могла бы их объяснить:

«Этот коэффициент часто называется «коэффициентом Пуассона». Пуассон вывел из своей теории, что этот коэффициент должен быть равен 1/4. Эксперименты Вертгейма со стеклом и латунью, не подтвердили этого результата, и Вертгейм предложил считать указанный коэффициент равным 1/3 — величине, которая не имеет теоретического обоснования». (Love [1927, 1], стр. 13).

кой; 0,330 — для двух элементов с ромбоэдрической решеткой; 0,345 — для двух элементов с решеткой типа алмазной и 0,337 — для трех элементов, кристаллографическая структура которых не обследована. В отношении «теоретических целей» возможно более уместно сказать, что для большинства металлов эксперимент показывает, что ν не очень отличается от 1/3. Я буду обсуждать ниже

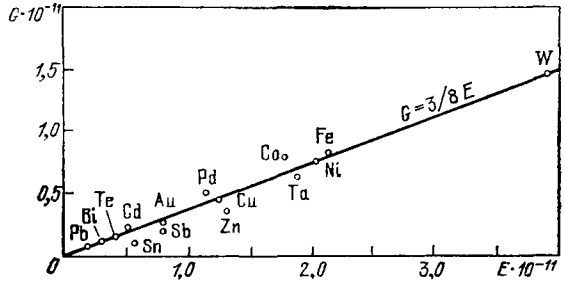


Рис. 3.32. Исследоваание Цвиккера (1954). Сравнение отношений значений модуля упругости при сдвиге G и модуля продольной упругостн E для различных элементов со значениями, соответствующимн коэффициенту Пауссона, равному 1/3 (сплошная лнния). E — модуль продольной упругостн в Н/м², G — модуль упругости при сдвиге в Н/м² (G — иное обозначение модуля μ).

описание Кёстера, каким образом коэффициент Пуассона меняется в зависимости от положения элемента в периодической системе, и те усилия, которые были предприняты для изучения тел с более общим случаем анизотропности при помощи опытов с монокристаллами. Здесь важно отметить просто, что хотя Кёстер и не ссылается ни на Вертгейма, ни на горькую дискуссию, длившуюся почти 50 лет, выводы Вертгейма из его собственных экспериментов становятся просто фактом к середине XX века.

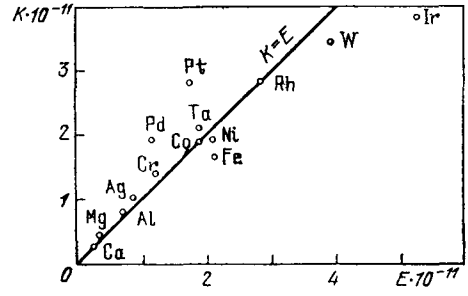


Рис. 3.33. Исследование Цвиккера (1954). Сравиенне отношений значений модуля объемной упругости K н модуля продольной упругости E со значениями, соответствующимн коэффицнеиту Пуассона, равному 1/3 (сплошная линия). E — модуль продольной упругости в Н/м², K — модуль объемной упругости в Н/м² (K — ное обозначение модуля λ).

В 1954 г. Корнелис Цвиккер (Zwikker [1954, 1]) в монографии по физическим свойствам твердых тел также без ссылок ни на Вертгейма, ни на трудности, доминировавшие в этом вопросе во второй половине XIX века, представил два графика, воспроизведенные на рис. 3.32 и 3.33, на которых он показал, что для зависимости между модулем сдвига и модулем Юнга данные хорошо укладываются на прямую $\mu = {}^3/_8 E$. Он дал также для второго сравнення зависимость между K и E (сплошная линия соответствует $K=E$), причем в этом случае, как и следовало ожидать, обнаруживается больший разброс

данных вследствие большей чувствительности отношения K/E к изменению коэффициента Пуассона. Это постоянство коэффициента пропорциональности, разумеется, соответствует значению $\nu=1/3$, найденному Вертгеймом. Цвиккер отметил, что значение $\nu=1/3$ является достаточно хорошим средним для металлов, однако для камня и стекла, по его мнению, предпочтительнее величина 1/4, а для эластомеров $\nu=1/2$.

Весомость экспериментального доказательства при рассмотрении почти 125-летнего промежутка после подозрений, высказанных Рено, была окончательно обеспечена силами экспериментов Вертгейма, который заключил, что почти для всех кристаллических тел соотношения Коши несправедливы; поэтому не следует считать, что данная работа имеет целью проследить все многочисленные детали полемики по поводу одноконстантной и мультиконстантной теорий. Некоторые аспекты этой полемики еще будут описаны, но все это слишком часто обнаруживало слабые места великих людей, так же как необоснованные утверждения многих заурядных людей. Тем не менее несколько дополнительных экспериментов, посвященных этому вопросу, столь необычны по концепции, что их стоит рассмотреть.

3.20. Эксперименты Кирхгофа по непосредственному определению коэффициента Пуассона (1859)

Густав Роберт Кирхгоф (Kirchhoff [1859, 1]) в 1859 г. предложил эксперимент, дающий возможность непосредственно определить коэффициент Пуассона на одном образце при одновременном действии кручения и изгиба, без необходимости измерения диаметра

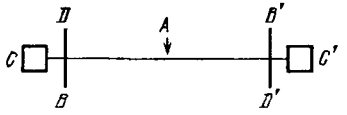


Рис. 3.34. Схематическое изображение образцов, которые использовал Кирхгоф (1859) в своих опытах по непосредственному определению коэффициента Пуассона.

стержня (что позволяло избежать ошибок, возникающих вследствие возведения этой величины в третью и четвертую степени) и без необходимости определения либо E, либо μ [1]). Характер образцов, с которыми эти эксперименты были проведены, показан на рис. 3.34. Вся аппаратура, которую использовал Кирхгоф, изображена на рис. 3.35. Стержень был оперт в его середине, обозначенной буквой A. Нагрузка прикладывалась одновременно к двум противоположным консолям в точках B и B' при первом измерении, затем снималась и прикладывалась в точках D и D' при втором измерении. Смещения определялись с помощью зеркал, расположенных в точках C и C'.

[1]) Вертгейм в своем мемуаре 1860 г. утверждал, что эта идея принадлежит Гауссу, однако в работе Кирхгофа нет никаких указаний по этому поводу.

Анализ этой комбинированной задачи показывает, что измерения дают непосредственное определение коэффициента Пуассона независимо от диаметра стержня. Сравнение двух серий измерений позволяло проверить точность каждой из них. Кирхгоф осуществил четыре эксперимента, три из которых с разными образцами из стали и один — с латунным образцом. В его мемуаре описывается воспроизводимость результатов для данного образца, когда нагрузка той же величины прикладывалась в другом месте, а также их постоянство при удвоении нагрузки. Усредняя эти результаты для первого стального образца, Кирхгоф получил значение для коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}293$. Для второго стального стержня он получил в среднем $\nu = 0{,}295$; для третьего стального образца $\nu = 0{,}294$. Общее среднее значение ν для стали равнялось 0,294, т. е. в точности тому значению коэффициента Пуассона, которое принято в наши дни для этого материала.

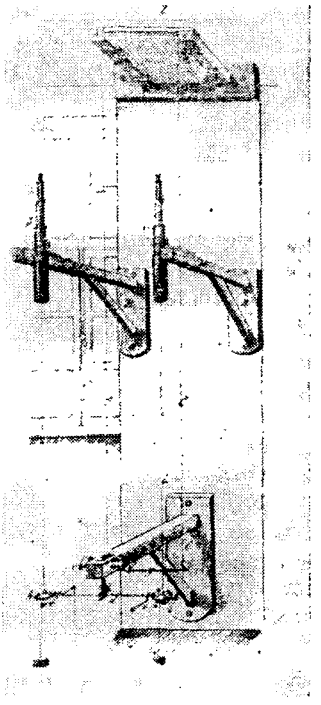


Рис. 3.35. Установка, на которой Кирхгоф (1859) осуществил свое непосредственное определение коэффициента Пуассона.

Эксперимент Кирхгофа с латунью, для которой величину нагрузки нужно было изменить с тем, чтобы прогиб оставался достаточно малым, также дал принятое в настоящее время значение ν, равное 0,387. Это последнее значение весьма близко к величине $\nu = 0{,}385$, которую вычислил для латуни Вертгейм, исходя из отношения частот продольных и крутильных колебаний, полученных Саваром. По моему мнению, попытки Вертгейма отклонить значения, полученные Кирхгофом, из-за недостаточной основательности его приборов не были хорошо обоснованы, так же как недостаточно обосновано и заявление Кирхгофа о том, что в изотропности стальных образцов он был уверен, но имел некоторые сомнения относительно латунного и, таким образом, полагал, что найденное им значение ν для этого материала менее достоверно, чем для стали.

Значительность изобретательного эксперимента Кирхгофа, в котором он непосредственно определил коэффициент Пуассона, избежав экспериментальных трудностей, неявно содержащихся в определении отношения чисел, полученных путем измерения, как это проиллюстрировано работой Джозефа Давида Эверетта (Everett [1866, 1], [1867, 1]), не была оценена большинством. Семью годами

позже, в 1866 г. Эверетт повторил эксперимент Кирхгофа, однако попытался улучшить его, вернувшись к определению двух модулей с последующим вычислением отношения. Упустив, что совершенно очевидно, важнейший элемент эксперимента Кирхгофа, Эверетт вначале фиксировал один конец стержня и измерял угол закручивания на другом конце, затем снимал внешний крутящий момент и прибор, чтобы измерить прогиб, вызванный приложенной на конце нагрузкой. Он производил измерения при помощи системы, содержащей зеркало и подзорную трубу, того же типа, что применял Кирхгоф, но Эверетт был вынужден переустанавливать аппаратуру и приводить в порядок ее отрегулированность между двумя нагружениями, внося тем самым то, что было названо «механической коррекцией». Значения коэффициента Пуассона существенно отличались не только от значений, полученных Кирхгофом, но также и от значений, найденных Вертгеймом и Максвеллом [1]). Среднее значение коэффициента Пуассона для стекла, полученное Эвереттом, равнялось 0,239 вместо 0,330, найденного Вертгеймом, и 0,332 — Максвеллом. Для латуни Эверетт получил посредством вычисления ненормально большое среднее значение, равное 0,469 вместо значения Кирхгофа 0,387, значения Савара 0,385 или значения Вертгейма, равного 1/3.

Эти эксперименты Эверетта характеризуют общую несостоятельность многих экспериментаторов того времени, проявляемую в недооценке трудности проблемы. Однако роль Эверетта в этом вопросе представляет интерес в основном потому, что в 1875 г. он издал справочник [2]), который стал главным источником численных значений в физике на многие годы. Эта книга, которая содержала сведенные Эвереттом в таблицы ошибочные значения E и μ, а также вычисленные им значения сжимаемости и коэффициента Пуассона, выдержала несколько английских изданий и была переведена на французский, немецкий, польский и итальянский языки. Некритическое сравнение этих данных с результатами Кирхгофа, Максвелла, Амага, Вертгейма, Мэллока, Корню, Пульфриха, Видемана, Савара, Купфера и Кельвина было не последним фактором в создании общего впечатления на протяжении остающейся части XIX века, что определение числовых значений констант упругости в лучшем случае является неточной наукой.

Зимой 1862/63 г. в Гейдельберге Кирхгоф предложил Михаилу Окатову повторить его, Кирхгофа, эксперименты с небольшими модификациями с тем, чтобы изучить влияние предварительной термической истории и изменения анизотропии, если таковое возникает, вызванное изготовлением элементов различных поперечных сечений. Среди «многозначащих, так же как содержательных советов Кирхгофа» (Okatov [1863, 1], стр. 12), весьма вероятно, было и

---

[1]) Двумя годами позже Корню (Cornu [1869, 1]) получил для стекла значение $\nu = 0{,}237$.

[2]) Этот справочник назывался «C. G. S. система единиц» (Everett [1875, 1]).

предложение, чтобы Окатов повторил измерения на тонких образцах (стальные швейные иглы), применение которых в свое время критиковалось Вертгеймом, чтобы сравнить их с измерениями на более массивных стержнях. Эксперименты Окатова отличались от первоначальных и тем, что среднее сечение образца [1] теперь было свободно от зажимов и использовалось для оптических измерений, в то время как концы защемлялись и к ним внецентренно прикладывалась нагрузка. Планируя анализ одновременного кручения и изгиба на образцах с эллиптической, квадратной и прямоугольной формами поперечных сечений, в дополнение к круглой, изучавшейся ранее, Окатов, очевидно, имел в виду значительно более широкую экспериментальную программу, чем можно было осуществить за одну зиму. Все, кроме двух описанных опытов, были выполнены с образцами круглого поперечного сечения, а остальные два образца были стальными [2]. При этом Окатов выражал сожаление по поводу того, что не были выполнены эксперименты и для круглых сечений из этой же стали, результаты которых могли бы служить для сравнения.

Окатов восхищался воспроизводимостью своих экспериментальных результатов, получаемых при испытании одного стержня за другим и в особенности совпадением их с результатами опытов Кирхгофа; последнее объясняется тем, что образцы были получены в одинаковых условиях. Например, в табл. 70 для образцов под номерами 3, 4 и 5 два образца, не подвергавшиеся никакой термической обработке, дали $\nu=0{,}2984$ и 0,2994; для двух образцов, закаленных в масле, было получено $\nu=0{,}3199$ и 0,3181; и для двух образцов, полностью отожженных, а затем постепенно охлажденных, были найдены значения $\nu=0{,}3278$ и 0,3284.

Среднее значение Кирхгофа для трех стальных швейных игл было $\nu=0{,}294$ (0,293, 0,294 и 0,295 соответственно для трех опытов). Для образца из того же материала и полученного при тех же условиях при небольшом изменении условий проведения эксперимента Окатов получил $\nu=0{,}2968$. Можно также отметить сходство в определенных значениях коэффициентов Пуассона для трех образцов в естественном состоянии за номерами 1, 4 и 5 со средним значением $\nu=0{,}291$. Более высокое значение ν для полностью отожженных образцов, а также полученная общая воспроизводимость согласуются с более поздними наблюдениями Баушингера и с проводившимися ранее измерениями Вертгейма, которые склонили его (Окатова) к признанию того, что для стали коэффициент Пуассона может быть слегка меньше чем 1/3. Диаметры образцов № 4 и 5 с круглым поперечным сечением находились в отношении 10 : 18.

Окатов заключил, что независимо от диаметра образцов при правильном учете предшествовавшей термической истории экспериментальные результаты были воспроизводимыми. Он сожалел, что не имел времени, чтобы выяснить, кроме того, могут ли результаты для образцов в № 6 и 7 из стали Хантсмана с прямоугольной формой

Окатов (1863)

	Тип и номер стержня								
	Стержни, предназначенные для изготовления швейных игл				Гладкая английская круглая проволока			Призматические стержни, прокатанные в горячем состоянии	
	1	2	8	9	3	4	5	6	7
а	$\nu_1 = 0{,}2750$	—	—	—	—	$\nu_4 = 0{,}2984$	$\nu_5 = 0{,}2994$	$\nu_6 = 0{,}40$	$\nu_7 = 0{,}3982$
б	—	$\nu_2' = 0{,}2968$	—	—	—	$\nu_4' = 0{,}3199$	$\nu_5' = 0{,}3181$	—	—
в	—	$\nu_2' = 0{,}293k$*)	$\nu_2' = 0{,}294$*)	$\nu_2' = 0{,}295$*)	Среднее значение:		$\nu_{4,5}' = 0{,}3190$		
г	—	$\nu_2'' = 0{,}2988$	—	—	—	—	$\nu_5'' = 0{,}3234$	—	—
д	—	$\nu_2''' = 0{,}3037$	—	—	$\nu_3''' = 0{,}3278$	—	$\nu_5''' = 0{,}3284$	—	—
					Среднее значение:	$\nu_{3,5}''' = 0{,}3281$			
	$\delta = \nu_2''' - \nu_2' = 0{,}0227\nu_2'''$ (см. ниже **)) $\Delta = \nu_2''' - \nu_1 = 0{,}0945\nu_2'''$				$\delta = \nu_{3,5}''' - \nu_{4,5}' = 0{,}0277\nu_{3,5}'''$ $\Delta = \nu_{3,5}''' - \nu_{4,5} = 0{,}0890\nu_{3,5}'''$				

*) Кирхгоф, Pogg. Annal, 108, 390—391 (1859).
**) (Я исправил очевидную ошибку.)

Состояние стержня: а — в состоянии поставки с завода, б — закаленный в масле, в — закаленный в масле (или после выполненной коррекции), г — частично отожженный и охлажденный, д — отожженный и постепенно охлажденный.

поперечного сечения совпасть с результатами, полученными в опытах с образцами круглого поперечного сечения. Поскольку таких экспериментов он не провел, его первоначальная цель не была достигнута. Что касается очевидной существенно улучшенной воспроизводимости результатов, полученных в его экспериментах, то она объясняется отчасти одновременными измерениями изгиба и кручения на одном и том же образце. Однако значительно более важным результатом в непосредственном определении Окатовым значения ν была независимость последнего от радиуса образцов. Очевидно, что значение радиуса, найденное с ошибкой измерения, не возводилось в третью степень и, таким образом, исключалась ошибка, имеющая место при раздельном определении модулей упругости. Что касается длины образцов, то она, разумеется, по-прежнему присутствовала при анализе данных [1]).

3.21. Эксперимент Корню (1869), в котором использовалась оптико-интерференционная техника для определения коэффициента Пуассона

Первое действительно непосредственное определение коэффициента Пуассона, независимо от каких бы то ни было размеров и модулей, было также первым определением констант упругости при помощи оптической интерференции [2]). Замечательная работа Мари Альфреда Корню 1869 г. по непосредственному определению коэффициента Пуассона, к сожалению, содержала необоснованную цель, поставленную им,— попытаться привести экспериментальные данные в соответствие со значением ν, отвечающим атомистическим гипотезам Пуассона — Коши. Более того, Корню некритически отнесся к сомнительным данным Каньяра де Латура 1829 г. по изменению объема, которые охарактеризовал как «незначительно отличающиеся от данных Кирхгофа». Короче говоря, Корню являл собой печальный пример экспериментатора, над которым доминировала теория.

Тем не менее изобретательный эксперимент Корню позволил осуществить непосредственное определение коэффициента Пуассона, полностью независимое от конкретных размеров образцов или тем более от их квадратов и кубов. Точность измерений Корню в 1869 г. была сравнима с точностью, достигаемой в современных лабораториях. Прошло немало лет со времени проведения опытов Корню,

---

[1]) Хвольсон в *Traité de Physique* (Chwolson [1908, 1]) подвел итог данным Окатова для закаленной стали, получив значение ν=0,294, в точности совпадающее с результатом опытов Кирхгофа и весьма близкое к значению ν=0,296, полученному Шнеебели. На основе окатовских данных по отожжениым металлам Хвольсон каким-то образом получил значеиие ν=0,304.

[2]) Очевидно использование оптической интерференции в исследованиях Корню было стимулировано экспериментами Физо (Fizeau [1864, 1]), которые были посвящены определению коэффициента теплового расширения.

пока измерительная техника вновь достигла такой же точности [1]). В своих теоретических исследованиях по изгибу балок Сен-Венан показал, что при чистом изгибе балки отношение главных радиусов кривизны нейтральной поверхности деформированной балки было равно коэффициенту Пуассона [1]. Корню подготовил эксперимент, в котором использовался этот результат. Он оптически определил радиусы кривизны верхней поверхности балки в плоскостях нормальных сечений, одна из которых проходит через ось балки, а другая перпендикулярна этой плоскости, используя балку прямоугольного поперечного сечения с очень малым отношением высоты к ширине, однопролетную с двумя консолями одинаковой длины, загруженными по концам одинаковыми по величине силами, перпендикулярными оси балки, для создания постоянного изгибающего момента на участке между шарнирными опорами. Его балки представляли собой пластинки из стекла Saint Gobain от 12 до 20 см длиной.

Скорее всего очевидная типографская ошибка или же досадное упущение не позволяет нам узнать из работы самого Корню [2]) (Cornu [1869, 1]) остальные размеры изгибаемых стеклянных призм, а также выяснить вопрос, является ли полная нагрузка, которая достигала 500 гс, суммой двух концевых нагрузок или максимумом каждой из них. Позднее в различных удобных случаях Сен-Венан выражал удовлетворение экспериментом Корню, рассматривал его как окончательное решение вопроса в пользу атомистической теории Коши — Пуассона [3]). Все же, несмотря на ограниченность представлений Корню (об ожидаемом значении ν.— *А. Ф.*) и его неудачи в некоторых случаях экспериментально создать условия, предписанные теорией Сен-Венана, введение его экспериментальной техники явилось, несомненно, важной вехой в развитии измерений в механике твердого тела. Именно Корню выпала честь, как он сам утверждал, представить Французской Академии первые результаты по измерению деформаций, полученные с помощью оптической интерференции, и увязать эти результаты с математической теорией упругости.

Для определения двух главных радиусов кривизны верхней поверхности в центре верхней грани прозрачной стеклянной балки, подвергнутой чистому изгибу, Корню использовал материальную оптическую плоскость, поддерживавшуюся на небольшом расстоянии от искривленной верхней грани. Монохроматический свет, полученный от индукционного искрового разряда, происходив-

---

[1]) Зеркальный экстензометр Баушингера, также использовавшего оптические измерения, был, пожалуй, единственным прибором в механике твердого тела, позволявшим получать при испытании образцов соответствующей длины ту же точность, которая была получена Корню и Каитоне (Cantone [1888, 1]).

[2]) См. также Saint-Venant [1856, 1], [1878, 1].

[3]) Джессоп в 1921 г. заметил, что в этих экспериментах Корию, как отмечено ниже, не всегда выполнены условия, при которых можно применять принцип Сен-Венана (Jessop [1921, 1]).

шего между двумя магниевыми электродами, усиленного путем использования лейденской банки, имел длину осиовной волны, равную 3830λ. Главные радиусы кривизны и соответствующий коэффициент Пуассона определялись двумя методами. Оптическое исследование Корню деформированной поверхности показывало систему сопряженных гипербол, имеющих общие асимптоты. Тангенс угла, образованного каждой асимптотой с направлением оси призмы, был равен величине, обратной корню квадратному из определяемого коэффициента Пуассона. При помощи очень точной сетки с четырехугольными ячейками, выгравированной на материальной оптической плоскости, Корню нашел, что тангенс угла наклона асимптот весьма близок к числовому значению, равному двум. Отсюда был сделан вывод, что коэффициент Пуассона близок к теоретически предсказанному значению, равному 1/4.

При строгой проверке этого результата Корню вновь проявил себя новатором в измерении деформации, преуспев в фотографировании картины интерференционных полос. Отсюда его микрометрические измерения, выполненные при помощи подзорной трубы, увеличивавшей фотографию в 25 раз, соответствуя фактическому увеличению самого явления примерно в 6 раз, давали непосредственно, и очень точно, распределение перемещений, из которого могли быть определены главные кривизны и, следовательно, коэффициент Пуассона [1]). В табл. 71 приведены результаты восьми измерений на семи различных образцах из стекла Saint Gobain, которые дали среднее значение коэффициента Пуассона 0,237.

После этого Корню приступил к аргументации. Выбрав одно измерение Каньяра де Латура (Cagniard de Latour [1828, 1]) (которое, как показал Вертгейм, было неточным), поскольку оно давало значение, близкое к его собственному, Корню сделал любопытное утверждение, говорящее о многом и о том, что результаты нескольких измерений Кирхгофа находятся между результатами его и Вертгейма, хотя в действительности данные Кирхгофа были ближе к данным Вертгейма. Отвергая сотни измерений Вертгейма, произведенных в различных экспериментах, так как они расходились с собственными его результатами, полученными в эксперименте всего лишь одного типа и на одном лишь материале, Корню утверждал: «Таким образом, все это привело меня к заключению, что упругая изотропия характеризуется тем свойством, что коэффициент поперечного сужения составляет одну четвертую часть коэффициента продольного удлинения» (Cornu [1869, 1], стр. 336). Для этого сравнения Корню указал значение Кирхгофа $\nu=0{,}294$ для стали, а не 0,378 для латуни. Он определил результаты Вертгейма как не

[1]) Всю значимость этой фотографии в 1869 г. можно оценить путем сопоставления утомительных затрудиений, которые испытывал бы Корню, пытаясь определить картииу полос, наблюдая ее непосредствеино во время свечения разряда, с внимательным, без спешки рассматриванием не меняющегося фотографического снимка.

имеющие никакой ценности, подразумевая под этим то, что Вертгейм выбирал свои образцы столь невнимательно, что он не мог быть уверенным в их изотропности, и, никак не документируя свои слова, Корню столь же безосновательно заявил, что Вертгейм имел «неконтролируемый источник ошибок, достаточно серьезных для того, чтобы сомневаться во всех приведенных им данных» (там же). Суть аргументации Корню состояла в том, что прозрачное стекло является единственным твердым телом, которое можно проверить оптически, чтобы быть уверенным в том, что оно абсолютно изотропно. Однако ничего не было сказано относительно того, как он это установил [1]).

Таблица 71

Корню (1869)

Обозначение полосок	Толщина (мм)	Отношение поперечных размеров	Значение ν	Обозначение полосок	Толщина (мм)	Отношение поперечных размеров	Значение ν
# 2 [а])	1,380	18,4	0,225	# 5	2,040	6,4	0,257
# 3	2,037	12,3	0,226	# 7 [б])	1,554	8,7	0,236
# 4	1,370	7,3	0,224	# 1 [в])	8,50	3,76	0,243 0,250

[а]) Образцы 2, 3, 4 и 5 имели расстояние между опорами 16 мм. Как первым заметил Джессоп 52 годами позже, в 1921 году, соответствующая ширина по данным второй и третьей колонок была 25,4; 25,0; 10,0 и 13,0 мм, так что сравнение ширины с расстоянием 8 мм от среднего сечения балки до острого ребра опоры показывает, что принцип Сен-Венана не удовлетворяется, т. е. для этих измерений Корню не получил на балке постоянного изгибающего момента. Образцы же 1 и 7 соответствуют требуемым условиям (Jessop 1921, 1).

[б]) Расстояние между опорами было 120 мм.

[в]) Эта полоска имела гораздо бо́льшие размеры: длину 60 см, расстояние между опорами 12 см и нагружена 1 кгс. Два значения ν в этом случае были получены двумя совершенно разными методами: вначале путем непосредственного измерения расстояния между интерференционными полосами, затем другим оптическим методом, основанным на изменении фокусировки параллельных лучей, отражающихся от поверхности до и после деформации.

Интересно заглянуть на 75 лет вперед и сравнить результаты совершенно другого непосредственного оптического определения коэффициента Пуассона для стекла с данными опытов Корню, выполненных в 1869 г. В 1944 г. В. Т. Шимановский (Szymanowski

[1]) Корию, по-видимому, предполагал, что оптическая изотропность влечет за собой упругую изотропию. Однако до сих пор нет ни теоретического, ни экспериментального обоснования этого обычного предположения. Как мы уже видели, Вертгейм, хотя и несколько грубо, но все же верно проверял наличие упругой изотропии. Логика и убедительность были на его стороне.

[1944, 1]) применил метод ультразвуковой дифракции, развитый Клеменсом Шефером и Людвигом Бергманом (Schaefer und Bergmann [1934, 1], [1935, 1]) в 1934 и 1935 гг., для определения постоянных упругости. Сама теория ультразвуковой дифракции, на основании которой интерпретировались результаты, была развита в 1935 г. Фуэсом и Лудлофом (Fues and Ludloff [1935, 1]). Шимановский писал:

«Сильный строго монохроматический источник света освещает поляризованным светом обычную регулируемую щель. После прохождения щели пучок света слегка сводится линзой и проходит через исследуемый прозрачный образец. Образец укреплен на кварцевом пьезокристалле, электроды которого подсоединены к осциллятору переменной частоты. После прохождения через образец и пересечения николя свет образует увеличенное изображение щели, которое наблюдается в микрометрический окуляр микроскопа с нитью в центре поля.

Кварцевый пьезокристалл, возбужденный в одном из своих обертонов, приводит образец в строго продольные резонансные колебания, которые вызывают дифракцию пучка света. Картина дифракции, как это видно в микроскоп, образует в первом порядке линии, расположенные с обеих сторон от центрального изображения щели. В то же время в образце вызываются поперечные колебания, дающие дифракционную картину, которая накладывается на первую. Они также представляет собой две линии, равноотстоящие от центрального изображения. Однако расстояние между этими линиями менее чем в два раза меньше расстояния между линиями, соответствующими дифракции на продольных колебаниях.

Измерение расстояний между параллельными линиями дифракционной картины как продольных, так и поперечных колебаний можно легко и быстро осуществить, а также повторить с помощью подвижного волоска микрометрического окуляра. Эти расстояния являются единственными экспериментальными данными, кроме плотности образца ρ и резонансной частоты ν, необходимыми для определения коэффициента Пуассона σ, модуля сдвига μ и модуля E, поскольку

$$\sigma = \frac{1 - 2\,(d_l/d_t)^2}{2 - 2\,(d_l/d_t)^2}, \qquad \mu = \frac{\nu^2 k^2}{(d_t/2)^2}$$

и

$$E = 2\mu\,(1 + \sigma),$$

где d_l — расстояние между двумя параллельными линиями дифракционной картины продольных колебаний, d_t — аналогичное расстояние для поперечных колебаний, k — постоянная прибора, получаемая калибровкой с помощью решетки с известной постоянной» (Szymanowski [1944, 1], стр. 627).

В балках из мягкого стекла измерение d_l и d_t дало значение коэффициента Пуассона, равное 0,2315, которое весьма близко к средней величине, полученной Корню и равной 0,237. Определение коэффициента Пуассона Шимановским с помощью ультразвука, разумеется, так же как и у Корню, является непосредственным определением, независимым от размеров образца и не требующим отыскания ни E, ни μ. Как можно видеть из приведенного сравнения, Корню основывал свои весьма общие заключения по измерениям на материале, коэффициент Пуассона которого был близок к 1/4, но он не обратил внимания на действительное значение, полученное из его очень точных измерений. Его техника была достаточно точной, чтобы продемонстрировать, что действительное значение

ν примерно на 6% ниже теоретического. Таким образом, результаты Корню могли бы расцениваться по крайней мере как предварительное свидетельство того, что коэффициент Пуассона для стекла при таком точном определении отличается от теоретического значения, а не как экспериментальное подтверждение универсальности константы $\nu=1/4$.

Этот частный эксперимент был рассмотрен здесь только потому, что он использовался для определения коэффициента Пуассона. Как мы увидим в разделе 3.39, использование ультразвука [1]), как экспериментального инструмента, доминировало в исследовании упругих свойств твердых тел на протяжении последних двух десятилетий, подобно тому, как эксперимент Кельвина с двумя проволоками и автоматическая испытательная машина Тарстона была доминирующими в последние двадцать лет XIX века.

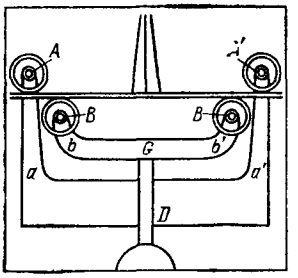


Рис. 3 36. Прибор Мэллока (1879) для неоптического варианта эксперимента Корню. Показан способ получения чистого изгиба балки (в балке вдоль ее оси изгибающий момент постоянен).

Непосредственное определение коэффициента Пуассона Кирхгофом не полностью утратило свое значение в последующие

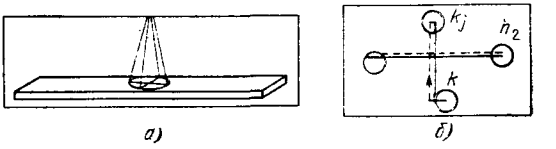


Рис. 3.37. Опыты Мэллона (1879). *а*) Способ крепления проволок; *б*) движение концов проволок, видимое в микроскоп. Эти измерения позволяют найти необходимые для вычисления коэффициента Пауссона радиусы главных кривизн.

годы. Арнульф Мэллок (Mallok [1879, 1]), оценив изобретательность, проявленную в методе Кирхгофа непосредственного определения коэффициента Пуассона на латунных и стальных стержнях, предложил в 1879 г. свой эксперимент, который, возможно, уступая тому в точности, привлекал внимание своей концепцией. Не упоминая имен ни Сен-Венана, ни Корню, Мэллок отметил, что если балка с прямоугольным поперечным сечением, высота которого достаточно мала по сравнению с шириной (и оба эти размера достаточно малы по сравнению с длиной), «нагружена двумя противоположными парами сил, лежащими в плоскости, параллельной одной из пар боковых граней, то другие грани превращаются в однородные антикластические поверхности с главными радиусами кривизны R и $-\mu/R$» (там же, стр. 158) [2]). Затем Мэллок продолжил описание видоизме-

[1]) Сам Шимаиовский иазывал свой эксперимент методом «сверхзвуковой» дифракции вместо используемого в настоящее время слова «ультразвуковой».

[2]) Мэллок (там же, стр. 158) обозиачал коэффициент Пуассона буквой μ.

нения первоначального эксперимента Корню. Соображения точности, разумеется, требовали, чтобы R было достаточно велико. Размеры балок, которые исследовались, были $8'' \times 1 \times 0{,}25''$. Способ приложения Мэллоком моментов [1]) показан на рис. 3.36.

Для определения двух радиусов кривизны вдоль и поперек балки в очень маленькие отверстия, просверленные в плоскости балки и расположенные, как показано на рис. 3.37, *а*, были вставлены четыре тонкие проволоки. Концы проволок находились в поле зрения микроскопа (рис. 3.37), с помощью которого измерялись перемещения, позволяющие вычислить радиусы кривизны.

На основании этих измерений и того факта, что $\nu = -R_1/R_2$, Мэллок мог найти коэффициент Пуассона непосредственно, не используя отношение больших чисел, которое требуется для определения по отдельно найденным E и μ [2].

Он считал особо важным в своем экспериментальном методе возможность определения коэффициента Пуассона как для изотропных, так и для анизотропных материалов. Найденные им значения ν для некоторых металлов, древесины и других материалов приведены в табл. 72.

Таблица 72

Мэллок (1879). Значение ν для различных материалов

Материал	ν	ν_σ	ν_ρ	ν_τ	Материал	ν	ν_σ	ν_ρ	ν_τ
Сталь	0,253				Парафин	0,50			
Латунь	0,325				Алебастр парижский	0,181			
Медь	0,348				Картон	0,2			
Свинец	0,375				Пробка	0,00			
Цинк (прокатный)	0,180				Самшитовое дерево	—	0,42	0,406	
Цинк (литой)	0,230				Буковое дерево	—	0,53	0,408	
Эбонит	0,389				Древесина (белая сосна)	—	0,486	0,372	0,227
Слоиовая кость	0,50								
Индийский каучук	0,50								

Заключение, сделанное Мэллоком в 1879 г. о том, что теория Пуассона не только несправедлива для твердых тел, но представляет лишь «некоторый исторический интерес», предполагало конец дискуссии по поводу одно- и мультиконстантной упругости. Однако

[1]) Ариульф Мэллок был продолжительное время близким другом лорда Рэлея, в лаборатории которого он работал некоторое время в качестве ассистента (Strutt [1968, 1]).

это было далеко не так, несмотря на то, что Эверетт (Everett [1875, 1], [1891, 1]) [1]) в своей «*C.G.S. системе единиц*» охарактеризовал данные Мэллока 1879 г. как «последний» экспериментальный факт в пользу мультиконстантной упругости.

3.22. Эксперименты Фохта по изучению изотропности стекла и определению для него значений модулей упругости (1882)

В 1879 г. Баушингер (Bauschinger [1879, 1]), а в 1883 г. Томлинсон (Tomlinson [1883, 1]) исследовали вопрос о точности коэффициента Пуассона, вычисленного по экспериментально определенным E и μ. Описанные выше опыты Баушингера заключались в непосредственном определении поперечного сужения и продольного удлинения, которые он мог сопоставить с модулями, определенными при кручении, сжатии и растяжении тех же самых образцов. Его опыты вызвали серьезные сомнения относительно достоверности значения ν, определенного по найденным из опыта E и μ.

Томлинсон сравнивал опытные значения модулей и вычисленные по ним значения коэффициента Пуассона для отожженных и холоднотянутых образцов железа, стали для фортепьянных струн, платины, мельхиора, меди, сплава платины и серебра, латуни, цинка, серебра, алюминия и свинца. Был обнаружен большой разброс вычисленных таким образом значений коэффициента Пуассона для некоторых из отожженных образцов, например для мельхиора, а особенно для холоднотянутых металлов, для которых вычисленные значения принимали как совсем малые значения, так и намного превосходящие 1/2. Девять из полученных Томлинсоном значений коэффициента Пуассона были вычислены для металлов в отожженном состоянии. Томлинсон, так же как до него Вертгейм, усреднил эти значения; однако вместо 1/3 он получил для рассмотренных металлов среднее значение коэффициента Пуассона, равное 0,2515, «число, хорошо согласующееся со значением, приписывавшимся Пуассоном всем твердым телам» [2]) (Tomlinson [1883, 1], стр. 29).

В 1878 г. Сен-Венан подвел итоги экспериментальным данным тех, кто еще оставался стойкими сторонниками атомистической теории Пуассона — Коши, по которой коэффициент Пуассона для изотропных твердых тел должен был быть равен 1/4. После изучения того, как в экспериментах с одномерно напряженными анизотропными телами анизотропия приводит к зависимости от направления значений постоянных упругости, он указал, что вычисленные или непосредственно определенные значения коэффициента Пуассона могут изменяться в широких пределах. Сравнивая данные для медных стержней, опубликованные в январском выпуске 1878 г. Phi-

---

[1]) Я имел возможность получить четвертое издание этого тома, опубликованного в 1891 г., на которое я здесь и ссылаюсь.

[2]) Томлинсон обозначал коэффициент Пуассона буквой σ.

losophical Magazine [1]), согласно которым ν принимает значения от 0,40 до 0,23, со значениями $\nu=0{,}26$ и $\nu=0{,}23$ для флинтгласа и $\nu=0{,}27$ для железа, он заключил, что использованные в опытах медные образцы, так же как и металлические образцы в экспериментах Вертгейма, для которых было найдено $\nu=1/3$, были анизотропны и что только образцы из железа и в особенности из стекла были на самом деле изотропными. Это основывалось главным образом на соображениях, приведенных в описанной выше работе Корню [2]), который без доказательств утверждал, что его стеклянные образцы были действительно изотропны.

В 1882 г. Фохт (Voigt [1882, 1]) подверг критике предположение Корню, указав, что простая констатация прозрачности, без других подтверждений, не дает оснований для такого заключения относительно изотропии упругих свойств. Однако он утверждал и доказал, что решить этот вопрос можно, подвергнув испытаниям на кручение и изгиб образцы с разной ориентацией, вырезанные из стеклянной пластины с различной глубины в ней. При изгибе нейтральная плоскость выбиралась параллельной короткой или длинной стороне прямоугольного поперечного сечения образца. Таким образом, сравнивая определенные в опыте значения E и μ и вычисленные по ним значения коэффициента Пуассона, он мог установить, что действительно имел дело с изотропным твердым телом. Хотя испытания на изгиб и кручение делались на одних и тех же образцах, они не проводились одновременно, как в экспериментах Кирхгофа. Детали установки Фохта были разработаны им самим и описаны в его докторской диссертации в 1876 г., посвященной определению постоянных упругости каменной соли.

В своих последующих экспериментах Фохт для достижения еще большей точности, необходимой для того, чтобы можно было судить об изотропии по численным значениям постоянных упругости, полученных для образцов с различной ориентацией, вырезанных из различных мест исследуемой стеклянной пластины, вынужден был быть еще более точным в определении размеров образцов, в

---

[1]) Эти данные помещены в виде таблицы в статье лорда Уильяма Томсона (Кельвина) (Sir William Thomson (Kelvin) [1857, 1], [1878, 1], стр. 18), в которой он приводит данные Вертгейма, Эверетта, Кирхгофа и Максвелла, ссылаясь на повседневный опыт в качестве обоснования нулевого значения коэффициента Пуассона для пробкового дерева. В таблицу включены также значение коэффициента Пуассона для резины, меньшее 0,5, полученное Джоулем, и приведенная Кельвином без ссылок подборка значений коэффициента Пуассона для меди от 0,23 до 0,40. Бо́льшая часть этих численных значений, которые обсуждались выше, была получена для флинтгласа, латуни, тянутой латуни, меди, железа, стали, литой стали и резины.

[2]) Если принять во внимание значение, которое придавал Сен-Венан «искусному эксперименту Корню», оставаясь в то же время стойким приверженцем теории одной постоянной упругости, поучительно то, что он не заметил несоответствия условию применимости его собственного принципа эквивалентных нагрузок, т. е. принципа Сен-Венана, соотношений размеров четырех из шести балок, исследованных Корню (см. Jessop [1921, 1], стр. 552).

особенности размеров поперечных сечений. С помощью микрометра и скользящего устройства ему удалось достичь точности в 0,001 мм для каждого из отдельных измерений, производившихся через равные интервалы вдоль стержня. По его оценке определение им размеров было настолько точным, что относительная ошибка в определении отдельной постоянной упругости лежала в пределах 1/300 [1]).

Я выбрал относящиеся к нашему обсуждению результаты из обширных таблиц Фохта для измерений при кручении и изгибе девяти образцов, вырезанных из пятидесятимиллиметровых по толщине пластин, изготовленных из «зеленоватого стекла» с удельным весом 2,540 (и показателем преломления 1,55). Он отметил, что, несмотря на значительную толщину, в поляризованном свете стекло оставалось бесцветным [2]). Начиная с глубины 6 мм, стекло оказалось вполне изотропным, о чем судил Фохт на основании сравнения значений модуля упругости при сдвиге, определенного в девяти опытах при шести различных комбинациях длины образца и его ориентации в пластине, как это видно из данных табл. 73. Образцы, обозначенные в таблице символами I и II, были вырезаны вблизи поверхности и имели постоянные упругости, отличные от постоянных упругости для образцов с большей глубины. Для последних среднее значение коэффициента Пуассона составило 0,213 при наименьшем 0,211 и наибольшем 0,218.

Аналогичные исследования для «белого зеркального рейнского стекла» (удельный вес 2,56, показатель преломления 1,53) дали результаты, также приведенные в табл. 73, для которых среднее значение коэффициента Пуассона составило 0,2085. Между прочим, Фохт сравнивал свои результаты, полученные в опытах по кручению образцов прямоугольного сечения, с соответствующими данными, полученными на основе теорий Сен-Венана и Коши, относительные достоинства которых были предметом спора за 30 лет до того, и нашел, что лишь теория Сен-Венана находится в близком согласии с экспериментом.

Фохт сделал вывод, что для твердого тела, для которого экспериментально показана его почти полная изотропность, обнаруживаются отклонения значения коэффициента Пуассона от теоретического значения 1/4. Вместо этого значения для двух рассмотренных им видов стекла были получены меньшие значения, а именно 0,2130 и 0,2085 соответственно. Фохт, таким образом, экспериментально установил, что доводы Сен-Венана относительно данных Корню неприемлемы. Мы еще раз убедились, что никому не следует просто,

---

[1]) Любопытно, что, стремясь к таким высотам точности, Фохт был склонен сравнивать измерения, сделанные при различных (в пределах 20°C) температурах, на том основании, что в этом промежутке разброс пренебрежимо мал. На самом же деле, однако, я оценил возможную из-за этого ошибку и обнаружил, что она больше, чем ошибка в 1/300, полученная при определении размеров.

[2]) Фохт благодарит Неймана за то, что он рекомендовал поручить изготовление стекла Гино (Guinaud) в Париже.

Таблица 73

Фохт (1882)

Образец	Изгиб: база прибора (мм)	Изгиб: θ (°C)	Изгиб: E (гс/мм²)	Кручение: база прибора (мм)	Кручение: θ (°C)	Кручение: μ (гс/мм²)	Среднее E/μ	ν	Примечания
Первая серия: зеленоватое стекло									
I	64,1	14	6 430 000	48,4	13	2 635 000	2,438	0,220	Короткие стороны поперечного сечения параллельны плоскости пластины; образцы вырезаны непосредственно под поверхностью пластины
		13	6 420 000					0,218	
II	64,1	13	6 445 000	48,85	13	2 645 000	2,426	0,219	
			6 440 000					0,218	
III	64,1	13	6 480 000	47,82	14	2 670 000	2,426	0,214	Такая же ориентация, как и в случаях I и II; образцы вырезаны из середины по толщине пластины
		13,7	6 480 000	48,5		2 672 000		0,212	
				24,65		2 675 000		0,211	
IV	64,1	13,7	6 460 000	64,75	13	2 665 000	2,421	0,212	
				25,75		2 677 000		0,206	
V	62,0	14	6 490 000	44,9	13	2 680 000	2,422	0,211	Длинные стороны параллельны плоскости пластины; образец вырезан на глубине около 8 мм от поверхности пластины
VII	66,1	12	6 460 000	48,1	13	2 665 000	2,432	0,212	Квадратное поперечное сечение
			6 480 000					0,216	
			6 505 000					0,221	
VIII	72,0	13	6 470 000	48,3	12	2 665 000	2,428	0,214	Длинные стороны параллельны плоскости пластины
IX	72,0	12,3	6 490 000	47,2	15	2 660 000	2,436	0,219	
	68,0	13	6 475 000					0,217	
						Среднее		0,215	
Вторая серия: белое зеркальное стекло									
AI	62	13	7 375 000	44,75	12,5	3 040 000	2,426	0,213	Короткие стороны параллельны поверхности пластины
AII	62	13	7 340 000	43,5	13	3 040 000	2,414	0,207	
BI	62	11	7 350 000	45,9	12	3 040 000	2,418	0,209	Длинные стороны параллельны поверхности пластины
BII	62	13	7 365 000	47,2	12	3 055 000	2,411	0,206	
						Среднее	2,417	0,2085	

на основании соображений *ad hoc*, пренебрегать данными, которые не согласуются с чьими-то предположениями, без особых экспериментальных доказательств того, что некоторое непроверенное обстоятельство, такое, например, как неучтенная анизотропия, объясняет недостаток согласия между опытом и теорией.

3.23. Определение отношения значений постоянных упругости по первой и второй частотам свободных колебаний пластины, выполненное Меркадье (1888)

Совсем другой подход к проблеме определения коэффициента Пуассона и, следовательно, применимости атомистической теории Пуассона — Коши был предложен в 1887 г. Меркадье и опубликован в мемуаре 1888 г.[1]). Определив опытно первые две собственные частоты круглых стальных пластин, он с помощью аналитических результатов Кирхгофа (Kirchhoff [1850, 1]) получил отношение постоянных Ламе: λ/μ. Пусть n — резонансная частота, n_0 — первая собственная частота, n_1 — вторая собственная частота $\theta=\lambda/(2\mu)$, e — толщина диска, l — диаметр, E — модуль упругости, δ — плотность, d — число диаметральных узловых линий, c — число узловых окружностей; тогда, согласно теории Кирхгофа,

$$n=f(\theta,\ d,\ c)\sqrt{\frac{E}{\delta}\frac{(1+2\theta)^2}{(1+\theta)(1+3\theta)}}\frac{e}{l^2}, \tag{3.3}$$

$$\frac{n_1}{n_0}=\frac{f(\theta,\ 0,\ 1)}{f(\theta,\ 2,\ 0)}. \tag{3.4}$$

Для ряда значений θ, указанных в табл. 74, могут быть вычислены значения отношения n_1/n_0 [2]).

Таблица 74

$\theta=\dfrac{\lambda}{2\mu}$	0,50	0,60	0,70	0,80	0,838	0,90	1,00
$\dfrac{n_1}{n_0}$ или $\dfrac{f(\theta,\ 0,\ 1)}{f(\theta,\ 2,\ 0)}$	1,615	1,641	1,665	1,687	1,695	1,708	1,729

Если бы значение коэффициента Пуассона равнялось 1/4, то θ равнялось бы 0,50, а отношение второй собственной частоты к

[1]) Mercadier [1888, 1]. На самом деле, похожие опыты по определению двух первых собственных частот круглых пластин, также в связи с коэффициентом Пуассона, были проведены на тридцать шесть лет раньше, в 1851 г., Вертгеймом (Wertheim [1851, 1]). См. выше раздел 3.18.

[2]) См. формулу (3.5) из раздела 3.24.

первой равнялось бы 1,615. С другой стороны, если полученное Вертгеймом значение коэффициента Пуассона, равное 1/3, было бы верным, то θ равнялось бы 1, а отношение частот n_1/n_0 равнялось бы 1,729. Для проверки возможностей такого эксперимента Меркадье провел серию предварительных опытов с дисками из литой стали, способ производства, состав и физические свойства которой были ему неизвестны. В результате этих предварительных исследований он получил для стали значение модуля упругости $E=20\,608$ кгс/мм², замечательно близкое к принятому сейчас значению. Меркадье нашел также, что значение отношения $\lambda/\mu=2$ согласуется с предположением Вертгейма. За этими частотными измерениями последовала серия тщательно выполненных экспериментов с шестью специально изготовленными дисками из стали хорошо известного состава, физических свойств и способа производства. В табл. 75 приведено описание Меркадье этих видов стали, от очень мягких до твердых, включающее их химический состав, предел упругости, определенный квазистатическим методом, предел прочности, упругое удлинение и модуль упругости.

Таблица 75

Меркадье (1888)

	Сталь	Предел упругости [a]	Предел прочности [a]	Упругое удлинение [b]	Модуль упругости [b]	Углерод	Кремний	Сера	Фосфор	Марганец
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Очень мягкая	23,5	36,5	0,0520	19 250	0,12	0,022	0,066	0,058	0,26
2	Очень мягкая	23,2	35,5	0,0500	20 000	0,12	0,022	0,066	0,058	0,26
3	Полутвердая	31,8	52,0	0,0500	20 000	0,43	0,125	0,026	0,028	0,51
4	Полутвердая	26,5	50,5	0,0512	19 550	0,43	0,125	0,026	0,028	0,51
5	Твердая	39,8	70,1	0,0472	21 170	0,64	0,160	0,032	0,033	0,71
6	Твердая	40,2	69,4	0,0495	20 200	0,64	0,160	0,032	0,033	0,71

[a] Численные значения в столбцах 2, 3, 5 представлены в кгс/мм².

[b] Численные значения в столбце 4 соответствуют 1 м длины при напряжении 1 кгс/мм²; они определялись на длине всего 200 мм, поэтому значения *статического* модуля упругости в столбце 5 не дают большой гарантии точности.

Как пояснил Меркадье в своем примечании к таблице, образцы, вырезанные из дисков, были по необходимости настолько короткими, что значение квазистатического модуля упругости следует рассматривать просто как указание на порядок величины этой упругой постоянной. Отношение n_1/n_0 было определено экспериментами для каждого диска методом биений. Две первые собственные частоты каждого диска сравнивались с частотами хорошо откалиброванных,

выверенных камертонов. Результаты для шести видов стали показаны в табл. 76.

Таблица 76

Меркадье (1888)

	Сталь	n_1	n_0	n_1/n_0	Среднее n_1/n_0
1	Очень мягкая	903,0	528	1,710	1,710
2	Очень мягкая	901,0	526,8	1,710	
3	Полутвердая	899,4	530	1,694	1,6966
4	Полутвердая	898,8	530,4	1,697	
5	Твердая	906,0	524,65	1,727	1,7275
6	Твердая	906,2	524,4	1,728	

Из сравнения этих результатов с предсказаниями теории Кирхгофа (см. табл. 74) видно, что для дисков 1 и 2 $\lambda=1{,}8\ \mu$, для дисков 3 и 4 $\lambda=1{,}7\mu$ и для дисков 5 и 6 $\lambda=2\mu$, чему соответствуют значения коэффициента Пуассона $\nu=0{,}321$, $\nu=0{,}315$, $\nu=0{,}333$. Отсюда Меркадье заключил, что, если значение отношения λ/μ, равное единице, было бы, как указывал Сен-Венан, признаком изотропии упругого тела, описанные выше виды стали были бы заведомо неизотропными. Однако, отмечал он, для различных видов стали, от очень мягкой до твердой, с различными химическими составами, пределами прочности и пределами упругости, найденные им в опытах значения λ/μ были замечательно близки между собой. Это, конечно, давало серьезные основания считать, что, как это теперь известно, коэффициент Пуассона не равен 1/4 для всех изотропных тел. Значения, полученные Меркадье, были несколько выше, чем принятое сейчас в качестве среднего для стали значение Кирхгофа $\nu=0{,}294$, но, конечно, были в пределах значений для разных видов стали, полученных Баушингером в 1879 г.

3.24. Эксперименты Амага с использованием пьезометра (1884—1889)

Несмотря на возрастающее число опытных свидетельств того, что на самом деле коэффициенты Пуассона различных твердых тел различны, многие теоретики и экспериментаторы упорно не хотели оставить мысль о том, что теоретическое соответствие между атомистической и континуальной концепциями, приведшее к формулам Коши, неприменимо к инфинитезимальным деформациям обычных твердых тел.

Одним из таких экспериментаторов был Эмиль Илэр Амага (Amagat [1884,1]), который даже в 1884 г. перед лицом все большего количества данных, включая некоторые из его собственных, все

еще оставаясь верным экспериментам Каньяра де Латура (1828) и Корню (1859), считал, что коэффициент Пуассона идеально упругого тела обязательно должен быть равен 1/4. В дополнение к обычному, отвергнутому, как мы видели, к концу 80-х гг. Фохтом на основании опытов с двумя видами стекла допущению, что ошибка частично объясняется скрытой анизотропией, Амага выдвинул в качестве настолько же важной причины, объясняющей отличие поведения реальных твердых тел от поведения «идеальных», недостаточную упругость, т. е. неучтенные малые остаточные деформации. Любопытно, что большинство из тех, кто не хотел признавать следствия все умножающихся экспериментальных данных, почти неизменно подвергали безосновательной критике Вертгейма, словно то, что он нашел значения коэффициента Пуассона для нескольких рассмотренных им твердых тел, прибилизительно равные 1/3, каким-то странным образом служило веским опровержением любого эксперимента, дающего значение коэффициента Пуассона, заметно отличающееся от 1/4. Я напомню читателю (см. выше раздел 3.19), что Вертгейм, проведя по этому вопросу наиболее широкие эксперименты, сам утверждал, еще за двадцать-тридцать лет до этих споров, что полученное им значение коэффициента Пуассона, равное приблизительно 1/3, относится только к рассмотренным им твердым телам и вовсе не является единым значением, общим для всех металлов [1]).

В 1884 г. Амага определил значения коэффициента Пуассона для резины. Как мы уже видели, этот же материал изучал Вертгейм в своих опытах, в которых он измерял поперечное сужение и осевое удлинение резиновых стержней. Он подчеркнул, что рассматривает эти предварительные эксперименты как ответ Рено, который годом раньше впервые поднял вопрос относительно применимости теории Пуассона — Коши. Первоначально Вертгейм хотел просто показать, что коэффициент Пуассона для некоторых материалов при малых напряжениях на самом деле не равен 1/4. Затем он обратился к своим пьезометрическим экспериментам по изучению стекла и латуни. Этими последними экспериментами восполь-

---

[1]) Интересно, что в многочисленных как посмертных, так и до его смерти в 1861 г. отрицательных критических высказываниях по адресу Вертгейма никогда не было подлинного обсуждения деталей его экспериментов или какой-либо аргументации для нередко язвительных нападок и непризнания достоверности, которые так часто вызывали его эксперименты 1849 г. Интересно также отметить, что современный исследователь, усредняя значения коэффициента Пуассона для отдельных твердых тел, получает значение, приблизительно равное 1/3, при больших, конечно, различиях между значениями, относящимися к отдельным материалам. Возможно самое значительное критическое замечание, которое следовало бы сделать по адресу Вертгейма — это то, что он находился под чрезмерным влиянием своих собственных усреднений. Этот упрек было бы трудно поставить на один уровень с упреком в адрес большинства его критиков, которые сами обычно ограничивались очень небольшим числом измерений и при этом исходили из какой-либо одной частной точки зрения.

зовался в 1884 г. Амага (Amagat [1884,1]) при своем изучении резины. Его пьезометр был сконструирован подобно изготовленному на 40 лет раньше пьезометру Рено, в котором давление могло быть приложено внутри и (или) снаружи цилиндра или сферы.

В опытах Амага, однако, установка была достаточно большой, для того чтобы две сферы из различных материалов могли быть помещены одна рядом с другой и, таким образом, могли быть проведены тонкие сравнительные измерения. Две сферы, участвующие в этих экспериментах, были изготовлены из резины и из бронзы.

Обозначив через χ величину, обратную коэффициенту объемной сжимаемости, через α — величину, обратную модулю упругости E, через λ и μ — постоянные Ламе, Амага (Amagat [1884,1]) заметил, что коэффициент Пуассона для изотропного тела определяется формулой

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \tag{3.5}$$

Справедливы также следующие соотношения между коэффициентом объемной сжимаемости и величиной, обратной модулю упругости:

$$\chi = 3\alpha(1-2\nu) \tag{3.6}$$

и соответственно между обратной модулю E величиной и модулем сдвига:

$$\frac{1}{\alpha} = \mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}. \tag{3.7}$$

Если сравнивать два различных тела, как это делалось в пьезометрических экспериментах Амага, то отношение коэффициентов объемной сжимаемости двух геометрически одинаковых сфер выражается формулой

$$\frac{\chi}{\chi'} = \frac{\alpha(1-2\nu)}{\alpha'(1-2\nu')}, \tag{3.8}$$

где величины со штрихом и без штриха относятся к разным телам.

В первом опыте Амага заметил, что очень малая величина внешнего давления увеличивает на 300 делений уровень воды в капиллярной трубке, присоединенной к резиновой сфере, в то время как в капиллярной трубке, присоединенной к бронзовой сфере, та же самая величина давления даже почти не вызывает движения мениска. Отсюда он сделал вывод, что, каков бы ни был коэффициент Пуассона для бронзы, отношение α к α' очень велико, т. е. модуль упругости резины чрезвычайно мал по сравнению с модулем упругости бронзы.

Он провел опыты непосредственно на растяжение с образцами из этих двух материалов и нашел, как это уже было известно из экспериментов Вертгейма и других, что отношение модулей упругости

бронзы и резины равно 60 000. Сжимая каждую сферу (сферическую оболочку) одновременно извне и изнутри, он затем отметил, что изменения внутреннего объема должны быть пропорциональны величинам χ и χ' и, следовательно, χ значительно больше, чем χ'. Так как эффект сжимаемости воды был ничтожным, он ожидал, что жидкость в капиллярной трубке резиновой сферы снова поднимется, но ничего подобного не произошло; на самом деле, каким бы ни было давление, уровень воды понижался. Отсюда он заключил, что резина должна быть на самом деле несжимаемой, с коэффициентом Пуассона $\nu=1/2$.

Ошибочно полагая, что Вертгейм установил коэффициент Пуассона для резины равным 1/3, хотя тот на самом деле нашел только, что он не равен 1/4 (см. рис. 3.28), Амага подчеркивал, что предположение о равенстве коэффициента Пуассона для рассмотренных им двух твердых тел 1/3 совершенно несовместимо с его пьезометрическими наблюдениями над резиной. В соответствии с этим он вместо рассмотрения своих экспериментальных результатов как подтверждения того, что при малых деформациях резина, по существу, несжимаема, видел в них только доказательство того, что по крайней мере для одного материала коэффициент Пуассона не равен 1/3. То обстоятельство, что он не равен и 1/4, как того требует теория Пуассона — Коши, Амага приписывал тому, что, возможно, сами уравнения (3.5) — (3.8) в действительности неприменимы.

В работе 1888 г. Амага [1]) описал пьезометрические эксперименты для стали и бронзы, в которых вместо сферических оболочек использовались цилиндрические оболочки Рено. Два изучаемых образца изготавливались из одного и того же металла и имели равные внутренние, но различные внешние радиусы. Образцы в виде цилиндрических оболочек содержали «абсолютно неподатливые» плоские основания. С целью добиться минимальной ошибки использовалась вода максимальной плотности — в ванне поддерживалась температура 4°С. Следуя той же методике, что и в описанных выше экспериментах для резины и бронзы, он получил для двух стальных цилиндров значения коэффициента Пуассона $\nu=0{,}2609$ и $\nu=0{,}2620$, а для бронзовых цилиндров — значения $\nu=0{,}3190$ и $\nu=0{,}3204$. Он отметил, что эти значения точны, если только анализ эксперимента верен. Его любопытный вывод заключался в том, что, поскольку полученное им значение для стали так близко к 1/4 и, следовательно, находится в согласии с экспериментами Корню для стекла, то тем самым его опыты подтверждают, что сталь, так же как и стекло, является почти совершенным изотропным телом.

---

[1]) Amagat [1881, 1]. Эмиля Илэр Амага вспоминают в первую очередь, в связи с его исследованиями сжимаемости газов и жидкостей в области давлений до 3000 кгс/см^2 и температур до 200°С. В главной работе по этим вопросам, названной Бриджменом «классической работой Амага» [1893, 1], он подвел итоги своих исследований за период продолжительностью почти 25 лет.

Тот факт, что для бронзовых цилиндров получены другие значения, он объяснял тем, что они были отлиты вертикально и, поскольку они были также и охлаждены в этом положении, приобрели структуру, обеспечившую различие упругих свойств в вертикальном и поперечном направлениях, т. е. приобрели анизотропию, имеющую, как он полагал, ту же природу, что и анизотропия цилиндров Вертгейма, полученных на волочильной машине. Вследствие всего этого Амага, считая сталь изотропной, сделал вывод, что, поскольку его результаты сопоставимы с результатами Корню, теория Пуассона — Коши и в самом деле может рассматриваться как подтвержденная экспериментально [1]). Что касается металлов, то относительно них Амага в действительности лишь поднял несколько вопросов, касающихся изотропии литой бронзы.

В 1889 г. в связи с изучением сжимаемости жидкой ртути Амага провел совместные пьезометрические эксперименты для стекла и хрусталя (Amagat [1889,1, 3], см. также [1888,1,2], [1889,2] и [1890, 1]). Свои данные он сравнил с данными, полученными в таких же экспериментах Мишеля Кантоне [2]). Кантоне получил для четырех стеклянных цилиндров следующие значения коэффициента Пуассона, ν: 0,246; 0,261; 0,264 и 0,256, со средним значением 0,257. В другой серии экспериментов с цилиндрами Амага определял коэффициент удлинения α и коэффициент всестороннего сжатия χ для стекла и хрусталя и, кроме того, коэффициенты кажущейся и абсолютной сжимаемости для ртути (Amagat [1889,1]). Эти данные приведены в табл. 77.

В том же 1889 г. Амага, используя пьезометры, распространил свои исследования сжимаемости на сталь, медь, латунь, дельта-металл и свинец в дополнение к описанным выше стеклу, бронзе и хрусталю. Для этих твердых тел он также применил то, что он называл «методом Вертгейма», используя ту же аппаратуру, что и для стекла и хрусталя, с приспособлением, которое позволяло производить измерения удлинений цилиндров непосредственно микрометрическими винтами совершенно независимо от движений установки. Эти два метода обеспечили самостоятельное (независимое) получение значений коэффициента Пуассона ν, коэффициента объемной сжимаемости χ и величины α, обратной модулю упругости E. Эти экспериментальные данные для семи твердых тел приведены в табл. 78.

Остальная часть работы Амага представляет собой попытку объяснить тот факт, что только для стекла, хрусталя и, возможно, для

---

[1]) Амага подвергал свои цилиндры для определения E также продольному растяжению.

[2]) Cantone [1881, 1]. Амага называл его Cautone и говорил, что его работа была «un travail très intéressant, de très peu postérieur à ma première Note sur ce sujet» («очень интересной работой, появившейся намного позже моей первой заметки по этому вопросу»). Французская и итальянская статьи были опубликованы фактически одновременно.

Таблица 77

Амага (1889)

Номер цилиндра	Хрусталь и стекло			Ртуть	
	коэффициент Пуассона ν	коэффициент удлинения	коэффициент объемной сжимаемости	коэффициент кажущейся сжимаемости	коэффициент абсолютной сжимаемости
Стекло					
1	0,2476	0,000001434	0,000002202	0,000001696	0,000003898
2	0,2450	0,000001437	0,000002200	0,000001680	0,000003880
3	0,2428	0,000001419	0,000002190	0,000001744	0,000003934
Среднее	0,2451	0,000001430	0,000002181	0,000001707	0,000003904
Хрусталь					
1	0,2538	0,000001604	0,000002369	0,000001547	0,000003916
2	0,2481	0,000001603	0,000002423	0,000001502	0,000003925
3	0,2534	0,000001624	0,000002403	0,000001470	0,000003937
4	0,2443	0,000001580	0,000002424	0,000001530	0,000003954
Среднее	0,2499	0,000001602	0,000002405	0,000001512	0,000003933
				Общее среднее для ртути:	0,000003918

Таблица 78

Амага (1889)

	Коэффициент Пуассона			Коэффициент объемной сжимаемости	Модуль упругости $(1/\alpha)$ (кгс/мм²)		
	первый метод	второй метод	среднее		первый метод	второй метод	среднее
Стекло	0,2451	—	0,2451	0,000002197	6 775	—	6 775
Хрусталь	0,2499	—	0,2499	0,000002405	6 242	—	6 242
Сталь	0,2694	0,2679	0,2686	0,000000680	20 333	20 457	20 395
Медь	0,3288	0,3252	0,3270	0,000000857	11 979	12 312	12 145
Латунь	0,3305	0,3236	0,3275	0,000000953	10 680	11 022	10 851
Дельта-металл	0,3333	0,3468	0,3399	0,000001021	12 054	11 331	11 697
Свинец	0,4252	0,4313	0,4282	0,000002761	1 626	1 493	1 556

стали значения коэффициента Пуассона оказались достаточно близкими к $\nu=1/4$, с целью придать некоторую достоверность теории Пуассона — Коши, преданным последователем которой Амага был

даже еще в 1889 г. С обычными ссылками на скрытые ошибки Амага все еще полагал, что вывод Вертгейма «абсолютно неприемлем», но находил трудным относить полученные Вертгеймом значения коэффициента Пуассона исключительно за счет «пороков изотропии».

Он высказывал сомнение в том, что свинец действительно является твердым телом и рассуждал о том, может или нет коэффициент Пуассона стремиться к теоретическому пределу 1/4 при давлении, стремящемся к нулю, хотя, как он вполне понимал, эта гипотеза не подтверждалась опытом. Он предполагал, что если в опыте получены более высокие, чем теоретическое, значения коэффициента Пуассона, то следует считать исследовавшиеся твердые тела неидеальными. Другими словами, если бы было можно достичь состояния полной изотропии и идеальной упругости какого-либо твердого тела, то следовало бы ожидать получения в экспериментах теоретического значения. Амага считал, игнорируя убедительные эксперименты со стеклом Фохта 1882 г. [1]), что стекло является наиболее идеальным твердым телом, а свинец и резина наиболее отличны от идеального. Он утверждал:

«Идеальное твердое тело, согласно точке зрения, имевшей место до нас, должно иметь коэффициент ν равным точно 0,25; если это действительно выполняется, такое тело будет удовлетворять двойному условию — быть одновременно абсолютно упругим и абсолютно изотропным» (Amagat [1889, 2], стр. 1202).

3.25. Эксперименты Бока по изучению зависимости значения коэффициента Пуассона от уровня температуры (1894)

В 1894 г. Адальберт Михель Бок (Bock [1894,1]) предположил, что коэффициент Пуассона при малых деформациях должен возрастать с ростом температуры, достигая значения 1/2 в точке плавления. Клеменс Шефер (Schaefer [1902,1]) в 1902 г. приписывал это предположение как Боку, так и Джорджу Габриэлю Стоксу; при этом он не ссылался на какие-либо работы Стокса [2]). Бок считал, что экспериментальное доказательство этого факта во многом прольет свет на атомно-молекулярное строение твердых тел. Сожалея о том, что он не был в состоянии определить коэффициент Пуассона во всем диапазоне от низкой температуры «кипящего водорода» до точки плавления, он ограничил свои эксперименты определением того, могут ли быть установлены какие-либо зависимости в области температур от 0 до 150°C. Шефер, также придерживавшийся, как мы увидим, этой гипотезы «точки плавления», определил коэффициент Пуассона при комнатной температуре для материалов с предельно низкими температурами плавления, таких, как селен, сплавы Ву-

[1]) Voigt [1882, 1]. См. также эксперименты Фохта с каменной солью [1876, 1], [1884, 1].

[2]) Хвольсон (Chwolson [1908, 1]) также приписывает предположение Бока Стоксу и тоже не ссылается на работу последнего.

да и Липовица, получив значения между 0,45 и 0,49, которые, по-видимому, придали этой гипотезе некоторую достоверность. Только несколько лет спустя, в 1910 г., Грюнайзен (Grüneisen [1910,2]) убедительно опроверг гипотезу «точки плавления».

Тем не менее работа Бока о зависимости коэффициента Пуассона от температуры представляет сама по себе интересный первый подход к изучению важного явления. Он повторил с большей точностью эксперименты Кирхгофа тридцатипятилетней давности, определяя коэффициент Пуассона непосредственно из опытов на совместное действие кручения и изгиба способом, независящим от размеров поперечного сечения образца. Поскольку система зеркал и все другие детали эксперимента были воспроизведены в точности, интересующемуся нужно только обратиться к описанной выше работе Кирхгофа 1859 г. Для проведения опытов при различных температурах Бок поместил установку в железный ящик в виде прямоугольного параллелепипеда, который находился в ящике большего размера, так что пространство между стенками ящиков могло нагреваться. Сославшись на то, что Кирхгоф стоял перед проблемой рассмотрения противоположных мнений Пуассона и Вертгейма, которая была совершенно определенно решена в пользу последнего, но с различными коэффициентами Пуассона для каждого материала, Бок вновь изучил вопрос, действительно ли в результате эксперимента Кирхгофа может быть получено абсолютное значение коэффициента Пуассона. Он отметил, что, так как уточненные результаты отличаются от первоначальных самое большее на 1%, в то время как отклонения, обусловленные индивидуальными особенностями образцов, превышают эту величину, необходимо еще более тщательно учитывать термическую предысторию и такие явления, как термоупругое последействие, которое, конечно, могло влиять на результаты экспериментов.

Обозначив через T меру влияния кручения в делениях шкалы, полученную при рассмотрении в телескоп отражения зеркальца, через B — вклад изгиба в тех же делениях шкалы, через $2s$ — полную длину изучаемого образца и через $4l$ — общую длину плеч двух расположенных друг против друга рычагов, на концах которых прикладывалась нагрузка, Бок дал следующее простое линейное выражение для коэффициента Пуассона изотропного твердого тела, подчиняющегося закону Гука:

$$\nu = \frac{T}{B} \cdot \frac{s}{2l} - 1. \tag{3.9}$$

Свои первые эксперименты Бок провел с круглым цилиндрическим стержнем с диаметром 3,38 мм, изготовленным из твердой английской стали. Половина длины стержня s была равна 149,3 мм, а плечо рычага $2l$ было равно 140 мм. Величины B, T и коэффициент Пуассона ν, полученные в этих экспериментах, приведены в табл. 79. Измерения проводились в двух узких областях температуры —

вблизи 22 и 120°С и повторялись в указанные в таблице моменты времени, причем приложенная нагрузка равнялась 100 гс. Для определения T и B Бок использовал два телескопа. Интересующийся читатель может обратиться за подробностями к оригинальной работе (Bock [1894,1]).

Таблица 79

Бок (1894)

t°C	B	T	ν	Дата и час
22	23,34	28,05	0,282	4 декабря, 11 ч.
120	24,19	28,98	0,278	4 декабря, 12 ч.
22	23,31	27,96	0,279	5 декабря, 9 ч.
20	23,33	27,92	0,276	7 декабря, 4 ч.
120	24,13	28,87	0,276	10 декабря, 5 ч.

Эксперименты, проведенные 4 и 5 декабря, были повторены через несколько дней с увеличением приложенной нагрузки до 200 гс. Бок выразил большое удивление по поводу того, что полученный коэффициент Пуассона не зависел от температуры, т. е. вопреки его ожиданиям коэффициент Пуассона не возрастал. Несколько месяцев спустя он повторил эксперименты со стальным стержнем с точно такими же свойствами, который ежедневно в течение одной недели выдерживался по многу часов при «очень слабом красном калении», после чего измерялся его коэффициент Пуассона. Между прочим следует отметить, что Бок понимал необходимость отдельных измерений длин s и l при каждой температуре окружающей среды. В табл. 80 приведены значения коэффициента Пуассона, определенные им при разных уровнях температуры.

После каждого повышения температуры, прежде чем начать нагревание до следующего ее значения, Бок вновь доводил окружающую температуру до 20°С. Среднее значение коэффициента Пуассона для всех опытов при комнатной температуре для этого отожженного железного стержня было равно $\nu=0{,}256$, что, конечно, значительно ниже полученных ранее значений для стержня того же типа в закаленном состоянии. Несмотря на то, что экспериментально найденные значения коэффициента Пуассона при 20°С менялись в различных точках цикла нагревания лишь от 0,254 до 0,259, а значения при всех температурах до 100°С были в тех же самых пределах (только значение $\nu=0{,}261$ при 120°С слегка выходило из этих пределов), Бок сделал вывод, что для отожженных железных стержней коэффициент Пуассона слегка увеличивается с ростом температуры.

В табл. 80 помещены также значения коэффициента Пуассона, полученные Боком для меди, серебра и никеля. В каждом случае

Таблица 80

Бок (1894)

t°C	B	T	ν	Дата и час
Отожженное железо: $s=149{,}5$ мм, $2l=140$ мм, $P=100$ гс				
20	20,02	23,55	0,256	23 июля, 11 ч.
40	20,16	23,71	0,257	23 июля, 11 ч.
20	20,05	23,56	0,255	24 июля, 9 ч.
60	20,30	23,86	0,255	24 июля, 11 ч.
20	20,09	23,58	0,254	25 июля, 3 ч.
80	20,38	23,99	0,258	25 июля, 5 ч.
20	20,02	23,59	0,259	26 июля, 9 ч.
100	20,48	24,11	0,257	26 июля, 11 ч.
20	20,03	23,58	0,258	26 июля, 3 ч.
120	20,58	24,29	0,261	26 июля, 6 ч.
20	20,04	23,57	0,256	27 июля, 9 ч.
150	20,85	24,59	0,259	27 июля, 11 ч.
20	20,08	23,60	0,255	27 июля, 4 ч.
Медь: $s=149{,}3$ мм, $2l=140$ мм, $P=50$ гс				
20	12,02	15,10	0,340	1 августа, 10 ч.
40	12,02	15,17	0,346	1 августа, 12 ч.
20	12,03	15,05	0,331	1 августа, 4 ч.
60	12,06	15,32	0,355	1 августа, 6 ч.
20	11,86	15,03	0,351	2 августа, 9 ч.
80	12,14	15,42	0,355	2 августа, 10 ч.
20	11,92	15,05	0,346	2 августа, 12 ч.
100	12,29	15,57	0,352	2 августа, 4 ч.
20	11,92	14,99	0,341	2 августа, 6 ч.
120	12,41	15,67	0,347	3 августа, 9 ч.
20	11,80	14,96	0,352	3 августа, 10 ч.
150	12,53	16,08	0,370	3 августа, 12 ч.
20	11,64	14,86	0,361	3 августа, 4 ч.

t°C	B	T	ν	Дата и час
Серебро: $s=150{,}0$ мм, $2l=140{,}0$ мм, $P=50$ гс				
20	10,66	13,34	0,337	27 января, 3 ч.
40	10,85	13,63	0,346	27 января, 5 ч.
20	10,68	13,20	0,324	28 января, 5 ч.
60	10,93	13,79	0,352	29 января, 11 ч.
20	10,52	13,16	0,340	30 января, 9 ч.
80	11,26	14,35	0,366	30 января, 10 ч.
20	10,65	13,62	0,370	30 января, 11 ч.
100	11,45	14,65	0,372	30 января, 5 ч.
20	10,42	13,15	0,352	2 февраля, 4 ч.
120	11,89	15,31	0,381	2 февраля, 6 ч.
20	10,39	13,15	0,356	5 февраля, 11 ч.
Никель: $s=156{,}4$ мм, $2l=140$ мм, $P=200$ гс				
20	10,17	12,13	0,332	17 марта, 2 ч.
40	10,25	12,21	0,331	17 марта, 3 ч.
20	10,22	12,16	0,329	17 марта, 5 ч.
60	10,34	12,36	0,336	17 марта, 6 ч.
20	10,32	12,09	0,309	18 марта, 11 ч.
80	10,39	12,43	0,337	19 марта, 12 ч.
20	10,20	12,11	0,326	20 марта, 10 ч.
100	10,51	12,51	0,330	20 марта, 12 ч.
20	10,13	12,18	0,343	21 марта, 12 ч.
120	10,56	12,64	0,337	21 марта, 4 ч.
20	10,19	12,16	0,333	21 марта, 6 ч.

небольшой рост коэффициента Пуассона наблюдался на фоне разброса значений при комнатной температуре почти такой же величины. Сравнивая коэффициент Пуассона при самой высокой температуре со средним значением для комнатной температуры, Бок заметил, что процентное увеличение значения коэффициента Пуассона составляет последовательность, согласованную с последовательностью значений температур плавления металлов. Расположение металлов по порядку убывания возрастаний значений коэффициента Пуассона для них (т. е. от наибольшего увеличения к наименьшему) было таким: серебро, медь, никель и железо, что, конечно, соответствует порядку возрастания температур плавления этих металлов. В экспериментальных результатах Бока был такой разброс, что

его вывод, очевидно, больше говорит о вере, чем о доказанном факте. Тем не менее эти опыты по определению зависимости значения коэффициента Пуассона металлов от уровня температуры знаменательны как первая попытка решить вопрос о том, как зависит от температуры отношение упругих постоянных при малых деформациях.

В 1902 г. Шефер также был весьма уверен, что значение коэффициента Пуассона должно стремиться к 1/2 с ростом температуры. Это заключение основывалось на экстраполировании им его же эмпирического уравнения для зависимости коэффициента Пуассона от температуры:

$$1+\nu_t=(1+\nu_0)\,\frac{1-\alpha_t}{1-\beta_t}\,, \tag{3.10}$$

где t°C — температура опыта, а α_t и β_t — температурные коэффициенты постоянных упругости E и μ соответственно [1]. Это эмпирическое соотношение было получено в результате экспериментов, описанных в двух более ранних работах (Schäfer [1901,1], [1902,1]). Здесь представляет интерес работа (Schäfer [1902,2]), в которой Шефер, использовав оптический интерференционный метод Корню (Cornu [1869,1]), основанный на подробной перепроверке экспериментов Корню со стеклом, предпринятой Константином Рудольфом Штраубелем (Straubel [1899,1]) в 1899 г., попытался распространить эксперименты на другие твердые тела с низкими температурами плавления. Он рассматривал селен, сплавы Вуда и Липовица.

Для получения брусьев с зеркальными поверхностями металл заливался между плоскими стеклянными пластинами и затем охлаждался. Шефер отметил, что для выбора всего лишь нескольких образцов, которые могли быть использованы в эксперименте Корню, понадобилось большое количество образцов, изготовленных указанным способом. Для получения постоянного изгибающего момента по длине балки использовались обычные нагрузочные устройства на концах и простые опоры, ограничивающие участок с чистым изгибом. Стеклянный интерферометр был помещен посередине длины бруса в плоскости, параллельной касательной плоскости к брусу в этой точке. Вертикальный луч монохроматического света создавал интерференционную картину вследствие антикластической кривизны горизонтальной поверхности балки, изогнутой нагрузкой. Вдохновленный предположением Бока, Шефер в свою очередь предположил, что эти твердые тела, для которых температура плавления была очень близка к комнатной температуре, должны иметь коэффициент Пуассона, приближающийся к 1/2. Для селена, температура плавления которого 217°C, он получил значение $\nu=0{,}447$; для сплава Вуда с температурой плавления 65°C — значение $\nu=0{,}489$; и для сплава Липовица с температурой плавления 75°C значение $\nu=0{,}452$, что, как думал Шефер, подтверждало его предположение.

Шефер провел более детальное исследование селена, определяя значение коэффициента Пуассона при температуре 80°С, а именно, он сравнил измерения, сделанные в то время, когда температура образца была между 80 и 20°С. Результаты этого исследования интересны. Образец нагревался до 80°С, и при этом Шефер получал коэффициент Пуассона, равный 0,490. Затем образец остывал до комнатной температуры и во время его охлаждения определялся коэффициент Пуассона через каждые 10 минут: через 10 мин $\nu=0{,}480$, через 20 мин $\nu=0{,}480$, через 30 мин $\nu=0{,}448$ и через 40 мин, когда образец достигал комнатной температуры 20°С, $\nu=0{,}445$. Шефер считал, что все эти измерения убедительно поддерживают гипотезу о том, что коэффициент Пуассона возрастает до 1/2 в точке плавления [1]). Однако он все же отметил, что при рассмотрении упругого поведения таких материалов трудно поставить упругий эксперимент без хотя бы самых небольших остаточных деформаций.

В следующей главе о конечных деформациях, где описаны экспериментальные исследования по определению геометрического коэффициента Пуассона для больших деформаций резиновых труб, проведенные Карлом Пульфрихом [2]) в 1886 г., мы увидим роль упругого последействия в таких экспериментах. Некоторые экспериментаторы, работы которых обсуждались выше, делали незначительные замечания или проявляли беспокойство о возможности ошибки из-за этого явления и все же поступали так, словно оно не имело значения. Вообще, все дефекты измерения деформаций при нагружении мертвой нагрузкой, обнаруженные в 30-х гг. XIX века, могут вносить вклад в общий разброс результатов измерений.

3.26. Исчерпывающее изучение Штраубелем эксперимента Корню по непосредственному определению коэффициента Пуассона (1899)

Константин Рудольф Штраубель (Straubel [1899,1]) — один из очень немногих экспериментаторов в этой области, действительно достигший максимальной точности путем исчерпывающего независимого экспериментального исследования влияния всех видов побочных явлений. Работу 1899 г., посвященную определению коэффициента Пуассона посредством огромного количества оптико-ин-

---

[1]) В дискуссии о работе Гарафало, Маленока и Смита (Garofalo, Malenock, Smith [1952, 1]) Манжуан (M. J. Manjoine) ссылается на разговор с А. Надаи (A. Nadai), прокомментировавшим существовавшую ранее теорию, по которой коэффициент Пуассона должен приближаться к 1/2 по мере приближения температуры в точке плавления материала. Надаи привел факт, что конькобежца выдерживает лед, находящийся практически в точке плавления, как доказательство того, что и вблизи точки плавления наблюдаются нормальные упругие свойства. Это — довольно любопытное рассуждение.

[2]) Pulfrich [1886, 1]. См. ниже гл. IV, раздел 4.39.

терференционных экспериментов, основанных на оригинальных экспериментах Корню, Штраубель начинает с констатации того, что больше нет необходимости выяснять с помощью экспериментов, применима или нет атомистическая теория упругости Навье и Пуассона: теория неприменима. Анализируя опыты со стеклом Эверетта, Корню, Амага, Фохта, Кантоне [1]) и Дж. фон Ковальски (Kowalski [1890,1]) (все эти эксперименты, кроме экспериментов Кантоне и Ковальски были описаны выше), он отметил разброс полученных результатов. Семь опытов Корню дали среднее значение коэффициента Пуассона $\nu=0{,}237$. Эверетт получил значения $\nu=0{,}224$ и $\nu=0{,}258$ для двух разных образцов из одного и того же стекла. Что касается разных видов стекла, то Фохт получил для известного и проверенного материала очень точные значения $\nu=0{,}213$ и $\nu=0{,}208$. Кантоне, который работал с трубами из Тюрингского стекла, определил значения коэффициента Пуассона, измеряя изменение внутреннего объема при внешнем давлении и изменение длины при внутреннем давлении [2]). Для четырех различных образцов труб из одного и того же стекла значения коэффициента Пуассона оказались такими: $\nu=0{,}246$; 0,261; 0,264 и 0,256. Ковальски испытал на изгиб и кручение стержни из тянутого стекла, получив в 1889 г. значение $\nu=0{,}226$, а в более поздней серии экспериментов с теми же образцами — значение $\nu=0{,}212$.

Штраубель намеревался тщательно измерить коэффициент Пуассона тридцати различных (в смысле состава и технологии изготовления) видов стекла, которые были специально сделаны для его экспериментов Йенской Технической Лабораторией Стекла. Заметив, возможно, ретроспективно, после того как его главные исследования были закончены, что оригинальные эксперименты Корню тридцатилетней давности содержали некоторое количество мелких ошибок и что, по существу, сам Корню, утверждая, что значение $\nu=0{,}237$ доказывает предсказываемое значение $\nu=0{,}250$, сознавал следовательно, порядок величины возможных ошибок опыта, Штраубель решил подвергнуть критическому анализу эксперименты Корню, использовав все усовершенствования в оптике и фотографии за последние тридцать лет. Применив интерференционную установку,

---

[1]) Cantone [1888, 1]. Кантоне и Амага (Amagat [1881, 1]) независимо повторили, с некоторыми техническими усовершенствованиями, эксперименты Вертгейма сорокалетней давности с цилиндрическими пьезометрами (Wertheim [1848, 1]). Слова «Nuovo metodo» («Новый метод») в заголовках двух «Заметок» Кантоне выглядят немного страино. Он упомянул Вертгейма и Рено и полагал, что ценность результатов тщательного изучения сжимаемости, которое провел Рено, уменьшилась из-за того, что Рено пользовался результатами Вертгейма. Походя отвергнув результаты «*illustre sperimentatore francese*» («известного французского экспериментатора») Вертгейма в пользу результатов Корню [1869, 1], Кантоне считал, что его собственные опыты окончательно решили спор относительно атомистической теории упругости, установив ее применимость.

[2]) В этом методе неявно подразумевается необходимость вернуться к рассмотрению отношения двух модулей, K и E.

сконструированную Пульфрихом (Pulfrich [1898,1]), с тщательно выверенными фильтрами, позволившими ему работать с монохроматическим светом 6560 λ (красная линия водорода), специально сконструированную жесткую металлическую фотокамеру и заново спроектированный вращающийся стол, Штраубель, испытывая стеклянные балки, подвергнутые чистому изгибу, измерял угол между асимптотами гипербол для определения отношения радиусов двух главных кривизн и, следовательно, коэффициента Пуассона.

В добавление к исчерпывающей перепроверке метода вычислений Штраубель исследовал ошибки, вызванные способом приложения нагрузки; он нашел предпочтительным использовать винты, прикрепленные к двум консольным частям бруса, междуопорная часть которого испытывала чистый изгиб. Он обратил особое внимание на природу опор балки и ее влияние на результат, и произведя очень большое количество отдельных опытов, всесторонне изучил влияние на измеренную величину как изменения в довольно широких пределах толщины и ширины стеклянной балки, так и изменения точек расположения опор и точек приложения нагрузки. Он нашел, что один из главных источников ошибки лежит в невозможности получения действительно плоских пластин, свободных от небольшой начальной кривизны.

Затем Штраубель приступил к выполнению обширной программы шлифовки и полировки образцов, определения их начальной кривизны и ее влияния на величину радиуса кривизны, полученного при изгибе. Он выполнил много оптических испытаний самого метода, помимо измерений антикластической кривизны, являвшихся целью его исследований. Если позволило бы место, было бы интересно описать эти подробности [1]). Количество содержащихся в работе результатов огромно, и все же Штраубель сетовал на то, что он смог включить в публикацию результаты только очень малой части общего числа проделанных опытов. Он выбрал одно стекло с маркировкой # 1991 следующего состава: SiO_2, 65,22; B_2O_3, 2,7; ZnO, 1,5; As_2O_5, 0,5; BaO, 10,0; Na_2O, 5,0; K_2O, 15,0; Mn_2O_3, 0,08 в качестве примера одного из экспериментов, проведенного с балками различных размеров при различных значениях изгибающего момента, изменяющихся от минимума до максимума, для которого в статью были включены лишь средние значения коэффициента Пуассона и вычисленной ошибки.

Я привожу данные для этого стекла в табл. 81 не потому, что это исследование оригинально, а из-за его точности и важности,

---

[1]) Например, Штраубель обнаружил, что близость опорной призмы для широких балок, т. е. для таких балок, отношение длины к ширине у которых меньше трех, затрудняет получение непротиворечивых результатов из-за стеснения поперечного изгиба [1]. В этих случаях он вставлял между опорной призмой и стеклянной балкой тонкие резиновые или картонные прокладки, после чего его результаты оказались такими же, как при одной опорной призме на ширине 2 см, и ниже, чем при опорных призмах, расположенных в 5—7 см друг от друга ([1899,1]).

Таблица 81

Штраубель (1899)

d	b	m	s_a	s_i	от n_1 до n_m	от a_1 до a_m	ν
0,3	3,0	6	10	7	3,5—6,1	27,01—26,12	0,2126±0,0031
0,3	3,0	7	10	7	3,5—6,6	26,89—26,00	0,2173±0,0015
0,3	2,5	4	10	7	4,4—6,4	27,96—27,16	0,2213±0,0041
0,3	2,5	6	10	5	3,8—7,2	28,21—26,79	0,2195±0,0022
0,3	2,5	5	10	3,4	4,1—7,2	27,76—26,60	0,2152±0,0018
0,3	2,0	5	10	7	4,55—8,4	27,39—26,57	0,2285±0,0007
0,3	2,0	5	10	7	4,6 —8,7	26,46—26,02	0,2281±0,0009
0,3	2,0	6	10	5	3,9 —8,7	27,73—26,46	0,2229±0,0010
0,3	2,0	3	10	5	4,6 —9,0	26,50—25,91	0,2228±0,0000
0,3	2,0	6	10	3,4	3,7 —8,7	27,70—26,27	0,2193±0,0009
0,3	2,0	3	10	3,4	4,5 —8,8	26,29—25,82	0,2241±0,0004
0,2	2,0	6	10	7	6,3—13,6	28,35—26,81	0,2244±0,0007
0,2	2,0	6	10	7	4,2—7,65	29,65—27,95	0,2266±0,0021
0,2	2,0	6	10	5	6,2—13,5	28,26—26,77	0,2248±0,0017
0,2	2,0	6	10	5	4,2—8,0	29,58—27,60	0,2205±0,0017
0,2	2,0	6	10	3,4	6,2—13,6	28,05—26,51	0,2208±0,0013
0,2	2,0	6	10	3,4	4,1—7,9	29,61—27,54	0,2152±0,0014
0,25	1,75	6	10	7	4,75—9,95	28,16—26,75	0,2246±0,0006
0,25	1,75	6	10	7	4,65—9,65	28,34—26,85	0,2236±0,0010
0,25	1,75	6	10	5	4,8 —10,0	28,19—26,71	0,2227±0,0020
0,25	1,75	6	10	5	4,65—9,85	28,22—26,85	0,2266±0,0010
0,25	1,75	6	10	3,4	4,85—10,0	27,99—26,55	0,2186±0,0012
0,25	1,75	6	10	3,4	4,9 —9,9	27,95—26,72	0,2249±0,0014
0,2	1,0	7	10	7	6,1 —12,0	29,46—27,39	0,2236±0,0044
0,2	1,0	7	10	7	5,95—12,1	29,37—27,48	0,2295±0,0028
0,2	1,0	5	10	5	6,05—14,0	29,25—27,12	0,2239±0,0017
0,2	1,0	5	10	5	6,0 —14,0	29,27—27,22	0,2298±0,0013
0,2	1,0	5	10	3,4	6,0 —14,0	29,03—27,17	0,2328±0,0026
0,2	1,0	5	10	3,4	6,0 —14,0	29,50—27,15	0,2217±0,0046

а также из-за того, что оно является хорошей иллюстрацией тех экспериментальных трудностей, которые на самом деле лежали в основе споров предыдущих пятидесяти лет.

Штраубель для образцов различных размеров, изготовленных из этого стекла, дал усредненные значения. Как сообщается в его работе, он продолжил исследование экспериментами еще на двадцати девяти различных видах стекла различного состава; он также изучал борную кислоту. Эти данные собраны в табл. 82, в которую включены не только общие средние значения коэффициента Пуассона для каждого из видов стекла, но также и процентный химический состав стекла, E по измерениям Винкельмана и Шотта (A. Winkelmann, O. Schott [1894, 1]), K и μ. Штраубель вычислил послед-

Таблица 82

Штраубель (1899)

Номер	SiO_2	B_2O_3	ZnO	PbO	Al_2O_3	As_2O_3	BaO	Na_2O	K_2O	CaO	P_2O_5	Mn_2O_3	Коэффициент Пуассона ν	Модуль упругости E (кгс/мм²) (Винкельман)	Модуль объемной упругости K (кгс/мм²)	Модуль упругости при сдвиге μ (кгс/мм²)
1450	71	14	—	—	5	—	—	10	—	—	—	—	0,197	7300	4020	3050
278III													0,208	6640	3790	2750
2175	68,7	8	—	—	—	1,5	—	5,3	14,5	2	—	0,03	0,210	7460	4290	3080
627	68,2	10	2	—	—	0,2	—	10	9,5	—	—	0,1	0,213	7970	4630	3290
1893 [a]	53,5	20	—	—	—	—	—	—	6,5	—	—	—	0,219	5170	3070	2120
714	74,6	—	—	—	—	0,3	—	9	11	5	—	0,1	0,221	6570	3920	2690
20	69,5	2	—	2,5	2,5	0,4	—	7	16	—	—	—	0,221	6340	3790	2600
2154	54,2	1,5	—	33	—	0,2	—	3	8	—	—	0,1	0,222	6100	3660	2500
2106	44,6	—	—	46,6	—	0,3	—	0,5	8	—	—	—	0,222	5390	3230	2210
1571	41	—	—	51,7	—	0,2	—	—	7	—	—	0,1	0,224	5460	3300	2230
709	70,6	—	12	—	—	0,4	—	17	—	—	—	—	0,226	6630	4030	2700
Нормальное стекло	67,3	2	7	—	2,5	—	—	14	—	7	—	0,2	0,228	7400	4530	3010
2158	64,6	2,7	2	—	—	0,4	10,2	5	15	—	—	0,1	0,231	6610	4100	2690
S 219 [a]	—	3	—	—	10	1,5	—	—	12	—	69,5	—	0,235	6780	4260	2750
500	29,3	—	—	67,5	—	0,2	—	—	3	—	—	—	0,239	5490	3510	2220
658	32,7	31	—	25	7	0,3	—	1	3	—	—	—	0,250	5470	3650	2190
1973	48,1	4,5	10,1	—	—	0,4	28,3	1	7,5	—	—	0,1	0,252	7420	4990	2960
290	58,7	—	—	—	—	0,3	—	—	33	8	—	—	0,253	6010	4060	2400
270	—	3	—	—	8	1,5	28	—	—	—	59,5	—	0,253	6330	4270	2530
2122	37,5	15	—	—	5	1,5	41	—	—	—	—	—	0,256	—	—	—
370	54,8	—	17	—	—	0,2	—	—	28	—	—	—	0,261	5850	4080	2320
S 208	20	—	—	80	—	—	—	—	—	—	—	—	0,261	5090	3550	2020
1933	39,64	6	9,2	—	2,5	0,5	42,1	—	—	—	—	0,06	0,266	—	—	—
1299	34,5	10,1	7,8	—	5	0,5	42	—	—	—	—	—	0,271	7970	5800	3140
S 95	—	3	—	—	1,5	1,5	38	—	—	—	56	—	0,272	—	—	—
S 185 [a]	—	71,8	—	—	22,4	—	—	—	—	—	—	—	0,273	—	—	—
S 196	—	69,1	—	—	18	0,2	4,7	8	—	—	—	—	0,274	4700	3470	1840
S 120	—	42,8	—	52,0	5,0	0,2	—	—	—	—	—	—	0,279	—	—	—
Борная кислота	—	100	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,283	—	—	—
665	—	41	59	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,319	8170	7520	3100

[a] Кроме того, содержится: в 1893 20% Sb_2O_3; в S 219 4% MgO; в S 185 5,8% Li_2O

ние две величины K и μ из соотношений между постоянными упругости для изотропных тел.

Если бы 40 годами раньше было известно, что для различных видов изотропного стекла значение коэффициента Пуассона меняется от 0,197 до 0,319 и что при получении этих данных точность эксперимента была более высокой чем 1%, то, возможно, хотя и не обязательно, противоречие между атомистической теорией и континуальным экспериментом было бы меньше.

Штраубель продолжил исследования длительным анализом влияния химического состава на коэффициент Пуассона и влияния на него твердости в терминах твердости по Ауэрбаху (Auerbach [1894,1]) (измерявшего модуль E' методом проникновения индентора в образец). Штраубель нашел, что различия в значениях коэффициента Пуассона между его собственными, непосредственно определенными, и значениями, найденными Ауэрбахом и Винкельманом из уравнения $E=E'(1-\nu^2)$, достигали в отдельных случаях 37,3%, а при усреднении данных достигали 16,2%. Сравнивая деформации и напряжения при одноосном сжатии по линейной теории, Штраубель принимает гипотезу Стокса — Бока, по которой коэффициент Пуассона должен возрастать до 1/2 в точке плавления, и предполагает, что это можно связать с показателем твердости по Ауэрбаху.

Область значений коэффициента Пуассона для стекла в исследованиях Штраубеля включает весь полувековой спектр экспериментальных результатов, начиная с первых пьезометрических измерений Вертгейма в 1849 г. Даже для изотропных твердых тел коэффициент Пуассона есть функция химического состава, а также термической и механической предысторий. Трудно сказать большего или меньшего уважения заслуживает исследование, в котором достигнуты высоты точности такие, как в исследовании Штраубеля, если сравнивать последнее с зачастую более грубым первоисследованием, в котором имелись и изобретательность, и оригинальность, подобно присущим исследованию Корню [1]), однако точность и утонченность исчерпывающего исследования Штраубеля поставили перед последовавшими серьезными экспериментаторами строгие ограничения. Так мы видим, как Джессоп (H. T. Jessop [1921,1]) примерно на двадцать лет позже Штраубеля еще раз повторяет эксперимент Корню с зеркальным стеклом для изучения влияния упругого

[1]) Что тут есть некая неопределенность, можно убедиться, просмотрев последовательные издания классической книги Фридриха Кольрауша (Friedrich Kohlrausch [1905, 1] Lehrbuch der Praktische Physik). В первом (1870) издании о коэффициенте Пуассона или его определении нет ни слова. В десятом издании 1905 г. упоминаются эксперименты Корню 1869 г. и Штраубеля 1899 г. В 1940 г. в переработанном посмертном издании этой книги Корню уже не упоминается, а делается ссылка на Штраубеля (1899) и Джессопа (1921) как на единственные эквивалентные источники. Затем следует утверждение, что для металлов неоднородность, или анизотропия, является причиной ошибок, которые и мешают для получения значений коэффициента Пуассона этих твердых тел использовать отношение определенных в эксперименте модулей.

последействия на значение коэффициента Пуассона; заметим, что работа Джессопа, несмотря на свою неточность, представляла бы некоторый интерес, будь она сделана прежде работы Штраубеля, сейчас же она достойна упоминания главным образом как пример того, что в экспериментальной науке бывают шаги как вперед, так и назад.

Так как Джессоп не смог достичь лучшей разрешающей способности при измерении углов чем 0,5°, что, мягко говоря, хуже, чем 6′, достигнутые Штраубелем, он был вынужден определять интервалы интерференционных полос, делая упор на их поведение на значительном расстоянии от точки, радиус кривизны в которой представлял интерес. Это ограничение плюс использование им неполированных, с неизвестной начальной кривизной и, к тому же, намного более толстых образцов, привели к значениям коэффициента Пуассона от 0,139 до 0,229 для одного и того же стекла. Таким образом, наблюдение временны́х изменений интерференционной картины, которые Джессоп относил к влиянию упругого последействия, дало неубедительные результаты, о которых можно было бы думать, что они имеют некоторую ценность, будь они опубликованы до исследования Штраубеля. Называя обработку Штраубелем методом наименьших квадратов буквально сотен опытов слишком «громоздкой», Джессоп на основании двух из общего числа восьми опытов с шестью образцами предположил, что ошибка из-за начальной кривизны может быть исключена изгибанием одних и тех же образцов в двух противоположных направлениях. Измеренная разница между двумя экстремальными значениями составила 10%, что реально показало необходимость для любого исчерпывающего исследования, основанного на оптико-интерференционных экспериментах, таких как эксперименты Корню, прибегать к точному анализу Штраубеля [1]).

В 1908 г. Джордж Фредерик Чарльз Сирл (Searle [1908,1]) в своей «Экспериментальной упругости» сравнил динамические модули, которые предположительно были определены с большой точностью. Для восьми различных металлов, большинство из которых было в твердотянутом состоянии, он получил девять значений коэффициента Пуассона; пять из них были больше 1/2 при малых деформациях, а именно, от 0,598 для закаленной меди и 0,608 для отожженной меди до 1,207 для твердотянутого мельхиора. Значение, полученное Томлинсоном (Tomlinson [1883,1]) для твердотянутого мельхиора было 0,500. Хотя я не выписал большого набора результатов по определению модулей, выполненному в работах Баушингера (Bauschinger [1877,1], [1881,1], [1886,1]), Томплинсона

[1]) Рикерт (P. Rickert [1929, 1]) в своих вводных замечаниях к серии таблиц параметров деформации в т. VI, *Handbuch der Physik* в 1928 г. пишет, что он считает опыты с йенским стеклом, проведенные 30 лет назад, одними из немногих существующих достоверных данных по определению модулей.

и Сирла, но при рассмотрении этих результатов легко видеть, почему можно сделать общее заключение, как это сделал Баушингер, что, помимо вопроса анизотропии (утверждения о ней всегда делались без попыток проверить экспериментально, являются ли наблюдаемые отклонения объяснимыми этим фактором), вычисление коэффициента Пуассона лишь в связи с определением его значения по непосредственно найденным E и μ требуют точности, не достигнутой большинством экспериментаторов даже сегодня.

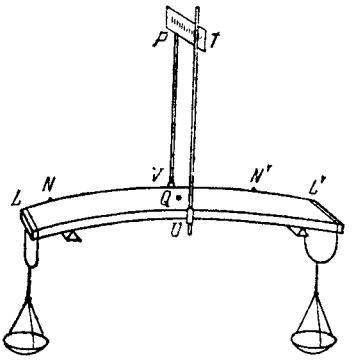


Рис. 3.38. Установка, которую использовал Сирл (1908) в своей версии эксперимента Корню.

На рис. 3.38 показан вариант эксперимента Мэллока (Mallock [1879,1], см. выше раздел 3.21), предложенный Сирлом в 1906 г. для непосредственного определения коэффициента Пуассона. Сирл включил в свою работу обсуждение ограничений в этом эксперименте, касающихся отношений размеров образца и радиусов кривизн. Он получил для стального образца значение коэффициента Пуассона $\nu=0{,}285$, что можно сравнить со значением, полученным Кирхгофом (Kirchhoff [1859 1]) при непосредственном определении, равным 0,294, ныне общепринятым средним значением коэффициента Пуассона для стали.

3.27. Эксперименты Грюнайзена по проверке теоретической зависимости между постоянными упругости для изотропного тела посредством независимого определения значений E, μ и ν

В элементарных учебниках по упругости утверждается, что коэффициент Пуассона изотропного твердого тела должен определяться путем использования отношения поперечной и продольной деформаций в опыте с одноосно напряженным образцом при инфинитезимальных деформациях. В XIX веке этот «эксперимент» оставался в основном мысленным. Малость баз приборов для измерения изменения поперечных размеров образца предопределила использование главного в XIX веке метода получения высокой точности измерения деформаций, заключавшегося в использовании длинных образцов[1]. В 1848 г. Вертгейм (Wertheim [1849,1]) одновременно определил продольную и поперечную деформации при осевом растяжении. Однако, как мы видели (см. раздел 3.16), это определение, первое такого рода, было сделано на резине; лишь для нее значения при больших деформациях были действительно достаточно точными. Первое успешное измерение и единственные до

конца века исчерпывающие исследования были проведены в 1879 г. Баушингером (Bauschinger [1879,1]), который использовал зеркальный экстензометр при испытании железных и стальных образцов. Штромейер (Stromeyer [1894,1]) в 1894 г. и Бентон (Benton [1900,1], [1901,1]) в 1900 г. использовали оптическую интерферометрию для изучения поперечного сужения при относительно больших деформациях. Морроу (J. Morrow [1903, 1]) в 1903 г., согласно Грюнайзену, по существу, повторил эксперимент Баушингера с зеркальным устройством, но на самом деле усовершенствовал зеркальную систему таким образом, чтобы наблюдать поперечную деформацию во время изгибания. Предметом интереса Морроу была нелинейная зависимость напряжения от деформации и перемещение нейтральной оси в направлении сжатой зоны. Он обращается к коэффициенту Пуассона лишь для того, чтобы подчеркнуть, что коэффициент Пуассона может быть определен только в предположении применимости элементарной теории стержней.

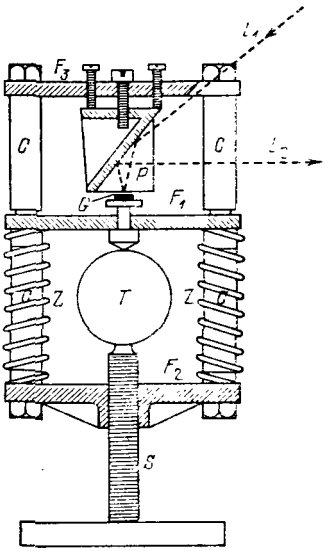


Рис. 3.39. Установка Штромейера (1894), в которой впервые использована интерференционная оптика для изучения поперечной деформации при растяжении и сжатии стержневого образца.

Оптико-интерференционная установка Штромейера (Stromeyer [1894,1]) для изучения поперечной деформации при растяжении, сжатии и, что довольно любопытно, кручении показана на рис. 3.39. Для девяти видов сварочного литого железа и стали он получил, как и Баушингер, значения от $\nu=0{,}148$ до $\nu=0{,}301$. Для трех медных образцов, среди которых были катаные и литые стержни, коэффициент Пуассона принимал значения от 0,319 до 0,380. Для четырех бронзовых образцов, в том числе из холоднокатаной марганцовистой бронзы, коэффициент Пуассона принимал значения от 0,305 до 0,354. Подобные же области изменения значений были получены при растяжении и сжатии металла Мюнтца. Два опыта с дельта-металлом дали значения ν, превосходящие 1/2. В трех опытах на кручение, один из которых был проведен с катаной медью («лучший отборный катаный стержень»), Штромейер, по его словам, заметил поперечные деформации. Ввиду этого я полагаю, что его эксперименты следует повторить.

Мы скорее можем считать, что Штромейер больше заслужил отличия своим использованием, хотя и неудачным, интерференционной оптики в экспериментальной упругости, чем рассматривать его эксперименты 1894 г. как преддверие наблюдений Пойнтинга, выполненных в 1912 г., или как следствие открытия Вертгейма в 1854 г.

того факта, что изменение объема пропорционально квадрату угла закручивания.

Элементарный эксперимент, на который была ссылка выше, потерял свой главным образом умозрительный статус с появлением работы Грюнайзена (Grüneisen [1908,1]) 1908 г. Грюнайзен измерял поперечную и продольную деформации, применив точную оптическую интерферометрическую технику. Его определение значения коэффициента Пуассона было частью основной экспериментальной программы независимого получения точных значений E, μ, K и ν для поликристаллических изотропных металлов. Среди других целей Грюнайзен надеялся с помощью двух зависимостей между этими четырьмя постоянными (только две из них должны быть независимыми) хотя бы установить применимость формул линейной изотропной упругости. Были получены как динамическое, так и квазистатическое значения E, так что удавалось найти отношение значений адиабатического и изотермического модулей E [1]). Относительно модуля упругости при сдвиге μ Грюнайзен предположил, что разница между μ (изотермическим) и μ (адиабатическим) настолько мала, что он удовлетворился измерением только динамической величины [2]). Эксперимент был механизированной версией эксперимента, поставленного Хладни веком ранее.

Металлическое кольцо, присоединенное к середине стержня, было закреплено на токарном станке. На одном свободном конце разделенное пополам пробковое кольцо, посыпанное канифолью, было надето на стержень; при приложении давления пальца к этому кольцу во время вращения стержня возникал основной тон крутильных колебаний. Для некоторых металлов, таких как Al, Ir, Rh, Zn, Pb, Bi, Cu и Sn, для которых этот тон либо не возбуждался, либо, будучи возбужденным, затухал слишком быстро, для того чтобы можно было определить его частоту, использовались более длинные стержни, и колебания наблюдались способом, применявшимся в XIX веке с использованием узловых следов, образуемых сосновой пылью [3]). Измерения воспринимаемого на слух

---

[1]) Нет никакой ссылки на первоначальные экспериментальные исследования и их анализ, сделанные в 1844 г. Вертгеймом (Wertheim [1844, 1]) и приведшие к спору между Клаузиусом и Вертгеймом относительно отношения удельных теплоемкостей, продолжавшемуся с 1849 до 1860 г. (Clausius [1849, 1], Wertheim [1860, 1]).

[2]) Любопытно, что Грюнайзен, уже проявив несомненное знакомство с исследованиями Вертгейма и сделав, как мы видели, в 1906 г. большой вклад в изучение нелинейности зависимости $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ при малых деформациях, оставит без внимания нелинейный сдвиг при кручении, открытый Вертгеймом. Как я показал выше, Вертгейм отказался от получения значения модуля упругости при сдвиге μ из квазистатического испытания. К 1910 г., а возможно, даже и к 1972 г. эксперименты 1858 г. все еще оставались наиболее важным исследованием квазистатического кручения.

[3]) Имеются в виду так называемые пылевые фигуры Кундта, специализированное приспособление версии Савара 1820 г. эксперимента Хладни XVIII века. Метод Кундта описан Кольраушем во втором издании его известного трактата

тона были калиброваны с помощью продольно колеблющихся контрольных стержней. Также были измерены способом определения тона колебаний динамические модули E, для того чтобы сравнить их непосредственно со значениями, полученными Хладни, Саваром и Вертгеймом.

Тщательное определение Грюнайзеном продольного удлинения с помощью интерференционной оптики [1]) было описано в предыдущей главе. Его использование этого метода для одновременного определения поперечного сужения в течение эксперимента с одноосным

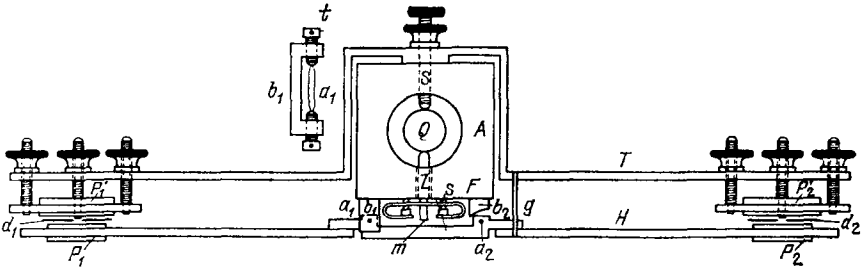


Рис. 3.40. Экспериментальная установка Грюнайзена (1908) для точного определения поперечной деформации с помощью интерференционной оптики.

нагружением стержня не было простым приспособлением использовавшейся уже техники. Для получения эквивалентной точности он ввел рычаги с плечом 11 см, показанные на рис. 3.40, несущие одну из параллельных стеклянных пластин на одном конце, а другим связанные с подпружиненными стальными остриями, находящимися в контакте с образцом в точках, лежащих на линии, перпендикулярной оси образца.

Использовав ртутный дуговой источник света и передвижной телескоп для наблюдения обеих систем и поместив установку в ящик с постоянной температурой, Грюнайзен провел измерения, приведенные в табл. 83. Эта работа, как и другие работы Грюнайзена, содержит пространное описание деталей и трудностей эксперимента.

В этой таблице d — диаметр образца, ζ — поперечная деформация на 1 кгс нагрузки, ε — соответствующая продольная деформация на 1 кгс нагрузки, $\nu_{(\text{статич})}$ — искомый коэффициент Пуассона. Римские цифры относятся к разновидностям по химическому составу. Грюнайзен благодарит господина Грошуфа (Groschuff) за обеспечение нужных химического состава, значений параметра электрической проводимости и температурного коэффициента при 15°C

(Kohlrausch [1872, 1]). В английском переводе с осмотрительно измененным названием, An Introduction to Physical Measurements, метод описывается на стр. 90, 91 (Kohlrausch [1886, 1]).

[1]) Первым использовал интерференционную оптику именно для этого измерения в 1888 г. Кантоне (Cantone [1888, 1]).

Таблица 83

Грюнайзен (1908)

	d (см)	$\zeta \cdot 10^6$ (1/кгс)	$\varepsilon \cdot 10^6$ (1/кгс)	$\nu_{(статич)}$		d (см)	$\zeta \cdot 10^6$ (1/кгс)	$\varepsilon \cdot 10^6$ (1/кгс)	$\nu_{(статич)}$
Алюминий	1,207	0,417	1,216	0,343	Железо I	1,301	0,0974	0,347	0,280
Алюминий I	1,299	0,359	1,059	0,339	Сталь	1,595	0,0674	0,2347	0,287
Алюминий II	1,300	0,344	1,029	0,334	Константан	1,997	0,0625	0,1924	0,325
Медь IVa	1,196	0,248	0,712	0,348	Мангаин	1,806	0,1016	0,309	0,329
Медь VI	1,300	0,195	0,578	0,337	Палладий	1,610	0,1685	0,428	0,393
Серебро	1,109	0,488	1,286	0,379	Платина	1,617	0,1116	0,286	0,387
Золото I	1,208	0,475	1,121	0,423	II				
Золото II	1,154	0,494	1,176	0,420	Красная	1,468	0,256	0,714	0,358
Никель	1,605	0,0743	0,2407	0,309	латунь				

материала изучаемых им образцов. Результаты Грюнайзена даны в табл. 84.

Данные табл. 85 получены по продольным удлинениям, доведенным до $2 \cdot 10^{-5}$ мм, которые, по оценке Грюнайзена, могли быть определены с помощью оптической техники с точностью $\pm 1\%$.

Таблица 84

Грюнайзен (1908)

				Удельная электропроводность $\cdot 10^4$
Алюминий I	1,1% Si	0,5% Fe	0,05% Cu	35 (4,1‰)
Алюминий II	1,6% Si	0,5% Fe	5,7% Cu	32 (3,8‰)
Медь V	0,2% As	0,04% Fe	1,0% Ni	32 (2,2‰)
Медь VI	0,15% As	0,03% Fe	Следы Ni	53 (3,5‰)

Окончательная сводка данных, полученных во всех этих экспериментах, включая непосредственные независимые определения E, μ и ν, представлена в табл. 85.

Кроме непосредственного определения значений E в столбце 2, $\nu_{(статич)}$ — в столбце 3 и $\mu_{(кручен.)\,(динамич)}$ — в столбце 5, Грюнайзен рассмотрел изотропическое соотношение $E=2(1+\nu)/\mu$, сравнивая вычисленные по полученным в опыте E и μ значения $\nu_{(кручен.)\,(динамич)}$, помещенные в столбце 4 и вычисленные по найденным в опыте E и ν значения $\mu_{(растяжен.)\,(статич)}$, представленные в столбце 6.

Различия между вычисленными и измеренными в точных экспериментах величинами окончательно подтвердили утверждение Баушингера тридцатилетней давности, утверждение, которое полностью

Таблица 85

Грюнайзен (1908)

	E (кгс/мм²)	$\nu_{(статич)}$	$\nu_{(кручен)} = \frac{E}{2\mu} - 1$	Значение $\mu_{(кручен)}$, (динамич) экспериментальное (кгс/мм²)	Значение μ вычисленное (кгс/мм²)
1	2	3	4	5	6
Тянутые стержни					
Алюминий	7 190	0,343	—	2 680	—
Алюминий I	7 120	0,339	0,310	2 660	2 717
Алюминий II	7 320	0,334	0,337	2 740	2 737
Медь IVa	12 500	0,348	0,356	4 640	4 640
Медь V	13 110	—	0,391	—	4 710
Медь VI	13 040	0,337	0,399	4 880	4 660
Серебро	8 050	0,379	0,369	2 920	2 940
Золото I	7 780	0,423	0,495	2 730	2 602
Золото II	8 120	0,420	0,435	2 860	2 822
Никель	20 540	0,309	—	7 850	—
Железо I	21 680	0,280	—	8 470	—
Сталь	21 320	0,287	0,287	8 280	8 280
Константан	16 590	0,325	0,329	6 260	6 230
Манганин	12 640	0,329	0,329	4 760	4 740
Литые стержни					
Кадмий	5 090	0,30	—	1 960	—
Олово	5 540	0,33	—	2 080	—
Свинец	1 656	0,446	—	573	—
Висмут	3 250	0,33	—	1 220	—
Палладий	11 480	0,393	0,101	4 120	5 210
Платина II	17 080	0,387	0,368	6 160	6 220
Красная латунь (бронза)	8 240	0,358	0,177	3 030	3 500

игнорировалось в этот тридцатилетний промежуток времени. Вычисления отношения больших чисел, имеющих малые ошибки, таких, как в формулах, связывающих упругие постоянные в изотропных твердых телах, приводят к неизбежным ошибкам в полученных значениях [2]. Вывод Грюнайзена о том, что анизотропия является главной причиной различия результатов, хотя, возможно, и верен, но с точки зрения логики разочаровывает, так как сам же Грюнайзен подметил где-то, что экспериментальные ошибки в $\pm 1\%$ при определении E и μ ведут к ошибке в 10% в вычисленном значении ν. Ввиду того, что таким же был порядок ошибок в его непосредственно определенных значениях двух модулей, нельзя сделать никакого обоснованного заключения. Грюнайзен, тем не менее, отмечает, что для бронзы и золота сравнительные измерения поперечного сужения при том же самом поперечном сечении обнаруживают некоторую анизотропию.

В работе содержатся также вычисления сжимаемости χ, основанные на формуле

$$\chi E = 3(1-2\nu),$$

которую Грюнайзен критически сравнил с данными Амага (Amagat [1889, 3]), Бюханена (Buchanan [1880, 1], [1904, 1]) и Ричардса (Richards [1907, 1]). Принимая во внимание ошибки в таких измерениях, я отложу обсуждение этих экспериментов, пока не опишу исследование, проведенное Грюнайзеном два года спустя, в котором он непосредственно определял χ, используя метод Мэллока.

В качестве окончательной сводки определенных в опыте значений коэффициента Пуассона Грюнайзен собрал, как он сказал, «все известные мне данные» и заключил, что общая согласованность непосредственно определенных значений удовлетворительная. К этим значениям я добавил его усреднения. То, что он не упомянул опытов по непосредственному определению коэффициента Пуассона, выполненных Кирхгофом, Окатовым, Мэллоком и другими, служит эталоном для XX века по отношению к цитированию: восемь из его девяти ссылок сделаны на работы лишь двух предыдущих десятилетий.

Несомненно, экспериментальное исследование Грюнайзена, посвященное этому конкретному вопросу, и другие описанные им работы представляют вехи в развитии экспериментальной механики. Подобно Дюло веком ранее и Вертгейму полстолетием ранее, он поставил фундаментальные вопросы в рамках исчерпывающих экспериментов, свободных от вспомогательных эмпирических предположений, которые уменьшили бы значение его выводов.

3.28. Повторение эксперимента Кирхгофа по определению значения коэффициента Пуассона, выполненное в середине XX века

Значение отстаивания Кирхгофом (Kirchhoff [1859, 1]) именно непосредственного определения (прямых измерений) коэффициента Пуассона было вполне оценено в 1879 г. Мэллоком, спустя двадцать лет после проведения эксперимента Кирхгофом, а также оценено Боком в 1899 г. Игнорируя тот факт, что Кирхгоф избавился от ошибок, связанных с размерами поперечного сечения, целый ряд экспериментаторов в Англии и в остальной Европе тщетно пытались найти значения E и μ с достаточной точностью, чтобы из их отношения получить правдоподобное значение коэффициента Пуассона. В XX веке именно Грюнайзен, как мы видели, в конце концов достиг пределов точности, требующейся при таком подходе. (Напомню вывод Грюнайзена о том, что ошибки в $\pm 1\%$ в значениях E и μ ведут к ошибке в 10% в значении коэффициента Пуассона.)

Спустя 85 лет после того, как Кирхгоф опубликовал все детали своего искусного эксперимента, не только значение его предполо-

жения относительно непосредственного определения, не зависящего от размеров поперечного сечения, но и сам эксперимент и все его детали были почти полностью забыты [1]). Так, в 1944 г. Франклин Л. Эверетт и Юлиус Микловиц (Everett, Miklowitz [1944, 1]), сами того не подозревая, поставили эксперимент, который был почти полностью идентичен эксперименту Кирхгофа 1859 г. Их эксперимент был конечным результатом исследования, цель которого состояла в формировании идеи и в практическом осуществлении простого опыта, выполняемого на одном образце при одновременном определении E и μ с тем, чтобы коэффициент Пуассона ν мог быть вычислен по формуле $\nu = (E/2\mu) - 1$.

Способ проведения их эксперимента, однако, напоминал исследования 1867 г. Джозефа Д. Эверетта и имел некоторые, хотя и не все, ограничения этого подхода. Джозеф Эверетт закреплял свободный конец консольной балки во время приложения крутящей пары, вводя, таким образом, дополнительную ошибку. Франклин Эверетт и Микловиц в своих исследованиях рассматривали независимо происходящие кручение и изгиб.

Главной целью исследования Ф. Эверетта и Микловица было определение зависимости коэффициента Пуассона от температуры [2]) для различных типов стали. Среди них были горяче- и холоднокатаная стали, среднеуглеродистая сталь и два типа стали, которая была названа «высокотемпературной сталью», что означало сохранение относительно высокого модуля при высоких температурах. Большое разнообразие определенных значений коэффициента Пуассона напоминает работу Баушингера 1879 г., в которой впервые подвергнуто существенной критике использование для определения коэффициента Пуассона формулы, содержащей отношение модулей упругости изотропных твердых тел [1]. Вообще, проведя опыты с пятью видами стали при шести различных значениях температуры от комнатной до 1000 °F, Ф. Эверетт и Микловиц заметили, что значение коэффициента Пуассона возрастает с возрастанием температуры. Для одного вида высокотемпературной стали они получили численные значения, превышающие 1/2. Найденные в опыте значения E и μ показаны на рис. 3.41 вместе с вычисленными при различных температурах значениями ν.

В работе Ф. Эверетта и Микловица найденные экспериментально при различных уровнях температуры значения E и μ для горяче- и холоднокатаной мягкой стали сравниваются с данными многих других экспериментаторов предыдущих двух десятилетий. Данные Баха

---

[1]) Эксперимент не был забыт Джоном Т. Ричардсом (Richards [1952, 1]), чей интерес к истории упругих постоянных я отметил в гл. II.

[2]) Еще раз оказалось достаточно пятидесяти лет для того, чтобы экспериментальное достижение в механике твердого тела было забыто. Как мы видели, Бок (A. Bock [1894, 1]) не только в точности повторил этот эксперимеит Кирхгофа, но также использовал его для изучения зависимости коэффициента Пуассона железа, стали, меди, серебра и никеля от температуры.

и Баумана (Bach, Baumann [1921, 1]), Баумана (Baumann [1923, 1]) и других были получены в отдельных, для определения каждого из двух модулей, экспериментах с различными образцами. Общая тенденция численных значений, полученных всеми экспериментаторами, была одинаковой, но исследование разброса результатов вновь

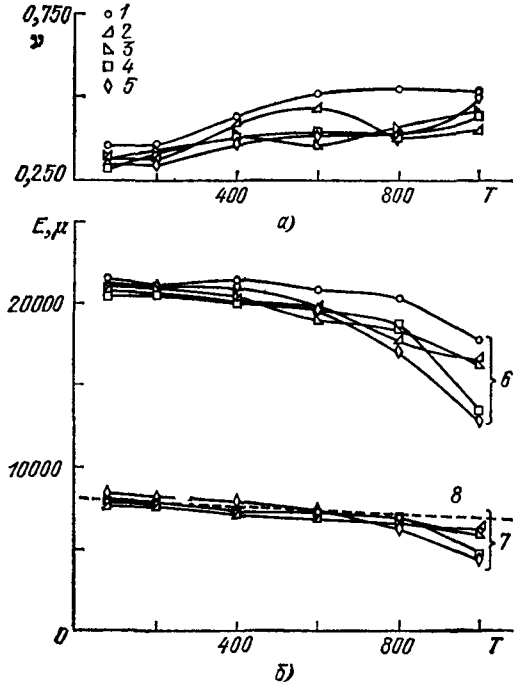


Рис. 3.41. Зависимость коэффициента Пуассона для стали от температуры, полученная Эвереттом и Микловицем (1944) в ин версии оригинального эксперимента Кирхгофа. *а*) Зависимость ν от T; ν — коэффициент Пуассона, T — температура в °F, *1* — сталь 5140, *2* — сталь 3340, *3* — сталь 1020, *4* — сталь 1020, *5* — сталь 1095; *б*) зависимость модулей упругостей E и μ от температуры; E, μ в кгс/мм²; *6* — модуль E, *7* — модуль μ, *8* — предсказанные значения (Белл).

подчеркнуло значение указания Кирхгофа, сделанного в середине XIX века, на то, что коэффициент Пуассона следует определять непосредственно из опытов на одновременный изгиб и кручение.

Это переоткрытие эксперимента Кирхгофа побудило Гарофало, Маленока и Смита (Garofalo, Malenock, Smith [1952, 1]) провести исследование, подобное исследованию Ф. Эверетта и Микловица, сорока двух типов стали при восьми уровнях температуры в области значений от комнатной до 1500 °F. Их установка, показанная на рис. 3.42, дублирует установку Ф. Эверетта и Микловица, которым они и приписывают ее замысел [1]). Их эксперимент, следова-

[1]) Джон Т. Ричардс (Richards [1952, 1]), являвшийся участником симпозиума ASTM по определению постоянных упругостн, на котором была представлена работа Гарофало, Маленока и Смита (Garofalo, Malenock, Smith [1952, 1], стр. 10—27), заметил в последующей дискуссии (стр. 29):

Следует отметить, что этот экспериментальный метод не был разра-

тельно, также напоминает первоначальный эксперимент Кирхгофа 1859 г. (см. рис. 3.35).

Для проведения опытов при высоких температурах установка Гарофало, Маленока и Смита была помещена в печь. Для минимизации высокотемпературного крипа они проводили все измерения при разгрузке образца после того, как была приложена начальная нагрузка [1]). На рис. 3.43 показаны результаты опытов при комнатной температуре, ибо некоторые исследователи считали, что более ранние эксперименты Ф. Эверетта и Микловица были сделаны при небольших остаточных деформациях, и это напоминает предположение, высказанное в 1889 г. Амага.

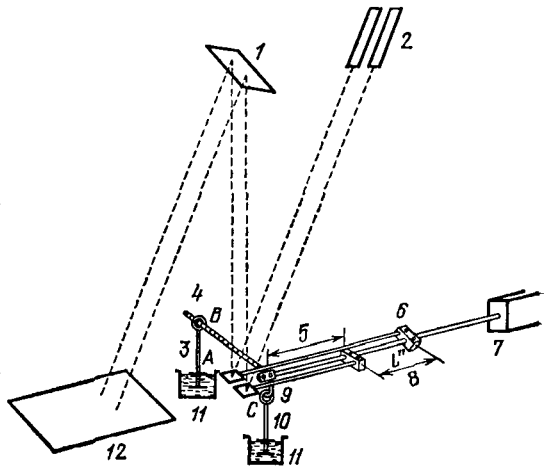


Рис. 3.42. Экспериментальная установка Гарофало, Маленока и Смита (1952), использовавших оригинальный эксперимент Кирхгофа. Расстояние между зеркалами, прикрепленными к образцу, и самопишущим приспособлением равно 164 дюймам. Общая длина образца равна 21 дюйму. *1* — стационарное зеркало, *2* — источник света и отражающий проектор, *3* — загрузочный тяж для возбуждения одновременно происходящих изгиба и кручения образца, *4* — рычаг для создания крутящего момента, *5* — длина передней части образца, *6* — плечо заднего зеркала для фиксации растяжения, *7* — образец, *8* — длина базы прибора, *9* — плечо переднего зеркала для фиксации растяжения, *10* — загрузочный тяж для возбуждения лишь одного изгиба образца, *11* — масляный силоизмеритель, *12* — пластина для автоматической записи.

Эти измерения во время разгрузки при условии ограничения уровня нагрузки относительно малыми значениями были частью программы эксперимента Гарофало, Маленока и Смита. Очень

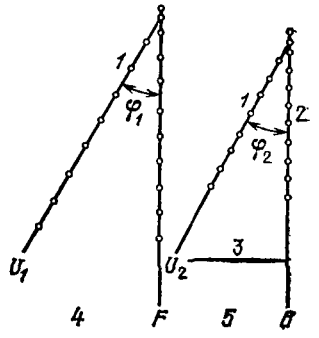


Рис. 3.43. Опыты Гарофало, Маленока и Смита (1952): примеры данных, записанных с двух зеркал установки, изображенной на рис. 3.42. *1* — разгрузка, *2* — ось изгиба, *3* — ось кручения, *4* — переднее зеркало, *5* — заднее зеркало.

ботан Эвереттом и Микловицем в 1944 г., а, по-видимому, впервые его описал Кирхгоф в 1859 г. и позже Окатов в 1863 г.».

Полностью забытым оказался отмеченный Вертгеймом тот любопытный факт, что этот эксперимент предложил Карл Фридрих Гаусс еще до 1859 г.

[1]) За полвека до этого, в 1899 г., Гильберт Арден Шекспир при изучении зависимости модуля E от температуры подчеркнул влияние начальной части термического цикла на последующее определение постоянной упругости (Shakespear [1899, 1]).

большое количество данных, представленных в их исследовании, позволяет сделать сравнение разброса результатов отдельных измерений и, по отношению к усредненным величинам, зависимости модулей и коэффициента Пуассона для стали от температуры. Значения коэффициента Пуассона они находили тем же способом, что и Ф. Эверетт и Микловиц в 1944 г. и Джозеф Эверетт в 1867 г. Анализ их данных второй раз [1]) обнаруживает очень важный результат для малых деформаций твердых тел, а именно, что в области значений сходственных температур T/T_m от 0,15 до 0,60, т. е. от 297 до 1100 К, коэффициент Пуассона постоянен по крайней мере для одного металла. Если коэффициент Пуассона не зависит от температуры, то модули E, λ и μ изотропного твердого тела должны зависеть от температуры одинаковым образом (т. е. отношения их должны сохраняться.— *А. Ф.*) Другими словами, формулы для этих величин представляют собой произведение двух функций — функции напряжения и функции температуры (при этом функция от температуры во всех формулах одинакова.— *А. Ф.*). Можно ожидать, хотя для доказательства этого факта должны быть проведены отдельные эксперименты, что подобная одинаковая зависимость от температуры должна характеризовать постоянные упругости и анизотропного тела, или монокристалла.

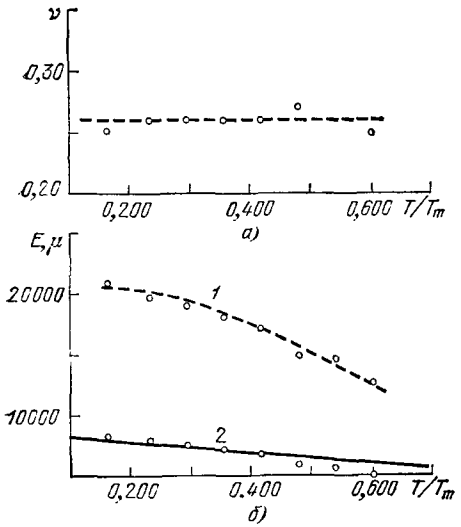


Рис. 3.44. Опыты Гарофало, Маленока и Смита (1952): коэффициент Пуассона и модули E и μ как функции сходственной (гомологической) температуры. Значение модуля μ сравнивается с даваемым линейным предсказанием Белла при $T/T_m < 0{,}4$ (см. формулу (3.27)). *а*) Зависимость ν от T/T_m; *б*) зависимость E и μ от T/T_m; E и μ в кгс/мм². *1* — модуль E, *2* — предсказанные значения модуля μ (Белл); T — текущая температура, T_m — температура плавления.

Недавно при исследовании упругих постоянных и их зависимости от температуры для почти шестидесяти кристаллических твердых тел я нашел (Bell [1968, 1]) дискретное распределение значений модуля сдвига при нулевой температуре и его линейную зависимость от сходственной температуры при $T/T_m < 0{,}4$. Это обобщение для кристаллических твердых тел будет описано более под-

[1]) Читатель может вспомнить, что Бок в 1894 г. в таком же эксперименте показал, что коэффициент Пуассона для закаленной английской стали не зависит от температуры (Bock [1894, 1]).

робно ниже (см. разделы 3.43 и 3.44), так же как и тот факт, что коэффициент Пуассона оказался постоянным. Модули E, μ и ν как функции температуры и усредненные величины для всех сорока двух типов стали в экспериментах Гарофало, Маленока и Смита показаны на рис. 3.44 (кружки) вместе с предсказаниями по моему анализу (сплошная линия). Это предсказание значений для модулей как функций температуры также включено в рис. 3.41, на котором приведены данные Ф. Эверетта и Микловица для μ.

3.29. Путаница, вызванная экспериментами Купфера (1848—1863)

Один из достойных сожаления побочных продуктов привлекательной теории (атомистической теории упругости Пуассона—Коши.— *А. Ф.*), получившей широкое признание, несостоятельность которой во всех или почти во всех случаях была ясно показана более поздними экспериментами, состоит в том, что экспериментаторы, без какого-либо критического отношения признавшие эту теорию, смогли заполнить литературу в течение ряда лет ошибочными численными значениями. Таким экспериментатором был Адольф Теодор Купфер. В серии ежегодных отчетов, опубликованных между 1850 и 1861 гг., об экспериментах по упругости, проведенных в Российской Центральной Лаборатории Мер и Весов, директором который он стал в 1849 г., и в пяти мемуарах, которые он свел в 1860 г. в монографию, содержащую 430 страниц, все численные значения, полученные буквально в сотнях экспериментов, будучи найденными на основе неприемлемых теорий и ошибочных гипотез, совершенно неправильны. Несмотря на это, Пирсон характеризовал работу Купфера так: «Возможно никогда не было проведено более тщательных и исчерпывающих экспериментов по определению вибрационных постоянных упругости и температурного эффекта, чем эксперименты Купфера» [1]).

Все это десятилетие Купфер и его ассистенты занимались, по существу, двумя типами экспериментов, а именно кручением и изгибом образцов из латуни, железа, стали, платины, серебра, меди и золота. В обеих сериях использование больших дополнительных масс, присоединяемых к образцам, и (или) применение длинных образцов, имело следствием то, что частоты крутильных и изгибных колебаний лежали в области предельно малых значений—двух или трех колебаний в минуту. Поэтому, в отличие от своих предшественников: Хладни (Chladni [1787, 1], [1802, 1], [1817, 1], [1822, 1]), Савара (Savart [1820, 1], [1829, 1] [1830, 1], [1837, 1]) и Вертгейма

[1]) Todhunter, Pearson [1886, 1]. (Выдержка из т. I, стр. 750 издания Dover 1960 г.). То же мнение о выдающемся мастерстве Купфера как экспериментатора высказано Тимошенко [1953, 1], который цитировал вышеприведенное утверждение из Тодхантера и Пирсона как доказательство этого.

(Wertheim [1844, 1]), ему не нужно было считать число колебаний в секунду быстро колеблющегося образца, а он смог следить за амплитудой как функцией времени в каждом отдельном колебании. Однако модификации Купфера сделали для него невозможным определить из выполнявшихся им опытов значения модулей, которые он хотел найти. Он, кроме того, упорствовал в использовании теории Пуассона — Коши и отвергал работу Вертгейма, небрежно и бездоказательно заявляя, что она «основана на отстаивании экспериментов в действительности не вполне удовлетворительных» (Kupffer [1852, 1], стр. 193). Это довольно неправдоподобно, но Купфер далее утверждал, что, так как коэффициент Пуассона изотропного твердого тела может принимать значения от 0 до 0,5, среднее значение 0,250 приобретает дополнительную важность, независимо от того факта, что ν, равное 0,25, есть «требуемое» численное значение коэффициента Пуассона.

Публикации Купфера в высшей степени трудны для чтения не только потому, что они содержат многочисленные ошибки, часть из которых была замечена другими, и значительное количество неясных рассуждений [1]), но также потому, что он избрал путь представления упругости твердого тела в терминах одной постоянной, и эта постоянная введена исключительно неудобным способом. Использование постоянной, обозначенной через δ, указывает на возвращение к состоянию знаний начала XIX века, так как ее значение зависело от формы поперечного сечения, а также в неявном виде от единицы измерения приложенной силы. Для продольного нагружения цилиндрического стержня постоянная δ определялась как удлинение, вызываемое единичной силой, приложенной к круглому цилиндрическому образцу единичной длины с единичным радиусом, т. е. $\delta = 1/(\pi E)$. Для стержня квадратного поперечного сечения постоянная δ определялась как удлинение, вызываемое единичной силой, приложенной к стержню единичной длины с единичными сторонами поперечного сечения. Для стержня прямоугольного поперечного сечения $\delta = 1/E$. Для последнего вида стержней в некоторых случаях, но, к сожалению, не всегда, Купфер использовал символ δ'. Он представил некоторые из своих результатов в русских фунтах и русских дюймах [2]). В других случаях он выражал δ в сантиметрах, приложенную нагрузку — в граммах, а в одном случае он использовал английские единицы измерения. Как косвенно признал даже сам Купфер в подстрочном

[1]) Возможно, выдающимся примером таких рассуждений служит его любопытная попытка определить механический эквивалент тепла сравнением силы, требующейся для создания удлинения, равного удлинению в результате теплового расширения при нагреве от 0 до 100°C. Это было слишком даже для Пирсона, который отметил ошибку в анализе Купфера, заключающуюся в приравнивании силы работе (Kupffer [1852, 1]).

[2]) Один русский фунт равен 409,4512 гс или 0,9028 английского фунта. Один русский дюйм равен одному английскому дюйму, или 25,3995 мм.

примечании, читатель его работ часто должен производить самостоятельные вычисления, чтобы удостовериться, что же сделал Купфер.

В случае кручения Купфер определил постоянную упругости для круглого цилиндрического стержня как угол закручивания стержня единичной длины единичной силой, приложенной на единичном радиусе стержня. К сожалению, он обозначил эту величину символом μ, который к тому времени использовался многими упругистами для обозначения модуля упругости при сдвиге изотропного материала. Если мы обозначим эту величину, введенную Купфером, через μ_K, то увидим, что она связана с модулем сдвига формулой $\mu=\pi/(2\mu_K)$. Во всех случаях принималась теория одной упругой постоянной, так что коэффициент Пуассона был равен 1/4. Введенная Купфером величина δ, полученная в опытах на кручение цилиндрических образцов, выражается следующим образом: $\delta=1/(5\mu_K)$.

Заявив, что результаты на звуковых частотах были получены косвенным путем и, следовательно, являлись неудовлетворительными, Купфер прикладывал на испытывающие крутильные колебания образцы длиной 10 футов очень большие грузы. Этим способом он достигал периодов колебаний порядка 0,5 мин, и за эти промежутки времени он мог измерить амплитуду как функцию времени посредством точно градуированного круга и хронометра. Он признавал, что введение больших грузов, находящихся на значительном расстоянии от оси стержня, вызывает трение о воздух, которое приводит не только к неправильным результатам для затухания крутильных колебаний твердого тела, но также к ошибкам в определении постоянной упругости. Усреднив полученные в экспериментах результаты по 70—100 колебаниям, причем всего наблюдалось 300 колебаний, он вывел следующее соотношение между амплитудой и периодом колебаний:

$$P_0=P_S-\alpha\sqrt{S}, \tag{3.11}$$

где P_S — период колебаний, измеренный по амплитуде, равной S; α — экспериментально определяемая постоянная; относительно P_0 предполагалось, что это — период колебаний, измеренный по нулевой амплитуде. Купфер сделал любопытный вывод, что эта величина P_0 будет той же самой, что и величина, которая была бы получена при проведении эксперимента в вакууме. Настолько же странно его утверждение о том, что, хотя наблюдаемое затухание включает в себя воздушное торможение, оно должно содержать также торможение, вызванное самим материалом твердого тела, так как для различных металлов были получены различные значения α.

Во введении к своей работе по кручению (Kupffer [1853, 1]), прочитанной перед собранием Санкт-Петербургской Академии 1 декабря 1848 г., Купфер называет работу Кулона семидесятилетней

давности основой своего исследования. Кулон при проведении первого количественного изучения затухания крутильных колебаний в металлах показал, окружая, как было описано выше [1]), подвешенные грузы бумагой, что воздушное торможение в его экспериментах было ничтожным. Будучи, видимо, не в состоянии исключить воздушное затухание, Купфер изучал его изменения, окружая подвешенные грузы конструкциями из картона. Введя параметр $\psi=\alpha/P_S$, Купфер переписал (3.11) в виде

$$P_0=P_S(1-\psi\sqrt{S}). \tag{3.12}$$

Представив (3.12) как

$$P_S=P_0(1+\gamma r\sqrt{S/l}), \tag{3.13}$$

где r — радиус стержня, l — его длина, Купфер ввел коэффициент γ, который он назвал «истинным коэффициентом текучести или вязкости».

Как я заметил в разделе 3.4, открытие того, что затухание колебаний в металлических твердых телах, так же как и период колебаний, зависит от амплитуды, должно быть приписано Кулону. Сомнительные результаты, полученные Купфером, *не* представляют собой открытия упругого последействия в металлах, несмотря на то, что Пирсон утверждает это в довольно ярких красках в нескольких местах своей истории теории упругости [2]). По отношению к металлам честь открытия принадлежит или Кулону (1784), или Кольраушу (1863) в зависимости от того, подчеркивать ли открытие существования явления или его надлежащее экспериментальное изучение [3]).

Как я отмечал выше, в дополнение к ежегодным отчетам о работе Центральной Лаборатории в Санкт-Петербурге Купфер опубликовал с 1852 по 1863 г. пять мемуаров по упругости. Чтобы проследить за его работой, однако, нам достаточно лишь обратиться к большому тому под названием *Recherches Expérimentales sur l'Élasticité des Métaux* (Kupffer [1860, 1]) (Экспериментальные исследования по упругости металлов), опубликованному в 1860 г. Купфер был глубоко озабочен тем фактом, что «фундаментальный закон упругости Роберта Гука» не характеризует в точности малых деформаций рассмотренных им

---

[1]) См. раздел 3.4. См. также Cornu et Baille [1878, 1].

[2]) Пирсон, несомненно, считает Купфера величайшим физиком-экспериментатором XIX века в теории упругости. Довольно любопытно, что на множестве страниц, которые он посвятил обсуждению *Comptes Rendus Annuels* (ежегодных докладов) Санкт-Петербургской Академии, мемуаров и монографии, не упоминаются слабости и ограничения работ Купфера. Тем не менее Пирсон (Pearson [1892, 1], Sect. 757) после слов о том, что «мы не можем испытывать полное удовлетворение от того, как он использует экспериментальный метод поперечных колебаний» и что были некоторые затруднения с температурными эффектами, пишет: «все же показать существование остаточных деформаций в металлах и указать на их изменение с температурой — немалая заслуга...»

[3]) Как явление, не относящееся к колебаниям, упругое последействие было открыто Вебером в 1835 г. (см. гл. II, раздел 2.12).

метал ов. Он отметил, что и другие исследователи, например Ходкинсон, проявляли подобные опасения по отношению к закону Гука. Купфер обнаружил существенно нелинейное поведение чугуна при кручении и изгибе. Он запланировал многотомную работу, один из более поздних томов которой должен был быть посвящен вопросу доказательства того, что деформация металлов существенно нелинейна, но был опубликован [1]) только первый том, посвященный приближенно линейным свойствам.

Рассмотрев все, что было здесь сказано относительно Купфера, можно удивиться, почему его работа вообще здесь обсуждается [2]). Карл Цёпприц (Zöppritz [1866, 1]), который присоединился почти ко всем другим теоретикам и экспериментаторам второй половины XIX века в выражении восхищения самой массой результатов Купфера, сокрушается о том, что теория, которой пользовался Купфер для вычисления своего коэффициента упругости δ при изгибе тонкого бруса с помещенным на него большим грузом, совершенно неверна. Экспериментальная установка Купфера показана на рис. 3.45, *а* и *б*. Через телескоп, изображенный на рисунке, он наблюдал движение медленно перемещающихся масс.

Думая, что он сможет исключить влияние веса, он сконструировал установку таким образом, что фиксированный конец стержня вращением основания мог быть помещен вертикально, располагаясь сверху или снизу колеблющейся нагруженной консоли. На рис. 3.45, *б* показан вариант этой идеи; с помощью этого оборудования он записывал колебания при расположении бруса выше или ниже горизонтального положения на одну и ту же величину. Вычисления Купфера для кручения содержат предположение, что для всех металлов $\nu = 1/4$. Хотя эта ошибка возникла из его упорной преданности гипотезе одной постоянной вопреки экспериментальному доказательству, данному Вертгеймом, мы находим ссылки на эти результаты Купфера спустя почти сто лет, в 1953 г., как на доказывающие неприменимость гипотезы одной постоянной [3]). На самом

[1]) Купфер умер в 1865 г., прежде чем остаток его честолюбивого плана мог быть выполнен.

[2]) Одна причина заключается, конечно, в стремлении документально засвидетельствовать тот факт, что часть широко цитируемой «Истории», принадлежащую Пирсону, следует читать с осторожностью в том, что относится к экспериментам. Однако главная причина вызвана господствующим влиянием самих экспериментальных результатов Купфера на многочисленных исследователей в течение полувека после его смерти, что способствовало преувеличенным представлениям о неточности экспериментов XIX века.

[3]) Мы видим, например, как в своей «Истории сопротивления материалов» после цитирования упомянутого выше хвалебного утверждения Пирсона Тимошенко пишет:

«Купфер начал с испытаний на кручение, по которым он определил модуль сдвига G. Умножая G на 5/2, он, согласно гипотезе одной постоянной, должен был бы получить модуль растяжения E. Но он обнаружил, что полученные таким путем значения существенно отличаются от результатов опытов на растяжение или изгиб. Следовательно, его результаты не подтверждают гипотезы одной постоянной».

же деле Купфер в своем настаивании на физической обоснованности предположения о наличии лишь одной постоянной обращал мало внимания как на свои собственные результаты, так и на результаты Вертгейма.

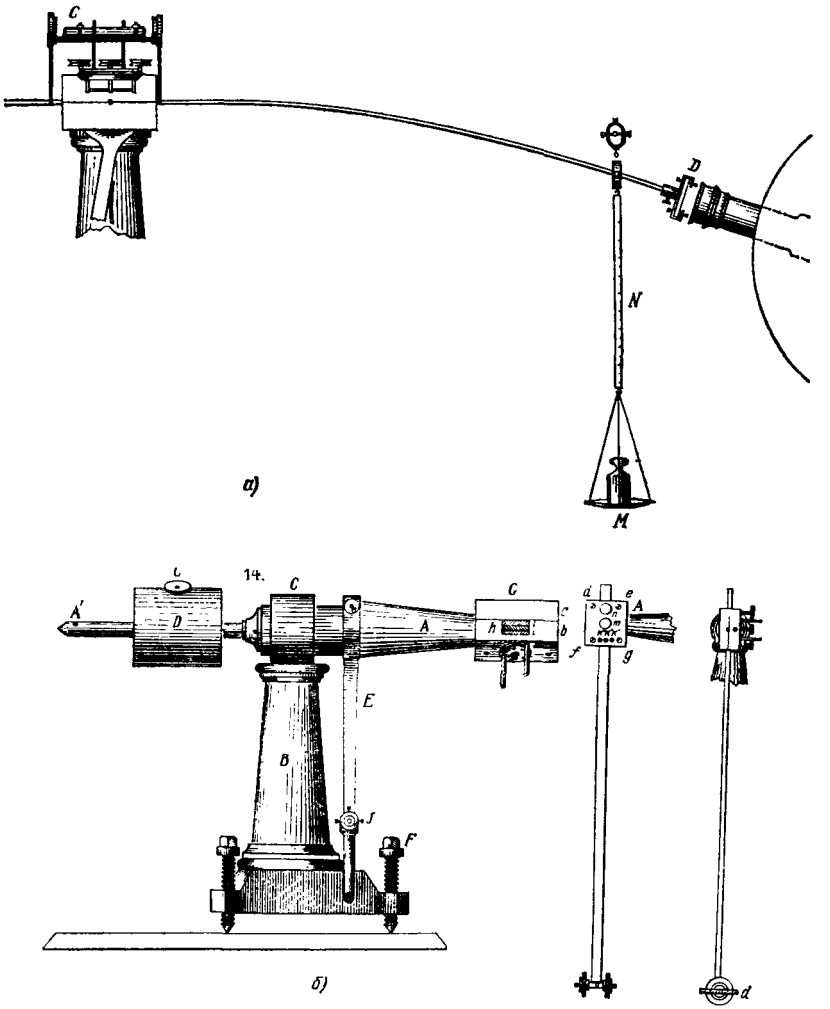


Рис. 3.45. Опыты Купфера. *а)* Установка, включающая увелнчительную трубу для наблюдения колебаний большого периода; *б)* установка для изгибных колебаний большого периода, демонстрирующая способ, при котором образец можно вращать так, чтобы он был выше, а затем — ниже точки опоры.

Цёпприц в своей докторской диссертации указал на ошибки в исследовании Купфера и по существу показал невозможность введения поправки в результаты при больших дополнительных грузах,

особенно в случае, когда стержень был в двух вертикальных положениях. Позже в работе 1866 г. Цёпприц (Zöppritz [1866, 1]) дает поправки для латуни, железа, серебра, золота, цинка, стали и меди применительно к некоторым экспериментам Купфера, в которых следовало рассматривать только вес самого стержня, хотя Купфер и использовал два вертикальных положения. Получив в результате пересчета по значениям величины δ, введенной Купфером, модуль упругости E, Цёпприц сравнил пересчитанные по данным Купфера результаты с приведенными Понселе в его Introduction à la Mécanique Industrielle (Poncelet [1841, 1]) (Введение в промышленную механику) данными Ардана, Дюло, Лагерхельма, Ронделе, Савара и Тредгольда и с результатами Вертгейма. Это сравнение, приведенное в табл. 86, где прописными буквами отмечены фамилии экспе-

Таблица 86

Цёпприц (1866)

	Исправленные результаты Купфера	По Вертгейму	Более ранние наблюдения
		Латунь	
Литая (2, 4)	8 439	8 543	6 450? T
Литая, Хессе (7)	9 775		
Прокат (5, 6, 9)	10 687		
Кованная (1, 8)	11 327		
Проволока	10 375	9 005—10 348	10 000 A, 9 600 S
		Сталь	
Литая сталь (6)	20 874	19 881—20 698	20 400 T (прокованная, мягкая)
Ремшайд (17, 19)	21 100		
Проволока (10)	19 276	19 549	19 000 A, 20 000 S
		Железо	
Листовое, вдоль листа	21 112		
То же, поперек листа	19 249		
Английское, ковка (8)	20 061	20 869—18 547 (Железо Веггу)	20 680 L 20 000 D, T
Шведское, ковка (11)	21 029		20 750 L
Литое (3)	11 267		9 840 R, 12 000 T
		Медь	
Отожженная, мягкая (2)	12 827		
Катаная интенсивно (4)	12 646	12 513 (проволока)	13 100 S (проволока)
Цинк, прокат	9 666	8 800—9 600	9 600 T
Серебро, barre	7 773	7 358—7 820	
Золото, barre	7 412	8 132—8 645	

риментаторов, показывает, что исправленные значения, полученные в результате надлежащего анализа данных Купфера для изгиба ненагруженных тонких стержней, согласуются с предыдущими экспериментальными результатами его времени.

Пирсон, перепечатав эти сравнения, говорит о желательности более широких, чем у Цёпприца, усилий по повторному использованию путем исправления, если это возможно, обширных результатов Купфера. Прочитав работы Купфера и, в частности, большой том (Kupffer [1860, 1]), я обнаружил, что легко понять, почему никто никогда не последовал предложению Пирсона. Даже Купфер признавал, что его компетентность за десять лет чрезвычайно возросла, но тем не менее он включал результаты, начиная с ранних экспериментов, «какую бы ценность они ни имели».

Серьезный физик-экспериментатор, обремененный всеми интеллектуальными и общественно-научными трудностями, стоящими перед его коллегой-теоретиком, должен к тому же еще и получить лабораторию. Едва ли еще какой-либо механик-экспериментатор середины XIX века пользовался возможностями, финансовой поддержкой и свободой выбора, какие получил Купфер в 1849 г., возглавив новую Центральную Лабораторию в Петербурге. После его избрания в 1828 г. в возрасте 29 лет ординарным академиком Санкт-Петербургской Академии наук [1]), он опубликовал около шестидесяти заметок, отчетов и мемуаров по таким вопросам, как измерения магнитного склонения и барометрического давления в различных частях России и на различных высотах во время горных экспедиций и, кроме того, несколько работ, описывающих наблюдения за ростом органических кристаллов. Его решение направить внимание новой Центральной Лаборатории на выполнение грандиозно задуманного плана создания экспериментальных основ физики деформации твердых тел, так чтобы уравновесить быстро увеличивающиеся достижения теории упругости, без сомнения представляет собой важный и потенциально плодотворный выбор курса для пятидесятилетнего экспериментатора. То, что все десятилетнее интенсивное экспериментирование дало много меньше, чем побочные исследования Вика или Ходкинсона, ориентированные на технологию, или физика Вебера, чье пребывание в Гёттингене было прервано на много лет, или Вертгейма, который, несмотря даже на свое личное состояние, никогда не имел в распоряжении персональной лаборатории, дает интересный исторический пример скудных результатов широкораспространенной ныне практики подхода к решению фундаментальных научных проблем путем коллективных исследований в специально предназначенных лабораториях.

---

[1]) Когда он был избран в Академию, там было 50 членов. В списке членов Академии 1860 г., средн которых было 40 ординарных академиков, Купфер был почти единственным, кто не прошел шаг за шагом путь от адъюнкта до ординарного академика, а был сразу избран ординарным академиком.

3.30. Метод Мэллока для квазистатического определения модуля объемной упругости

Большинство исследований постоянных упругости в XIX веке, как мы видели, было посвящено прямому экспериментальному определению μ, E и, в конце концов, ν. Работы Рено и Вертгейма в 40-х гг. XIX века и исследование удлинения труб, проведенное Амага в 80-х гг. XIX века, были далеко не удовлетворительным решением проблемы получения квазистатического модуля объемной упругости твердых тел. Все они пользовались пьезометрами. Только Вертгейм имел дело преимущественно с твердыми телами; Рено и Амага стремились, пользуясь линейной теорией упругости, получить абсолютную сжимаемость жидкости, чтобы, косвенным образом, определить сжимаемость сосуда.

Первым экспериментатором, попытавшимся определить сжимаемость непосредственно, не прибегая к линейной теории упругости в относительно сложной ситуации, был Джон Янг Бюханен в 1880 г. (Buchanan [1880, 1]). Он измерял микроскопом сквозь стенки тяжелой стеклянной трубы, внутри которой находился стержень под гидростатическим давлением, изменения длины этого стержня.

Перси Уильямс Бриджмен (Bridgman [1931, 1]) в своем введении к «Физике высоких давлений» высказал предположение, что возможно причина настолько некачественных результатов Бюханена заключается во влиянии оптического преломления толстого стекла. В дальнейшем, в главе о сжимаемости твердых тел, Бриджмен указывает, что величина $2{,}92 \cdot 10^{-6}$ /атм, полученная Бюханеном для объемной сжимаемости стекла, вполне приемлема, но метод ее получения не может быть проверен, поскольку сжимаемость стекла может изменяться в широких пределах. (Напомним, например, большой разброс значений коэффициента Пуассона для тридцати видов стекла, обнаруженный Штраубелем.)

Спустя несколько лет, в 1904 г., Бюханен опубликовал полученные тем же способом результаты (Buchanan [1904, 1]) для большого числа твердых тел, включая металлы, при атмосферном давлении до 300 кгс/см^2. Он получил значения, которые, как отмечает Бриджмен, оказались «особенно плохими для металлов, что привело в худшем случае, а именно для платины, к значениям объемной сжимаемости $5{,}5 \cdot 10^{-7}$ вместо правильной величины $3{,}6 \cdot 10^{-7}$» (Bridgman [1931, 1], стр. 151).

Арнульф Мэллок[1]) в 1904 г. снова предложил экспериментальный метод определения квазистатического модуля объемной упругости, который, хотя и был основан на линейной теории упругости,

[1]) Mallock [1904, 1]. «Метод Мэллока» фактически основан на эксперименте, впервые предложенном в 1848 г. Вертгеймом и выполненном в 1888 г. независимо Амага и Кантоне, причем оба они ссылались на Вертгейма. Кантоне использовал интерференционную оптику для измерения удлинения (Wertheim [1848, 1], Cantone [1888, 1]). Мэллок не упоминает своих предшественников.

обеспечивал простой подход к проблеме, так как требовал точного измерения давления и линейного удлинения, т. е. не было необходимости измерять объемные изменения, как в пьезометрических исследованиях. Этот эксперимент, который приобрел известность как «метод Мэллока», состоял в наблюдении изменения длины, т. е. удлинения, цилиндрической трубы с закрытыми торцами под известным гидростатическим давлением. Мэллок предложил крайне упрощенный анализ, основанный на предположении о предельной тонкости стенки трубы.

В статье, помещенной в том же томе после статьи Мэллока, Чарльз Кри [1]) пересмотрел проблему, показав, что модуль объемной упругости непосредственно выражается простой формулой

$$K=\frac{p_i}{3\varepsilon t}\frac{r_1^2}{r_2+r_1}, \tag{3.14}$$

где K — модуль объемной упругости, подлежащий определению, p_i — известное гидростатическое внутреннее давление, ε — измеренное удлинение трубы, вызванное приложением этого давления, t — измеренная толщина стенки, r_2 — внешний радиус стенки трубы, а r_1 — внутренний радиус стенки, т. е. $t=r_2-r_1$. Исправления Кри экспериментов Мэллока для стали, латуни и меди в закаленном и отожженном состояниях показаны в табл. 87.

Таблица 87

Кри (1905)

Материал	l (дюймы)	Внешний диаметр (дюймы)	t (дюймы)	Состояние материала	$\delta l\cdot 10^3$ (дюймы)	Модуль объемной упругости K (дин/см^2 $\times 10^{-11}$)
Сталь	60	0,75	0,0190	Твердая	2,8	18,0
				Отожженная	2,75	18,3
Латунь	50	0,415	0,0185	Твердая	2,12	10,6
				Отожженная	2,09	10,7
Медь	50	0,4485	0,0382	Твердая	0,562	18,1
				Отожженная	0,71	14,3

3.31. Использование Грюнайзеном метода Мэллока для сравнения постоянных упругости изотропных твердых тел (1910)

Грюнайзен, который, как мы видели выше, провел непосредственное независимое определение E, μ и ν для изотропных твердых тел, чтобы установить насколько экспериментальные значения удов-

[1]) Chree [1905, 1]. И Амага, и Кантоне дали в точности ту же формулу, анализируя свои результаты, полученные в таких же экспернментах, почти на два десятилетия прежде чем проблему рассмотрели Мэллок и Кри.

летворяют зависимости $E=2(1+\nu)\mu$, интересовался также проведением подобной проверки (Grüneisen [1910, 3]) удовлетворения формуле $\chi E=3(1-2\nu)$. Это потребовало от него независимого определения сжимаемости χ (величина обратная модулю объемной упругости K), E и ν. Значения E и ν он находил с помощью интерферометрии, а μ — способом изучения крутильных колебаний, напоминающим способ Хладни. Все эти измерения проводились на стержнях.

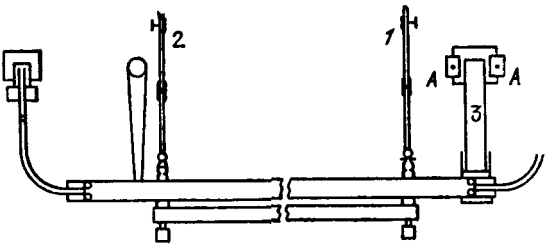


Рис. 3.46. Установка, которой пользовался Грюнайзен (1910) при своей адаптации эксперимента Мэллока к использованию в условиях различных уровней окружающей температуры.

При использовании метода Мэллока для определения сжимаемости одних и тех же твердых тел Грюнайзен понимал, что при сравнении упругих постоянных, найденных на стержнях и на совершенно других образцах в форме трубы, возникнут трудности, т. е. E и μ также следует определять на тех же трубах.

В этих исследованиях Грюнайзен в равной степени интересовался и другим аспектом сжимаемости твердых тел, а именно, температурной зависимостью. Метод Мэллока соответственно был использован для определения сжимаемости, или модуля объемной упругости, при —195; 17 и 100°C. Результаты будут обсуждены ниже в разделе 3.41. Эта работа Грюнайзена, на которую спустя более чем полвека все еще широко ссылаются в литературе, содержит детальное описание ограниченности метода Мэллока с точки зрения точности измерений. На схеме Грюнайзена показана труба, подвешенная в двух точках; концы трубы закупорены и присоединены к установке, создающей давление (см. рис. 3.46).

Грюнайзен находил необходимым детально рассматривать влияние на установку термического расширения, влияние нагревания при сжатии во время приложения внутреннего давления и влияние концов трубы и конечности толщины стенки на возникновение изгиба образца в форме трубы, которые могли быть источником ошибок. Когда предел упругости был слегка превышен, возникала задача истолкования результатов, особенно для более мягких металлов. Явление упругого последействия могло привести к серьезным ошибкам, так что момент измерений имел большое значение, особенно когда это явление рассматривалось вместе с противоположным эффектом нагревания от сжатия. Точность, которой стремился достичь Грюнайзен, требовала тщательности в определении размеров, т. е. внутреннего и внешнего радиусов и начальной длины, а также

анализа точности, с которой могло быть определено прикладываемое давление.

Отсылая читателя к работе Грюнайзена (Grüneisen [1910, 3]), где содержится пространное описание этих интересных подробностей и обсуждение природы металлических подвесок, на которых удерживался образец, изучение влияния на результаты их местоположения вдоль трубы, проблем, связанных с конструкцией внешней коробки, низкие температуры в которой создавались кипящим жидким азотом, а высокие — разогретым маслом, я буду лишь обсуждать цифровые результаты. Экспериментальные значения сжимаемости χ при 18°C даны в табл. 88, в которую я добавил в последнем столбце значения модуля объемной упругости K — величины обратной к сжимаемости.

Таблица 88

Грюнайзен (1910)

Материал		s	E (кгс/мм²)	ν	$\chi \cdot 10^6$ (см²/кгс)	K (кгс/мм²)
Алюминий	Стержень	2,71	7 200	0,34	*1,31*	7 630
	Труба	2,705	7 330	*0,32*	1,46	6 850
Железо	2 стержня	7,83	21 500	0,28	*0,60*	16 530
	Труба 1	7,82	20 900	*0,280*	0,633	15 780
	Труба 2	7,83	21 250	*0,293*	0,583	17 100
Медь	Стержень	8,96	12 500	0,35	*0,73*	13 800
	Труба	8,89	12 750	*0,34*	0,77	13 000
Серебро	Стержень	10,53	8 050	0,38	*0,90*	11 100
	Труба	10,49	7 350	*0,407*	0,76	13 150
Олово	Стержень	7,28	5 540	0,33	*1,9*	5 260
	Труба	7,27	—	—	(3,1) [a]	3 225
Платина	Стержень	21,39	17 080	0,39	*0,40*	2 500
	Труба	21,44	16 770	*0,391*	0,39	2 560
Свинец	Стержень	11,32	1 660	0,45	*2,0*	5 000
	Труба	—	—	—	(3,2) [a]	3 125

[a] Грюнайзен не был уверен в правильности численных значений для олова и свинца, помещенных в скобки.

В своей таблице Грюнайзен также поместил величины E и непосредственно (независимо) определенные значения ν. Экспериментальные значения набраны обычным шрифтом, а вычисленные — курсивом. Кроме того, он привел экспериментальные значения плотности s для материалов стержней и труб, которые служили образцами всех семи исследованных поликристаллических металлов. Как отметил Грюнайзен, за исключением серебра, для которого были получены наибольшие различия, между вычисленными и экспериментальными значениями наблюдалось некоторое согласие. Невозможно с определенностью сказать, насколько полученные различия

могут быть связаны с использованием двух разных форм образцов и разных методов определения модулей. Из обсуждения Грюнайзеном (Grüneisen [1908, 1]) в 1908 г. полученных им непосредственным определением значений E, μ и ν мы видим, что вычисления, которые требуют рассмотрения отношения измеренных величин, крайне чу ствительны к малым ошибкам [1].

3.32. Линейная аппроксимация и одномерное распространение волн: Вертгейм и Бреге (1851)

Во всех исследованиях модулей упругости, квазистатическими ли методами или вибрационными, будь то при растяжении, сжатии, кручении или изгибе, предполагалось, что распределение напряжений и деформаций в твердом теле как функций пространственных координат и времени известно. В отличие от того, как к этому подходил Мариотт, который в XVII веке понимал, что необходимо убедиться, действительно ли в квазистатическом эксперименте деформации вдоль ооразца однородны, почти все следовавшие за ним, рассматривалась ли тридцатиметровая проволока или тридцатимиллиметровые монокристаллы, довольствовались тем, что *a priori* утверждали наличие однородности. В вибрационных исследованиях использование собственных функций и соответствующих им собственных значений не только предполагает, что статистическая пространственно-временна́я сумма микросейсмического продольного и поперечного распространения волн, сложного отражения и взаимодействия соответствует приближенным теориям, но также предполагает, что при выяснении физической применимости различных, тех или иных, исходных уравнений возможно выделить геометрические, вязкостные и термические эффекты при помощи простых предположений. Уточнение приближенных теорий колебаний стержней за последние 90 лет не раз наглядно продемонстрировало опасности самоуспокоенности в этих вопросах.

Само по себе использование экспериментов по распространению волн для изучения физической применимости линейной или любой другой теории поведения твердых тел при малых деформациях логически требует того, что прежде чем делать слишком поспешные выводы относительно значения численного согласия, полученного экспериментаторами, проводившими одинаковые опыты и делавшими одинаковые вспомогательные эмпирические предположения, следует показать точное соответствие предпосылок и предположений предлагаемого исследования экспериментальным условиям. Согласно элементарной линейной теории упругости профиль отдельной волны остается неизменным и распространяется с постоянной скоростью. Наблюдение дисперсии и изучение распределения скоростей отдельных волн как функции амплитуды деформации или скорости частицы создает очень серьезные трудности в проведении границ между вкладом нелинейности зависимости между напряже-

ниями и деформациями, пространственности эффектов в условиях, когда предполагалось одномерное поведение, вкладом линейной или нелинейной вязкости, а также влиянием непредвиденных обстоятельств. С помощью замеров, типа радиолокационных, среднего времени прихода волны в ограниченных по размерам образцах, особенно для очень низких амплитуд деформации и для измерений на относительно малых расстояниях, можно получить средние значения скоростей волн, но ясно, что сами по себе эти замеры не дают возможности оценить применимость той самой теории, на которой и основывается их интерпретация.

Первые эксперименты по прохождению волн, а именно эксперименты Био (Biot [1809, 1]) в Париже в 1809 г. с водопроводными чугунными трубами длиной 951 м и более поздние эксперименты 1851 г. Вертгейма и Бреге (Wertheim, Breguet [1851, 1]) на 4050-метровой Версальской линии электротелеграфа из железного провода, конечно, представляли собой исключительно замеры продолжительности распространения волны. Био, как мы видели, получил для железа скорость звука в 10,5 раза больше скорости звука в воздухе, что существенно ниже значения 12,2, вычисленного по квазистатическому модулю, и намного ниже полученного Хладни (Chladni [1817, 1]) отношения, равного 16,66. Вертгейм и Бреге после множества попыток в разных местах нашли наиболее подходящим участок телеграфного кабеля линии Версаль — Париж между Аньером и входом в туннель около Пюто [1]). Провод туго натягивался слегка приподнимавшимися столбами. Измеренная длина равнялась 4067,2 м с учетом провисания провода, разницы в высотах столбов и толщины дерева, через которое должен пройти начальный импульс. Они испытали много способов создания звукового импульса, но только удар молотком по одному из столбов создавал эффект, который им удавалось измерить на больших расстояниях.

Метод измерения Вертгейма и Бреге в точности воспроизводит метод Био. Ассистент на одном конце наносил удар в заранее условленный момент. Находящийся тут же и стоящий спиной наблюдатель, услышав удар, замечал начальное время на хронометре, имевшем точность до десятых долей секунды. Наблюдатель на другом конце провода, услышав звук, ждал 30 с по показанию второго хронометра и посылал по проводу обратный импульс, так что общая продолжительность двойного прохождения могла отмечаться по тому же хронометру, которым пользовались для регистрации начального удара. Усреднение результатов многих экспериментов дало для железа скорость 3485 м/с. Это значение, в 10,5 раза превышающее скорость звука в воздухе (скорость звука в воздухе 332 м/с была

[1]) Вертгейм и Бреге (Wertheim, Breguet [1851, 1]) заметили любопытный факт: туннель создавал помеху для прохождения звука по проводу. Они не смогли обнаружить звук, прошедший сквозь туннель, даже когда они, в конце концов, применили относительно толстый железный кабель, который нигде не касался стен.

получена в опыте, в котором звук создавался с помощью выстрелов из пистолета), почти совпало со значением Био сорокатрехлетней давности, который на самом деле получил отношение к скорости звука в воздухе 10,6, а записал, что оно равно 10,5. Био получил для чугуна скорость звука 3658 м/с; измеренная им скорость звука для воздуха в трубе равнялась 344,6 м/с. Вертгейм и Бреге заметили, что по опытному значению квазистатического модуля E для железа отношение скоростей в случае Био составило 12,2, т. е. скорость звука равнялась 4075 м/с.

Вибрационный эксперимент Хладни с продольным сонометром на точно такой же проволоке длиной два метра дал намного более высокое значение волновой скорости в железном телеграфном проводе, равное 4634 м/с. Более ранний спор, вызванный различиями между результатами опытов Хладни и Био, был, таким образом, возобновлен, на этот раз на основе сравнения результатов, полученных на идентичных образцах длиной 2 м и 4067,2 м. Для железа с плотностью 7,9 г/см^3 значение модуля E, полученное Вертгеймом и определенное по прохождению волн, равно 9620 кгс/мм^2. (Био не привел плотности материала своей чугунной трубы. Значению 7,9 г/см^3 соответствует 10 600 кг/мм^2.) Значение, вычисленное Вертгеймом на основе его опытов по определению квазистатического модуля, равно $E=13\ 150$ кгс/мм^2. Полученное им значение на основе опытов с продольными колебаниями двухметровых проволок равно $E=16\ 950$ кгс/мм^2; и, наконец, значение, полученное ранее Хладни в того же типа эксперименте с продольными колебаниями, равно $E=24\ 700$ кгс/мм^2. Стандартное современное значение равно $E=20\ 800$ кгс/мм^2. Это значение впервые было получено в 1811 г. Дюло и также было получено Вертгеймом для некоторых, отличных от телеграфного провода образцов.

Результаты Вертгейма, полученные на четырехкилометровом целом проводе, могли поднять новые экспериментальные проблемы [1]), но они определенно избавили эксперименты Био на километровой трубе от критики, основанной на том, что существование множества секций было причиной понижения скоростей волны. Скорости волн в состоящей из секций железной трубе и целом проводе имели одно и то же низкое значение. Ряд приведенных выше численных значений согласуется с недавно открытым дискретным распределением значений модулей упругости — мультимодульности в металлах [2]), которая будет рассматриваться в этой главе позже, когда мы вернемся к этим данным в разделе 3.44.

---

[1]) Хвольсон в своем обширном историческом обзоре экспериментальной механики *Traité de Physique* в 1908 г. при объяснении такой низкой скорости волны делает притянутое за волосы предположение, что звук распространялся на четыре километра по земле (Chwolson [1908, 1]).

[2]) Bell [1968, 1]. Это квантованное распределение значений постоянных упругости для элементов, описанное в разделе 3.44, дает для целочисленных значений индекса $s=5$, 6, 7, 8, 9 и 10 следующие значения E для железа: 25 500, 20 800,

3.33. Эксперименты Экснера по распространению волн в резине (1874)

Основанием для следующей важной попытки изучения распространения волн в твердых телах послужило обнаружение Джоном Гафом (Gough [1806, 1]) в 1802 г. необычных термических свойств резины под нагрузкой. В своем втором «эксперименте» Гаф заметил, что нагруженный резиновый образец укорачивается при нагревании. Во второй половине XIX века это открытие связывалось с предположением Кельвина 1855 г. Именно предположение Кельвина привело к экспериментам Джеймса Прескотта Джоуля (Joule [1859, 1]) 1859 г., показавшим такое поведение. Однако Джоуль заметил, кроме того, что существует начальная область деформаций, в которой образец резины слегка остывает, прежде чем он начинает нагреваться при больших деформациях. Этого не происходит почти ни с какими другими твердыми телами, для которых при растягивающих нагрузках наблюдается только остывание.

Якоб Шмулевич [1]), получивший экспериментальные свидетельства подобного аномального поведения мышечных волокон, утверждал, что для резины переход из области остывания в область нагревания происходит при достижении двойной начальной длины. (Он

---

16 980, 13 850, 11 300, 9 250 кгс/мм^2, которые, как можно видеть, находятся в близком согласии с рядом определенных в XIX веке значений. Как указано в разделе 3.44, это распределение было открыто в результате сравнения модулей упругости различных изотропных элементов и затем обнаружения того, что в данном элементе может быть аналогичное распределение после разных температурной и деформационной предысторий. Тот факт, что дискретное распределение экспериментально найденных в XIX веке значений модуля E железа хорошо согласуется с квантованным распределением, открытым в результате изучения современных данных, хотя, конечно, ретроспективно его и следовало ожидать, не играл никакой роли в самом открытии. Теперь ясно, что вызванный результатами Хладни и Бно спор, который оставался нерешенным полтора века, возник не из-за недостатков экспериментирования одного или другого участника, как многие считали, но скорее из-за предположения о том, что для каждого твердого тела должен существовать единственный набор значений упругих постоянных.

[1]) Schmulewitsch [1866, 1]. Интерес Шмулевича в получении экспериментального аналога деформации мышцы ноги лягушки привел его к рассмотрению относительно малых деформаций резины. Его результаты отличались от результатов Джоуля вплоть до приложения нагрузок, достаточных, чтобы увеличить начальную длину вдвое. Эти результаты будут обсуждаться в главе о конечных деформациях (раздел 4.39), здесь же интересно отметить обнаружение Шмулевичем того факта, что при деформации в резине, чуть большей чем 10%, изменения окружающей температуры не вызывают увеличения или уменьшения удлинения. Он также заметил, что в этой начальной области малых конечных деформаций график зависимости напряжение — деформация обращен вогнутостью к оси деформаций, в отличие от графика для мышцы лягушки, который, подчиняясь закону Вертгейма, имеет вогнутость, обращенную в сторону оси напряжений. Вне области начальных деформаций находится точка перегиба, и график функции напряжения — деформации для резины при больших деформациях также становится выпуклым в сторону оси деформаций.

не упоминает того факта, что ранее Джоуль наблюдал этот переход при деформации в 20%.) Существование этой, как ее назвали, «нейтральной точки» и тот факт, что эксперименты Шмулевича указывали, что она находится примерно при удлинении в 100%, которое, как думали, имеет особое значение, не только породили множество объяснений, но также и вызвали интерес к исследованию температурной зависимости постоянных упругости в различных областях деформации и к исследованию самой нейтральной точки. Шмулевич пытался объяснить это явление, предположив, что постоянная упругости резины должна возрастать не только с ростом напряжения, но также и с ростом окружающей температуры. Это предположение привело Франца Экснера (Exner [1874, 1]) к попытке измерить скорость звука в резиновых шнурах как функцию напряжения, начального удлинения и окружающей температуры.

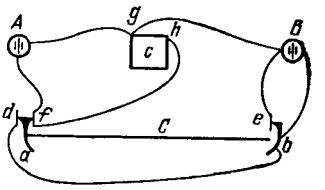


Рис. 3.47. Чертеж схемы электрической цепи в экспериментах Экснера 1874 г. по распространению волн.

Эти результаты, продемонстрировавшие, что предположение Шмулевича о влиянии температуры не соответствует действительности, были основаны на эксперименте, предложенном «Директором Стефаном» и осуществленном Экснером. Экснер растягивал на определенную длину резиновые шнуры известных начальных длин и затем прикреплял их к натянутой шелковой нити. После поджигания нити на одном конце возникала деформационная волна. Эта волна достигала противоположного конца за конечный промежуток времени, по значению которого вычислялась скорость волны при данных удлинении и температуре, а по этой скорости, в свою очередь, и по известной плотности вычислялся соответствующий динамический модуль упругости. Экснер определял интервал времени посредством инструмента, называемого «хроноскопом Гиппа», часовой механизм которого работал только тогда, когда прерывался ток, влияющий на электромагнитный ограничитель. Экснер описывает хроноскоп Гиппа как новый и как способный регистрировать интервалы прерывания тока от 0,012 до 0,016 с.

Экснер довольно детально разработал способ, которым он контролировал точную работу выключателей d, f и e на представленной им схеме, показывающей установку (рис. 3.47). На рисунке элементы A и B — элементы Даниэля, c — хроноскоп, C — резиновый шнур, a и b — жесткие пружины. Фронт волны инициировался с помощью a.

В первой серии опытов к нарезанным из резинового шнура образцам с различными начальными длинами прикладывалась нагрузка 200 гс; полученные под этой нагрузкой длины приведены в табл. 89. В каждом случае постоянной нагрузки в 200 гс было достаточно, чтобы вызвать почти точное удвоение длины до интересующей нейт-

ральной точки [1]). Результаты отдельных хронометрических измерений для образцов, отношение длин которых доходило до семи, дали почти одинаковое значение скорости звука при комнатной температуре, приблизительно равное при этой нагрузке 46 м/с.

Таблица 89

Экснер (1874)

Длина шнура (м)		Данные хроноскопа в индивидуальных экспериментах (с)	Скорость звука (м/с)
I.	0,91	0,020; 0,020; 0,019 0,020; 0,021; 0,020	45,5
II.	2,07	0,044; 0,042; 0,046; 0,046 0,046; 0,045; 0,046	46,0
III.	3,83	0,085; 0,084; 0,084; 0,085	45,3
IV.	6,77	0,144; 0,142; 0,145; 0,145 0,142; 0,144; 0,146; 0,143 0,142	47,1

Проверив таким образом общую применимость метода, Экснер растягивал резиновый шнур с начальной длиной при нулевой нагрузке в один метр до двух, трех, четырех и пяти метров. Как можно видеть из табл. 90, ему удалось показать возрастание скорости, а сле-

Таблица 90

Экснер (1874)

Длина шнура (м)		Данные хроноскопа в индивидуальных экспериментах (с)	Скорость звука (м/с)
I.	2,0	0,041; 0,044; 0,043; 0,042 0,041; 0,043; 0,042	47,2
II.	3,0	0,054; 0,051; 0,054; 0,052 0,053; 0,054; 0,050; 0,053 0,056; 0,053	56,6
III.	4,0	0,063; 0,064; 0,064; 0,066 0,063; 0,063; 0,063; 0,063 0,065; 0,062	62,9
IV.	5,0	0,077; 0,074; 0,077; 0,077 0,074; 0,075; 0,078; 0,074 0,075; 0,077	65,9

[1]) И по Шмулевичу, и по Экснеру «нейтральная точка» расположена при $\varepsilon = 1{,}00$ вместо $\varepsilon \cong 0{,}20$ по Джоулю или $\varepsilon \cong 0{,}12$ по более современным измерениям. Либо они совершили одну и ту же ошибку в совершенно разных экспериментах, либо исследовали образцы резины, приготовленные существенно другим, чем у Джоули, способом.

довательно, и касательного модуля диаграммы напряжение — деформация с ростом напряжения.

После этих предварительных экспериментов Экснер исследовал зависимость скорости звука от температуры, проведя опыты в камере, в которой могла поддерживаться однородная температура в пределах от 0 до 74°С. При нагрузке 200 гс, которая вызывала по сравнению с ненапряженным состоянием увеличение длины вдвое, он получил уменьшение скорости звука и, следовательно, касательного модуля с ростом температуры, показанное в табл. 91.

Результаты табл. 91 А относятся к черной резине. Как можно видеть в табл. 91 В, сходные результаты Экснер получил и для красной резины.

Таблица 91

Экснер (1874)

А. Черная резина		В. Красная резина		А. Черная резина		В. Красная резина	
температура (°С)	скорость звука (м/с)	температура (°С)	скорость звука (м/с)	температура (°С)	скорость звука (м/с)	Температура (°С)	скорость звука (м/с)
0	54,0	0	69,3	40	33,5	57	36,6
12	47,6	11	57,1	50	30,7	70	33,9
15	47,0	22	44,4	60	30,2		
33	37,5	42	39,1	74	29,0		

Модифицировав установку так, что импульс мог прикладываться к одному концу ненапряженного стержня с поперечным сечением 9 см² и длиной 1,60 м, снабженного металлическими наконечниками, но, используя ту же хронометрическую технику, Экснер исследовал зависимость скорости звука от температуры при нулевом напряжении в начальной области. Эти результаты, приведенные в табл. 92, показывают, что в начальной области, так же как и вблизи нейтральной точки, разделяющей первую и вторую области, скорость звука уменьшается с повышением температуры. Опровергнув таким образом предположение Шмулевича, Экснер не потрудился сравнить касательный модуль, определенный в квазистатических и вибрационных опытах со своими результатами, полученными в опытах по распространению волн.

Не сумев достать дополнительные образцы из того же материала, что и в первоначальных шнурах, и отдавая себе отчет в том, что переход от одной партии резины к другой помешает полноценному сравнению с результатами других экспериментов, Экснер провел волновые и квазистатические измерения на заново изготовленных резиновых шнурах того же типа. Для стержня с поперечным сечением 4 см² в растянутом состоянии, он получил при комнатной темпе-

Таблица 92

Экснер (1874)

Температура (°С)	Показания хроноскопа в индивидуальных экспериментах (с)	Скорость звука (м/с)
0	0,036; 0,036; 0,037 0,038; 0,037; 0,038 0,038; 0,038; 0,038 0,035; 0,037; 0,038 0,035; 0,038	43,2
10	0,040; 0,039; 0,039 0,040; 0,040; 0,039 0,038; 0,039; 0,039 0,040; 0,040; 0,040	40,8
22	0,041; 0,043; 0,043 0,045; 0,042; 0,042 0,045; 0,041; 0,044 0,041; 0,043	37,4
45	0,050; 0,047; 0,047; 0,050 0,050; 0,050; 0,051; 0,049 0,052; 0,047; 0,049; 0,050 0,051; 0,051; 0,050; 0,051 0,050	32,3

ратуре значение скорости звука 34,6 м/с. Скорость звука, определенная по квазистатическому удлинению при таком же нагружении, была равна 37,5 м/с, что Экснер рассматривал как достаточную проверку, принимая во внимание тот факт, что последний эксперимент являлся лишь грубым приближением.

Таблица 93

Экснер (1874)

Импульс	Данные хроноскопа в индивидуальных экспериментах (с)	Среднее
	Стержень: поперечное сечение 9 см²	
Очень слабый	0,043; 0,042; 0,042; 0,042 0,043; 0,043; 0,043; 0,043	42,6
Очень сильный	0,043; 0,043; 0,044; 0,039 0,042; 0,042; 0,043; 0,043	42,4
	Стержень: поперечное сечение 4 см²	
Очень слабый	0,044; 0,044; 0,042; 0,044 0,042; 0,044; 0,045	43,6
Очень сильный	0,045; 0,043; 0,044; 0,043 0,045; 0,042; 0,045	43,8

Наконец, в экспериментах с нулевым начальным напряжением для образцов с поперечными сечениями 9 и 4 см² Экснер доказал, как можно видеть из табл. 93, что скорость звука не является функцией амплитуды волны. Он показал это, сравнивая скорости волн, вызванных импульсами большой и малой интенсивности.

Несмотря на недостаток точности в этих экспериментах Экснера, особенно если сравнить их с работами Био или Вертгейма, свежий экспериментальный подход Экснера к распространению волн представляет собой шаг вперед в этой области. Своими попытками объяснить термические аномалии растянутой резины он поставил вопросы для дальнейших исследований 70-х гг. XIX века. Это было первое исследование распространения волн в предварительно напряженном твердом теле. Прошло семьдесят пять лет, прежде чем вновь были проведены следующие эксперименты этого типа: Лазарусом (Lazarus [1949, 1]) для сверхзвуковой волны в предварительно напряженном высоким давлением поле и мною (Bell [1951, 1]) для нарастающей волны в твердом теле, предварительно напряженном до создания больших пластических деформаций.

3.34. Осевое соударение стержней в предположении линейности функции отклика: эксперименты Больцмана (1881 и последующие годы) и сопоставление их результатов с теорией Сен-Венана (1867)

Для изучения поведения профиля волны в относительно малых ограниченных твердых телах нагрузки должны быть приложены в течение предельно короткого интервала времени. Первым возможным методом выполнения этого требования явилось столкновение твердых тел в свободном полете.

Коши в 1826 г. (Cauchy [1826, 1]) и Пуассон в 1833 г. (Poisson [1833, 1]) предложили теории для упругого продольного соударения цилиндрических стержней одинаковых и разных длин. Ошибки, обнаруженные позднее в обеих теориях, выявили теоретические трудности подобных проблем, состоящие особенно в том, что относится к продолжительности контакта или промежутка времени между моментом начала удара и моментом отделения стержней разных длин из-за различий в скоростях частиц на поверхности удара. В 1867 г. Сен-Венан (Saint-Venant [1867, 1]) представил правдоподобное детальное предсказание на основе линейной упругости того, каких явлений следует ожидать при одномерном ударе стержней. Людвиг Больцман, известный больше как теоретик, чем как человек, который внес вклад в экспериментальную механику твердого тела, в 1881 г. заинтересовался физической применимостью [1]) теории Сен-Венан. В статье, примечательной скромным тоном при

[1]) Boltzmann [1882, 1]. Статья датирована 5 декабря 1881 г.

обсуждении экспериментальных вопросов, Больцман описал серию экспериментов по продольному удару стержней из мягкой серой резины с латунными наконечниками. Он обнаружил, что для стержней одинаковых и неодинаковых длин скорости отделения оказались много ниже предсказанных Сен-Венаном. Фактически эта разница была, как подчеркнул Больцман, большей, чем можно было бы отнести за счет такого явления, как упругое последействие.

Стержни держались на шелковых нитях бифилярной подвески с целью уменьшить потери на внешнее трение. Длина нитей подвески составляла 153 см. В состоянии покоя стержни едва касались друг друга. Один стержень удерживался в оттянутом положении с помощью дополнительной шелковой нити. Эта нить поджигалась, отпуская стержень из его приподнятого положения, тем самым производя желаемый продольный удар. Каждый опыт для демонстрации воспроизводимости результатов повторялся три раза. Стержни, обозначенные A, A', B и B', имели длины 100, 104, 230 и 228 мм соответственно. Стержни длиной 100 и 104 мм имели диаметр 17 мм, более длинные стержни — диаметр 11 мм; веса стержней вместе с крюками для подвески составляли: 23,816; 23,7; 23,904 и 23,820 гс соответственно для указанных четырех длин[1]. Через H была обозначена тщательно измеренная начальная высота расположения ударявшего стержня, а через S — отклонение стержня, испытавшего удар, от положения покоя. Подводя итоги данным Больцмана, измеренным для него учителем местной гимназии Хаммером и представленным в виде значений процентной разницы[2] P, т. е. $P=(H-S)/H$, мы имеем результаты, приведенные в табл. 94, где в обозначении соударяющихся стержней первыми указаны производящие, а вторыми — испытывающие удар. Больцман отметил, что результаты по большей части не соответствовали теории Сен-Венана. Он заметил также, что с возрастанием скорости наблюдалось любопытное слабое возрастание P.

Таблица 94

Больцман (1882)

H	$A'A$	BB'	$B'B$	AB	BA	BA'	$A'B'$	$B'A$	$B'A'$
	P								
100	17,0	16,5	16,3	20,7	20,5	21,0	21,0	21,0	—
50	—	16,0	16,0	19,4	20,0	—	20,0	—	20,0
30	13,9	—	—	—	—	19,4	—	—	—

Можно предположить, что Фохта к проведению его экспериментов побудили эксперименты Больцмана, а также воспоминания о лекциях Франца Неймана 50-х гг. XIX века по этому вопросу. Нейман указывал на ограниченность теоретического вклада Коши и Пуассона. По мнению Фохта, лекции Неймана содержали никогда

не публиковавшееся теоретическое развитие вопроса, опередившее на несколько лет работы Сен-Венана. Так или иначе, возникший у Фохта интерес к этой проблеме оказался достаточным для него, чтобы поставить (Voigt [1883, 1]) эксперимент Больцмана на металлах, а не на резине. Он испытывал стальные стержни диаметром 8 и 11 мм и длиной 20 и 40 см; он тоже пользовался бифилярной подвеской, которая прикреплялась к потолку лаборатории. Его, как и Больцмана, выводом было то, что теория Сен-Венана не соответствует экспериментальным фактам [1]). Перед ударом Фохт тщательно выравнивал свои стержни. Оттянутый стержень приводился в движение поджиганием бумажного держателя. Амплитуды после удара, чтобы избежать параллакса, отсчитывались с большой тщательностью и с точностью до 0,1 мм. Характерно, что Фохт привел подробное обсуждение всех видов мельчайших возможных источников экспериментальных ошибок и очень длинный перечень своих вспомогательных эмпирических, но произвольных предположений [2]). Он привел большое количество результатов в виде таблиц, в каждую из которых было включено от 5 до 12 наблюдений, проведенных со стержнями равных и неравных длин, различных диаметров, длин и скоростей удара. В каждом случае экспериментальная скорость после удара отличалась от скорости, предсказанной теорией.

Фохт попытался модифицировать теорию Сен-Венана учетом предполагаемого им эффекта, якобы вызванного существованием некоего упругого слоя на поверхности удара. Обращая внимание на влияние кривизны и неровностей соударяющихся поверхностей, слоев газа на этих поверхностях и различия упругих характеристик «промежуточного слоя» между поверхностью и внутренней частью стержня, он ввел эмпирический коэффициент для исправления своих результатов. Он обсуждал, зависит или нет этот эмпирический коэффициент $C=EA/\delta$ (где E — неизвестный модуль этого «промежуточного слоя», δ — его неизвестная толщина и A — площадь контакта) от скорости удара и т. п. Его «модифицированная теория» оказалась недолговечной, она была опровергнута Хаузманингером и Гамбургером в течение следующих трех или четырех лет. Однако до этой развязки произошли очень многословные обсуждения.

---

[1]) В литературе XX века по этому поводу, начиная еще с 1912 г., никак не отмечается первоначальный вклад Больцмана, и историческое первенство отдается Фохту. Возможно, это замечание в какой-то мере смягчается тем фактом, что Больцман пользовался резиной.

[2]) Вместе с некоторыми современниками Фохта, такими, как Хаузманингер (Hausmaninger [1884, 1]) в 1883 г., я нахожу, что использование Фохтом подчас произвольных эмпирических рассуждений для «уточнения» своих опытных данных до сравнения с теорией, мягко выражаясь, доставляет только лишние заботы. В обсуждаемом случае он в свои численные результаты внес поправки, учитывающие эффекты предполагаемого давления воздуха, за которым следовало разрежение на поверхности удара, далее, учитывающие расхождения в величине скорости ударяющего стержня после удара и, наконец, учитывающие сопротивление воздуха.

В конце статьи Фохт заметил, что после завершения своей работы он прочитал статью Генриха Рудольфа Герца (Hertz [1882, 1]) по теории контакта упругих тел; далее Фохт делает любопытное добавление, что теория Герца содержит результат, в некотором роде подобный его формуле, которую он получил, введя эмпирические параметры. На основе того, что в его опытах были большие значения отношения диаметра к длине, а именно 17 : 100, Фохт отбросил более ранние результаты Больцмана, не совпадавшие с его «модифицированной» теорией. Он, правда, высказал мнение, что эти результаты создали ограничения на степень применимости его теории в «необычных условиях».

3.35. Использование Хаузманингером (1884) методики Пуйе (1844) измерения продолжительности контакта при ударе в эксперименте Больцмана и в аналогичных экспериментах, выполнявшихся на протяжении полустолетия (1884—1936)

В 1884 г. Больцман побудил вступить в спор Виктора Хаузманингера (Hausmaninger [1884, 1]). Хаузманингер ответил повторением опытов Больцмана на очень схожих с его образцах. Он получил, по существу, те же результаты. Далее, в ответ на критику Фохта он, по настоянию Больцмана, провел новую серию экспериментов с длинными стержнями. Отношения диаметра к длине, которые равнялись 1 : 10 для толстых стержней и 1:28,5 — для тонких, были того же порядка, что и отношения размеров стержней в опытах Фохта — от 1:25 до 1:36,4, т. е. теперь не было отношения 17:100, против которого возражал Фохт. Хаузманингер отметил, что, как обнаружил Фохт, ударяющий стержень всегда немного продвигается вслед за стержнем, испытавшим удар. Он нашел, что результатам новой серии экспериментов не соответствуют данные ни теории Сен-Венана, ни ее модификации Фохта. То, что этими результатами экспериментов на резине поднимается больше вопросов, чем было поднято раньше, становится очевидным во второй очень важной части статьи Хаузманингера, где он описывает первые измерения продолжительности контакта (продолжительности удара) при ударе двух одинаковых образцов.

До обсуждения этих результатов важно сделать обзор работы двух ученых, Пуйе и Шнеебели: Клод Сервэ Матэ Мари Ролан Пуйе своими замечательными более ранними исследованиями создал метод, который Генрих Шнеебели (Schneebeli 1871, 1]) в необычном эксперименте применил в механике твердого тела.

В 1822 г. Пуйе (Pouillet [1822, 1]) заинтересовался определением порогового значения силы электрического тока для движения намагниченной стрелки. К 1844 г. он (Pouillet [1844, 1]), расширив исследования, перешел к изучению минимального промежутка времени, в течение которого должен действовать электрический ток,

чтобы вызвать заметное отклонение стрелки гальванометра, находящегося в цепи. Он показал, что ток распространяется по проводу длиной в несколько тысяч метров за промежуток времени, меньший 1/7000 с. Затем Пуйе заинтересовался хронометрированием баллистических явлений с точностью до 0,0001 с (Pouillet [1844, 1], [1845, 1]).

Он приклеил радиальную, шириной 1 мм, полоску из металлической фольги на круглую стеклянную пластину диаметром 84 см, вращавшуюся с известной скоростью вокруг центральной оси. Эта полоска находилась в постоянном электрическом контакте с подпружиненной по оси щеткой. Была использована батарея из шести элементов Даниэля, соединенная с 40 метрами миллиметрового медного провода. Цепь замыкалась, когда вторая щетка на периферии стеклянного диска входила в контакт с полоской из фольги. Вращая диск с различными скоростями, он сумел калибровать отклонение гальванометра как функцию продолжительности действия электрического тока без непосредственного определения механической инерции и т. д. Временной интервал в 1/5000 с вызывал отклонение стрелки гальванометра на 12°, причем стрелке требовалось около 10 с для прохождения этой дуги. Используя более чувствительный гальванометр Меллони, дававший 15° за 1/5000 с с двадцатью метрами миллиметрового провода, он нашел, что «легко засекать 1/10 000 с». Пуйе пользовался своей техникой для определения продолжительности движения пули в стволе. Спусковой механизм в момент выстрела замыкал цепь, которая разрывалась, когда пуля, достигнув среза ствола, разрушала провод, включенный в цепь.

Двадцать семь лет спустя, в 1871 г., Генриху Шнеебели (Schneebeli [1871, 1]) пришло на ум, что метод Пуйе можно применить к изучению удара упругих тел. По-видимому, не ведая о каких-либо достижениях в области законов удара, сделанных со времен Гюйгенса в XVII веке, Шнеебели описывает эмпирическую ситуацию, в которой цилиндры и шары из разных металлов с различными размерами ударяются о торец стального цилиндра, накрепко привинченного к неподвижной плоскости. В опытах с четырьмя стальными цилиндрами одинаковой длины, равной 7 см, и с различными поперечными сечениями Шнеебели сделал наблюдение, что продолжительность удара возрастает с массой. Он упустил из рассмотрения возможность того, что такое возрастание продолжительности контакта в равной мере могло быть результатом увеличения диаметра.

Используя в качестве соударяющихся тел шары, он обнаружил, что продолжительность удара уменьшается с ростом скорости или высоты падения. Привинчивая к одним и тем же цилиндрам половины шаров различного радиуса, он нашел, что продолжительность контакта уменьшается с ростом радиуса кривизны, но это влияние очень мало. Варьируя длины четырех стальных цилиндров, он обнаружил, что продолжительность контакта возрастает с ростом длины. Очевидно понимая трудности анализа проблемы для образца, прикреплен-

ного к неподвижной плоскости, в конце статьи он сравнивает удар свободно подвешенных шаров одинаковых и различных радиусов, заметив, что для последних неважно, какой из шаров производил удар. Для трех ситуаций a, b и c, показанных на рис. 3.48, Шнеебели утверждает, что продолжительность удара должна выражаться как $b=3a=4c$. В двух сериях экспериментов со стальными шарами весом в 110 гс и 155 гс он получил значения продолжительности в делениях шкалы $a=21{,}3$, $b=66{,}0$, $c=15{,}6$ и $a=20{,}5$, $b=61{,}6$, $c=15{,}0$, которые находятся в удивительном согласии с эмпирической зависимостью. Результаты были представлены в делениях шкалы, но для перехода к единицам времени был дан тарировочный график. Один приведенный им пример дает продолжительность удара цилиндра, равную 0,000190 с при высоте падения 33 мм.

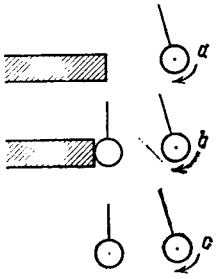


Рис. 3.48. Три экспериментальных ситуации, рассмотренные Шнеебели (1871) в его измерениях продолжительности удара.

Во второй статье (Schneebeli [1982,1]) Шнеебели определил продолжительность удара металлических шаров одинаковой массы из стали, меди, цинка, латуни, серебра, олова и свинца и показал, что продолжительность контакта обратно пропорциональна квадратному корню из E. Эти данные для двух серий экспериментов приведены в табл. 95. Буквой a обозначено количество делений шкалы, каждое из которых пропорционально определенной продолжительности удара. Шнеебели отдавал себе отчет о том, что для создания шаров одинакового веса ему пришлось менять их радиус и что в случаях свинца и олова обнаружились некоторые слабые остаточные деформации.

Таблица 95

Шнеебели (1872)

Материал шара	Серия I				Серия II		
	$\sqrt{E}$	a	$a\sqrt{E}$	Отклонение	a	$a\sqrt{E}$	Отклонение
Сталь	140,0	72,5	101,5 [a]	+0,5	84,2	117,9	+2,1
Медь	102,0	94,2	96,1	+5,9	115,0	117,3	+2,7
Цинк	93,3	111,0	103,6	—1,6	130,0	121,3	—1,3
Латунь	92,4	110,5	102,1	—0,1	127,0	117,4	+2,6
Серебро	84,5	112,0	94,6	+7,4	130,0	110,0	+10
Олово	63,0	164,0	103,0	—1,0	194,0	122,0	—2
Свинец	42,0	270,0	113,0	—11	320,0	134,0	—14

[a] a — отклонение стрелки гальванометра в произвольных единицах. Очевидно, в этом столбце Шнеебели ошибся в положении запятой.

Таким образом, сравнивая результаты экспериментов, многие из которых были довольно слабо задуманы с аналитической точки зрения, Шнеебели тем не менее раскрыл общую природу упругого удара. Будь он настолько же изобретательным в постановке экспериментов, как в применении метода Пуйе, его работа послужила бы физической основой теории удара, выдвинутой Герцем десять лет спустя.

Возвращаясь к изучению соударения стержней Хаузманингером в 1883 г. (Hausmaninger [1884, 1]), мы находим хорошо задуманный в смысле анализа эксперимент, поставленный с неудачно выбранным твердым телом, т. е. с резиной при наличии латунных наконечников. В 1883 г. каждому уже должны были быть известны все те соображения, которые следовало иметь в виду, чтобы понимать, что к таким материалам неприменима сама линейная теория. Схема установки Хаузманингера показана на рис. 3.49.

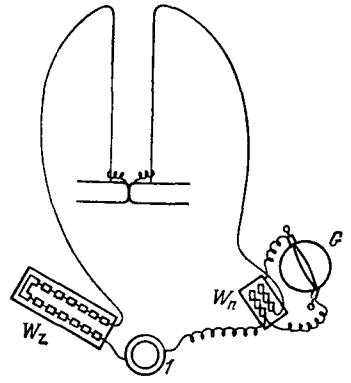


Рис. 3.49. Электрическая цепь, использованная Хаузманингером (1884) при его определении продолжительности контакта в экспериментах по соударению стержней. *1* — батарея.

Электрический контакт осуществлялся посредством приклеенных тонких платиновых полосок. Результат сверялся с предыдущими опытами для того чтобы быть уверенным, что проявлялась только небольшая разница в конечных скоростях. Тот факт, что не наблюдалось никаких различий в продолжительности удара при увеличении на 80% скорости удара стержней одинаковых и неодинаковых длин, должен был бы заставить задуматься, хотя следует признать, что в опытах при всех скоростях удара была получена воспроизводимость результатов.

Сделав лучший выбор твердого тела для сравнения линейной теории упругости с экспериментом, Хаузманингер описывает опыты со стеклом. Для трех стеклянных стержней, один из которых, обозначенный через A, имел длину 135 мм и диаметр 13 мм, а два других одинаковых B и B' имели размеры соответственно 272 и 9 мм, наблюдалось изменение продолжительности контакта с изменением скорости удара, как это можно видеть на рис. 3.50, где показаны результаты двух опытов для каждой комбинации стержней при трех указанных начальных высотах.

Хаузманингер отметил, что в противоположность резиновым стержням продолжительность контакта стеклянных стержней неравной длины оказалась неожиданно малой. В 1885 г. во второй статье (Hausmaninger [1885, 1]) он сделал вывод, что не только теория Сен-Венана неприменима, но что и модификация Фохта не может быть исследована экспериментально из-за своих не поддающихся определению параметров.

В XIX веке исчерпывающим экспериментальным исследованием упругого удара двух стержней оказалось исследование Макса Гамбургера (Hamburger [1886, 1]), проводившееся в 1886 г. Также применяя для измерения продолжительности контакта методику Пуйе, Гамбургер исследовал соударение твердых латунных стержней. Для калибровки гальванометра он применил маятниковый метод Шнеебели, показавший после обширного экспериментирования хорошую воспроизводимость результатов. Попытавшись провести, а затем отбросив как непригодный, эксперимент Шнеебели с фиксированным положением стержня, испытывающего удар, Гамбургер обратился к эксперименту Больцмана с его двойной бифилярной системой подвески. Подвешенный теперь свободно, стержень, испытывающий удар, был одним и тем же во всех экспериментах; длина его равнялась 300 мм, а диаметр был равен 10,3 мм. После каждого удара Гамбургер с помощью оптики исследовал, нет ли признаков остаточных деформаций на соударявшихся поверхностях. Тщательно обрабатывая эти поверхности, он добивался как можно более точной соосности ударяющего и ударяемого тел. В эксперименте участвовали стержни пяти различных длин и четырех диаметров, изготовленные из твердой латуни, которые наносили удар с семью различными скоростями по 300-миллиметровому неподвижному до удара стержню. Результаты для множества комбинаций показаны в виде графиков на рис. 3.51.

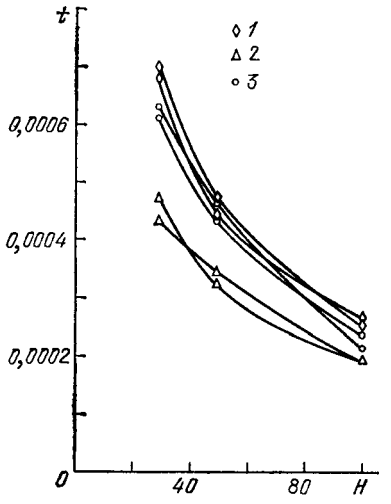


Рис. 3.50. Зависимость продолжительности контакта от высоты падения для стеклянных стержней различных длин и диаметров, t — продолжительность удара в с, H — высота падения ударяющего стержня в мм. *1* — удар B по B', *2* — удар A по B', *3* — удар B' по A.

Вопрос о том, является или нет продолжительность удара в действительности линейной функцией длины образца и независимой от скорости удара, стал тридцать лет спустя предметом дискуссии. Все существенные особенности эксперимента по удару стержней количественно были даны результатами Гамбургера. Он подчеркивает сходство своих зависимостей с данными Шнеебели и в то же время отбрасывает результаты Хаузманингера. Обнаружив, что и теория Сен-Венана, и гипотеза Фохта об упругом слое неправильны, даже с измененными параметрами, он перешел от изучения цилиндров, с сопутствующими ему трудностями, к изучению шаров, имея в виду теорию удара Герца.

Гамбургер сравнил значения продолжительности контакта, по-

лученные в опытах со стальными шарами радиуса 14,75 мм и латунными радиуса 13 мм для пяти различных скоростей удара (представленных как начальные высоты расположения шара, производящего удар, в мм), со значениями, предсказанными по теории удара Герца. Столкнувшись с дилеммой XIX века относительно коэффициента Пуассона, он провел две серии вычислений для обоих твердых тел, одну в предположении, что $\nu=1/3$, и другую — что $\nu=1/4$. Он принял значения модуля упругости $E=20\,000$ кгс/мм² для

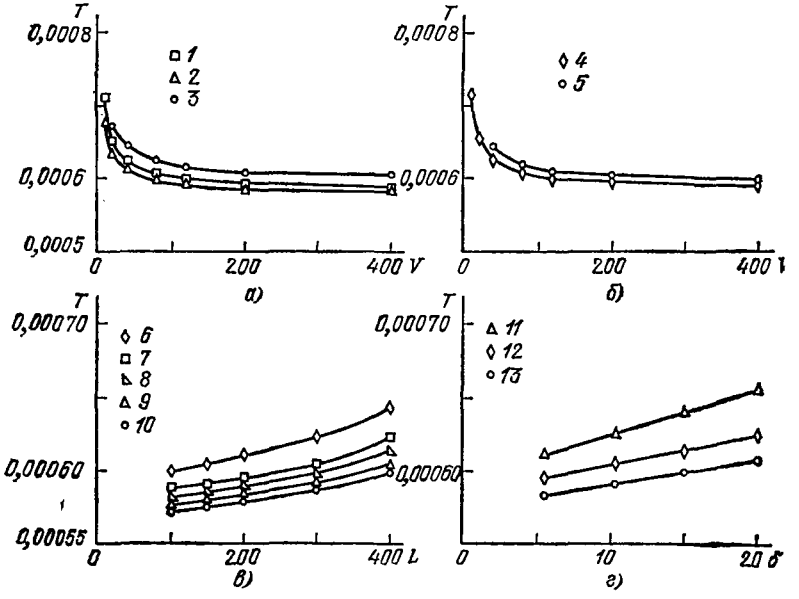


Рис. 3.51. Опыты Гамбургера (1886): зависимость продолжительности контакта от параметров опытов на удар. *а*) Зависимость T от V; толщина равна 10,3 мм, *1* — длина 300 мм, *2* — длина 200 мм, *3* — длина 400 мм; *б*) зависимость T от V; длина 300 мм, *4* — толщина 10,3 мм, *5* — толщина 15,15 мм; *в*) зависимость T от L; толщина 10,3 мм, *6* — скорость 40,3 мм/с, *7* — скорость 80,5 мм/с, *8* — скорость 120,8 мм/с, *9* — скорость 201,5 мм/с, *10* — скорость 404,1 мм/с; *г*) зависимость T от δ; длина 300 мм, *11* — скорость 40,3 мм/с, *12* — скорость 80,5 мм/с, *13* — скорость 201,5 мм/с, T — продолжительность удара в с, V — скорость в мм/с, L — длина в мм; δ — толщина в мм.

стали, $E=10\,000$ кгс/мм² для латуни и удельного веса соответственно 7,7 и 8,39. Он считал корреляцию (показанную в табл. 96) между экспериментом и теорией очень хорошей, за исключением области малых скоростей, для которых был настолько большой разброс результатов, что он их исключил из рассмотрения. Он заметил, что эта область должна была бы быть областью наилучшей согласованности.

Хотя Гамбургер и рассматривал как удар цилиндрических стержней в связи с теорией Сен-Венана, так и удар шаров в связи с теорией Герца, он не сделал никаких попыток совместить их. Честь сделать это была оставлена Сирсу (Sears J. E.), выполнившему отмеченное более чем через двадцать лет.

Таблица 96

Гамбургер (1886)

Сталь: радиус шаров 14,75 мм

Скорость	73,7	122,9	192,1	295,0	442,9 мм [a]
T наблюденное (с)	0,000190	0,000165	0,000146	0,000134	0,000126
T вычисленное ($\nu = 1/3$) (с)	0,000150	0,000135	0,000124	0,000114	0,000105
T вычисленное ($\nu = 1/4$) (с)	0,000154	0,000139	0,000127	0,000119	0,000107

Латунь: радиус шаров 13 мм

Скорость	73,7	122,9	192,1	295,0 мм [a]
T наблюденное (с)	0,000196	0,000173	0,000157	0,000148
T вычисленное ($\nu = 1/3$) (с)	0,000181	0,000164	0,000150	0,000138
T вычисленное ($\nu = 1/4$) (с)	0,000185	0,000167	0,000153	0,000140

[a] Это — пропорциональное скорости начальное расстояние, на которое был отведен ударяющий стержень.

Первую серию экспериментов по удару стержней Сирс провел (Sears [1908, 1]) в 1908 г. с целью определения точного динамического значения модуля упругости E, который, если его получать по характеристикам фронта волны, как он считал, должен быть адиабатическим, для сравнения с квазистатическим модулем. Первым, кто изучал и сравнивал эти модули, был за шестьдесят пять лет до этого Вертгейм. Он бросил вызов, все еще занимавший экспериментаторов в течение первого десятилетия XX века: напомним, например, попытки Грюнайзена (Grüneisen [1906, 1]). Сирс исходил из эксперимента Пуйе 1844 г., но модифицировал методику, применив калибровку разрядами конденсатора с известным напряжением. Он определял продолжительность контакта для идентичных стержней, длина которых менялась от приблизительно 14 до 95 см; последние стержни были почти вдвое длиннее применявшихся в каких-либо предшествующих исследованиях. Сирс исходил из того, что наклон кривой, представляющей продолжительность контакта как функцию длины, должен уменьшаться с ростом длины, стремиться к скорости стержня по теории Сен-Венана, и, следовательно, даже если кривая и не проходит через начало координат, давать динамическое значение E. Подобно своим предшественникам, Сирс скруглял [1]) соударяющиеся торцы своих стержней для того, чтобы обойти труд-

[1]) Больцман (Boltzmann [1882, 1]) и Хаузманингер (Hausmaninger [1885, 1]) снабжали свои соударяющиеся образцы наконечниками, «соударяющиеся поверхности которых были плавно закруглены».

ности, вызываемые мелкими ошибками в соосности стержней. Так как стержни были относительно длинными, «концевой эффект», как Сирс его назвал, был достаточно уменьшен, так что наклоны кривых для стали, алюминия и меди, показанных на рис. 3.52, дали значения скорости волны 5130, 5070 и 3680 м/с соответственно. Сирс обнаружил, что эти значения находятся в близком соответствии со значениями скорости волны, вычисленными на основе квазистатических испытаний тех же стержней, а именно со значениями 5110, 5050 и 3660 м/с соответственно. Отношения динамических значений к статическим оказались равными 1,0010; 1,0026 и 1,0015 в предположении о том, что первые соответствуют адиабатическому процессу, а последние — изотермическому [1]).

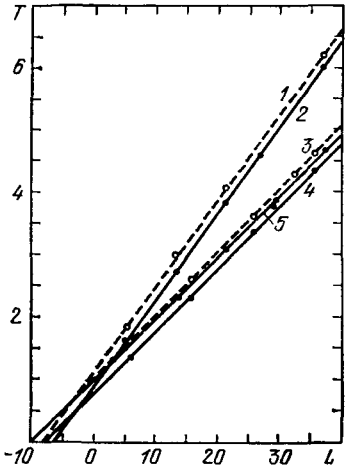


Рис. 3.52. Опыты Сирса (1908); зависимость продолжительности контакта от длины образцов в виде стержней из меди, алюминия и стали. *1* — медь, начало, *2* — медь, конец, *3* — алюминий, начало, *4* — алюминий, конец, *5* — сталь; *T* — продолжительность удара в с, увеличенная в 10^4 раз, *L* — длина образца в дюймах.

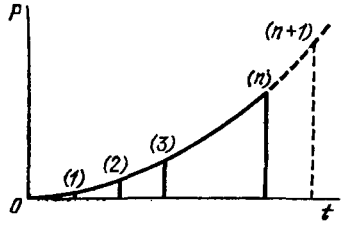


Рис. 3.53. Установление Сирсом (1912) зависимости начального давления *P* от времени *t* при столкновении двух стержней со скругленными торцами с использованием теории Герца (1912). Интервалы на оси времени равны $d/(n\,V)$; *V* — скорость распространения волны. График соответствует функции $P = K\,(V_1 - V_2)^{3/2} t^{3/2}$. (*d* — см. рис. 3.54.)

Догадайся Сирс, что теория Герца применима к закругленным концам, в то время как теория Сен-Венана применима только вдали от произвольно выбранной точки у поверхности удара, эти закругленные концы подсказали бы ему возможность перехода от мгновенного скачка давления при ударе к постепенному его возрастанию. Корреляция между экспериментальными результатами и полуэмпирической теорией имела своим, достойным сожаления, следствием создание впечатления, что возникновение и распространение в цилиндрических стержнях волн в результате продольного удара уже хорошо поняты. В связи с этой корреляцией Сирс напомнил, что

[1]) Сирс в конце раздела о модулях упругости делает курсивом заключение: «Значения всех постоянных упругости металла одинаковы при мгновенной и постоявной нагрузках» (Sears [1912, 1], стр. 78).

точность конечного результата зависит от предположений, сделанных при использовании статического полусферического распределения напряжений сжатия для торца стержня (Sears [1912, 1]).

Выбрав точку для анализа по теории Герца на расстоянии d от скругленного конца, Сирс определил начальную зависимость давления от времени, показанную на рис. 3.53, где время отложено

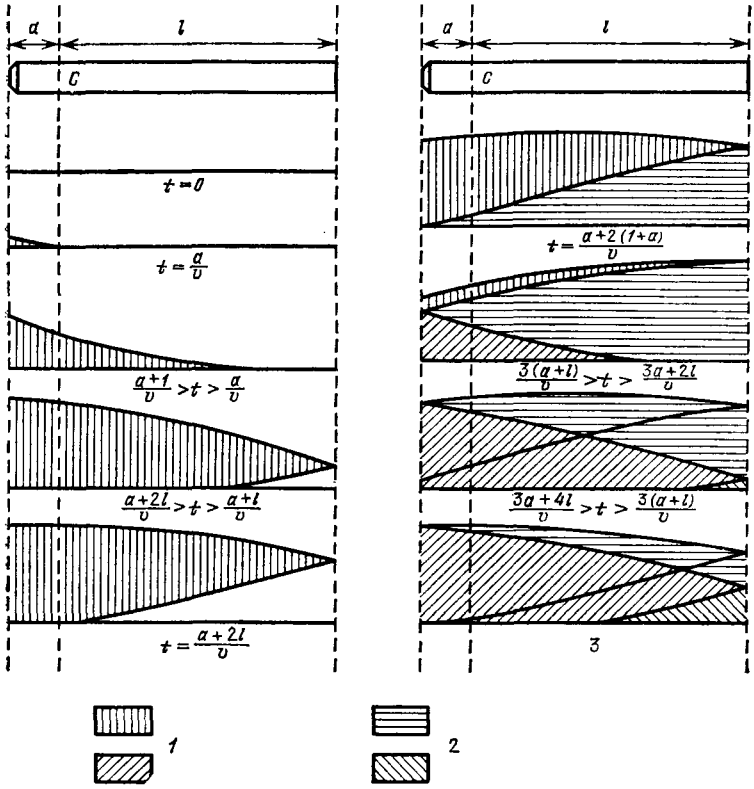


Рис. 3.54. Опыты Сирса (1912): профили фронта волны, определенные по начальной зависимости рис. 3.53. *1* — сжатие, *2* — растяжение, *3* — конец удара.

в дробях со знаменателем nV, V — скорость распространения волны.

Профили фронта волны по этой начальной зависимости показаны на рис. 3.54 для интервалов времени в терминах радиуса стержня.

Корреляция, которой удалось достичь между вычисленными (сплошная линия) и измеренными (черные кружочки) значениями продолжительности контакта для стержней различной длины, ударяющих образец длиной 97,4 см, показана на рис. 3.55. Примерно на половине от наибольшей используемой длины кривая имеет горб. Штриховыми линиями E и C показаны асимптоты, к которым при-

ближается кривая $t=t(L)$ по мере увеличения отношения длин стержней [1].

На трех предыдущих рисунках представлены результаты для фиксированной скорости удара 12,7 см/с. На рис. 3.56 показана зависимость продолжительности удара для этих стержней с закругленными торцами от скорости удара. Темные кружочки относятся к ударам, при которых не наблюдалось остаточных деформаций, а светлые — к ударам, при которых были замечены остаточные деформации в точке контакта. Эти данные сравнивались со значениями, вычисленными по модифицированной теории (кривая B), и с вычислениями по теории Герца, предложенной лишь для шаров (кривая C). Длина образца в этих опытах была всего в десять раз больше диаметра. (Длина стержней равнялась 13,97 см.)

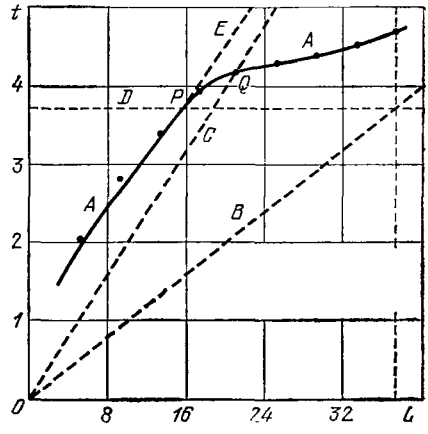


Рис. 3.55. Выполненное Сирсом (1912) сравнение экспериментальных наблюдений с вычисленной продолжительностью контакта (сплошная линия), t— продолжительность удара в 10^{-4} с, L — длина ударяемого стержня в дюймах, длина ударяющего стержня — $37^1/_2$ дюйма, скорость удара 5030 дюймов в с; A — теоретическая кривая продолжительности удара; точки — экспериментальные значения.

Сирс, подобно своим последователям, был озабочен тем, как могут быть включены в его, основанное на теории Герца, объяснение поведения стержней при ударе образцы с плоскими торцами, опыты над которыми показывали тот же, запаздывающий после удара, рост фронта волны со временем. Он обдумывал способ эмпирического изучения в этих условиях гипотезы «упругого слоя» Фохта.

Интресно было бы узнать, пришел ли уже Сирс к пониманию ограниченности опытов по измерению продолжительности контакта и необходимости серьезного изучения самого профиля волны, когда он закончил свою статью 1912 г. выражением чувства благодарности профессору Бертраму Гопкинсону [1]) (Bertram Hopkinson). Именно Гопкинсон два года спустя (Bertram Hopkinson [1914, 1]) в искус-

[1]) «В заключение я должен] выразить мою благодарность проф. Гопкинсону, Инженерная Лаборатория, Кембридж, где была выполнена работа, за его неизменный интерес и добрые советы. Когда он впервые предложил мне провести эксперименты по определению скорости распространения волны в металлических стержнях, результаты, которые он имел в виду, я полагаю, носили гораздо более практический характер, чем здесь описанные. Случилось, однако, так, что я заинтересовался абстрактными проблемами удара, и он всегда выражал полную заинтересованность в том, чтобы я продолжал работу в этом направлении.» (Sears [1912, 1], стр. 82).

ном эксперименте впервые изучил, хотя и косвенно, некоторые детали профиля волны импульса, распространяющегося вдоль цилиндрического стержня. Эксперимент Гопкинсона приобрел очень большое технологическое значение, так как он дал метод измерения амплитуды импульса взрыва в атмосфере. Его эксперимент не установил подлинной формы импульса сжатия, распространяющегося по стержню, но обеспечил информацию относительно его амплитуды и продолжительности.

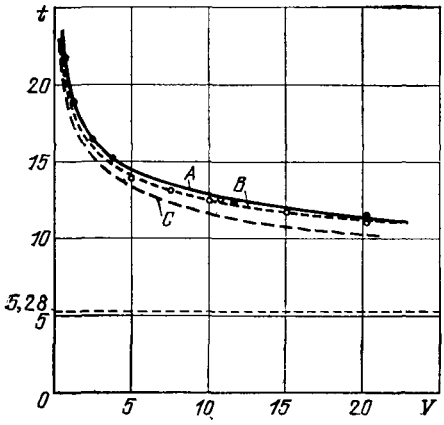


Рис. 3.56. Опыты Сирса (1912): сравнение зависимости продолжительности контакта от скорости удара при отсутствии остаточных деформаций (темные кружки) и при наличии некоторых остаточных деформаций (светлые кружки), наблюдавшейся в опыте, с зависимостью согласно теории Герца для двух сфер, (*C*), и с эмпирически модифицированными версиями этой теории, (*A*) и (*B*); *t*, — продолжительность удара в 10^{-4}с; *V* — скорость в начальный момент удара в дюйм/с.

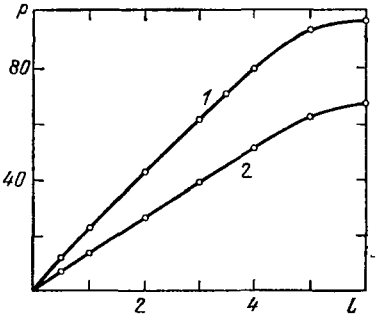
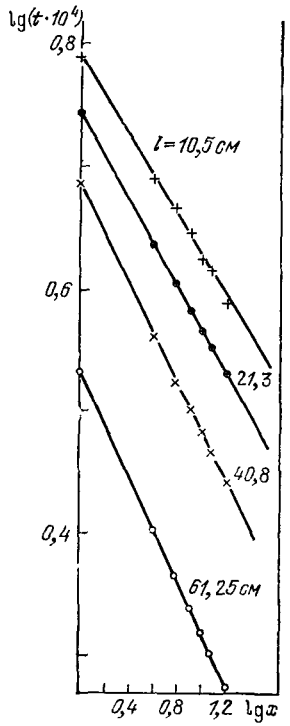


Рис. 3.57. Зависимость числа процентов количества движения, переданного цилиндру, от длины цилиндра при двух скоростях в эксперименте Гопкинсона со стержнями (1914), *L* — длина цилиндра в дюймах, *P* — процент количества движения для цилиндра от общего количества движения. *1* — 2000 фут/с, *2* — 1240 фут/с.

К одному торцу горизонтально подвешенного на четырех нитях стержня диаметром в один дюйм и длиной в несколько футов Гопкинсон прикрепил короткий цилиндр. Основания стержня и цилиндра удерживались вместе тонким слоем смазки или магнитным путем. После того как к противоположному торцу стержня прикладывался краткий импульс давления путем удара коротким предметом, например пулей, или путем воздушного взрыва рядом с этим торцом, вдоль стержня распространялся импульс сжатия и проникал в присоединенный цилиндр. От свободного конца отражался импульс разряжения; сумма напряжений прямой и отраженной волн в конце концов достигала нуля; цилиндр отделялся от стержня и захватывался баллистическим маятником. Изменяя длину цилиндра и в то же самое время измеряя окончательное движение стержня как маятника, он смог определить, на основе изучения общего количества движения после отделения, максимальное напряжение и продолжительность или длину прикладываемого импульса. На рис. 3.57 показаны экспериментальные результаты для относительного коли-

чества движения цилиндра как функции длины цилиндра, по которым он вычислял максимальное давление и продолжительность.

В 1924 г. Джон Эдвард Претти Уагстаф (Wagstaff [1924, 1]), также из Кембриджского университета, использовал немного модифицированный эксперимент Пуйе 1844 г. и провел опыты, первенство в проведении которых он приписывал Гамбургеру (1887 г.). Уагстаф понимал, что «обработка результатов измерений Гопкинсона по распространению волны давления в стержне представляется непосредственно частью теории, ибо зависит от условий, при которых внезапно приложенное на одном торце местное давление



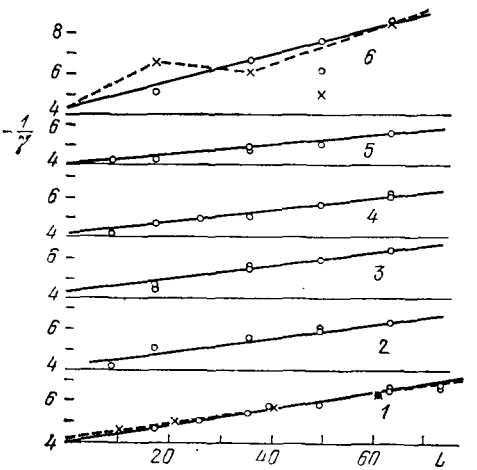


Рис. 3.58. Опыты Уагстафа (1924): график зависимости логарифма замеренной продолжительности контакта (lg ($t \cdot 10^4$)) от логарифма смещения ударяющего стержня (lg x) для различных длин соударяющихся стержней.

Рис. 3.59. Опыты Уагстафа (1924): зависимость эмпирически найденного значения ($-1/\gamma$) (γ — величина, введенная Уагстафом) от длины соударяющихся стержней. *1* — диаметр 1,59 см, литая сталь; *2* — диаметр 1,905 см, литая сталь; *3* — диаметр 2,22 см, литая сталь; *4* — диаметр 2,54 см, литая сталь; *5* — диаметр 3,175 см, литая сталь; *6* — диаметр 1,59 см, кружок — латунь, крестик — алюминий; L — длина стержня в см.

концентрируется на коротком участке в распространяющуюся волну, однородную поперек сечения» (Wagstaff [1924, 1], стр. 545). В связи с этим он предложил еще раз проверить теоретические пределы, полученные Сен-Венаном и Герцем, и «переход от одного к другому». Он усовершенствовал технику Пуйе, введя переменный конденсатор вместо батареи. Это позволило проводить непосредственное определение продолжительности контакта по графикам, полученным изменениями электрической схемы.

Заслугой Уагстафа в решении этой проблемы было испытание серий стержней с различными диаметрами и длинами. Рассмотрев шесть различных длин стержней, примерно от 10 до 65 см, и семь различных диаметров от 1,59 до 3,175 см, он получил 42 случая для изучения влияния размеров соударяющихся тел на продолжительность контакта. Для шаров Герца зависимость, связывающая

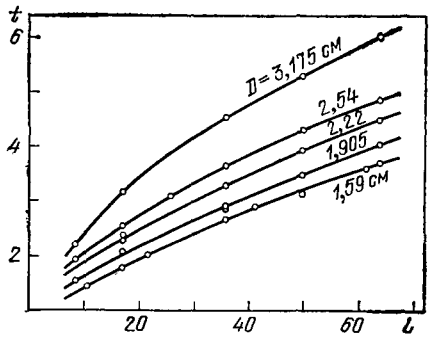


Рис. 3.60. Опыты Уагстафа (1924): зависимость продолжительности контакта от длины соударяющихся стержней для различных диаметров (D) стержней; L — длина стержня в см, t — продолжительность удара в 10^{-4} с.

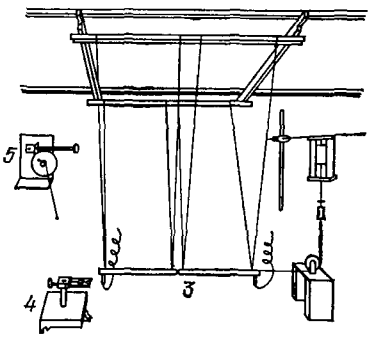


Рис. 3.61. Установка Уагстафа (1924).

продолжительность и скорость удара, имеет вид $t=Av^{\gamma}$, где $\gamma=-1/5$. По теории Сен-Венана $\gamma=\infty$. Здесь t — продолжительность удара, v — скорость и A — постоянная, зависящая от модулей упругости, коэффициента Пуассона и радиусов шара. Если x — расстояние, на которое отводится ударяющий стержень, T — период свободного качания стержня на бифилярной подвеске, то $v=2\pi x/T$. Наклон экспериментально полученного прямолинейного графика зависимости $\lg t$ от $\lg x$ дает значения γ. Линейность данных на рис. 3.58 для стержней длиной 10,5; 21,3; 40,8 и 61,25 см подтверждает то, что им соответствует эмпирическая зависимость $t=A\,v^{\gamma}$. Наклон меняется с ростом длины.

Анализ таких данных для стержней различных указанных диаметров, изготовленных из алюминия, латуни и литой стали, дает значения γ от $-1/8$ до $-1/4$ (рис. 3.59). Численные значения для стержней длиной 10 см лежат ниже значения Герца $\gamma=-1/5$, для бóльших длин — выше, причем с ростом длины стержня растет и это превышение.

Графики зависимости продолжительности контакта от длины стержня для симметричного удара не дали тех прямых, по которым Сирс определял свои динамические значения E. Рис. 3.60 приведен для иллюстрации этого экспериментального факта, вытекающего из большого количества результатов, представленных в виде таблиц и графиков для стержней различных длин и диаметров, испытывающих симметричный удар с общим значением скорости 10,4 см/с.

Установка Уагстафа (рис. 3.61) идентична используемой в экспериментах предыдущих сорока лет. Подобно Сирсу, Уагстаф отводил ударяющий образец от ударяемого и освобождал его посредством расплавления проволоки под воздействием протекающего в ней электрического тока.

Двенадцать лет спустя, в 1936 г., Уагстаф указал Проузу (Prowse [1936, 1]) из Дэремского университета на желательность изучения зависимости характера соударения стержней от радиуса в точке контакта на поверхности удара. Проуз принял предложение и приступил к изучению стержней одинакового диаметра 1,59 см. Был еще раз использован эксперимент Пуйе по измерению продолжительности контакта и опять без ссылок на первоисточник [1]).

Таблица 97

Проуз (1936). *Продолжительность контакта, t* ($с \cdot 10^{-4}$)

Скорость (см/с)	Длина стержней (см)					Скорость (см/с)	Длина стержней (см)				
	63,6	49,6	35,6	17,0	8,5		63,6	49,6	35,6	17,0	8,5
Радиус сферического торца 4,60 см						*Радиус сферического торца* 0,98 см					
2,18	4,67	4,13	3,45	2,47	1,88	2,18	5,65	5,10	4,21	3,22	2,38
3,27	4,44	3,72	3,26	2,24	—	3,27	5,31	4,68	3,92	2,82	2,19
4,36	4,23	3,69	3,11	2,12	1,59	4,36	5,06	4,48	3,74	2,73	2,07
6,45	4,03	3,46	2,89	1,97	—	6,54	4,74	4,24	3,47	2,48	1,86
8,73	3,88	3,31	2,74	1,87	1,36	8,73	4,55	4,06	3,30	2,33	1,76
13,09	3,74	3,09	2,57	1,71	1,25	13,09	4,25	3,80	3,09	2,16	1,63
17,45	3,54	2,95	2,45	1,62	1,16	17,45	4,01	3,58	2,99	2,04	1,52
24,00	3,39	2,86	2,31	1,53	1,08	24,00	—	3,38	2,79	—	—
Радиус сферического торца 2,58 см						*Радиус сферического торца* 0,318 см					
2,18	5,05	4,03	3,60	2,51	1,73	2,18	7,30	5,93	4,98	3,80	2,76
3,27	—	3,78	3,37	2,32	1,63	3,27	6,88	5,54	4,60	3,51	2,54
4,36	4,37	3,65	3,20	2,18	1,60	4,36	6,56	5,20	4,37	3,34	2,40
8,73	3,99	3,26	2,85	1,91	1,40	8,73	5,85	4,61	3,88	2,88	2,07
13,09	3,77	3,14	2,67	1,76	1,29	13,09	5,39	4,40	3,58	2,66	1,99
17,45	3,65	2,96	2,54	1,67	1,25	17,45	—	—	3,46	2,52	1,84
24,00	3,50	2,87	2,37	—	1,16	24,00	4,78	3,95	3,32	2,34	1,69
Радиус сферического торца 1,44 см						*Радиус сферического торца* 0,159 см					
2,18	5,43	4,83	4,10	2,89	2,13	2,18	7,45	6,91	5,73	4,12	3,02
4,36	4,77	4,28	3,50	2,57	1,88	3,27	—	6,39	5,22	3,78	2,78
8,73	4,38	3,83	3,11	2,21	1,61	4,36	—	6,03	4,96	3,56	2,64
13,09	4,07	3,55	—	2,05	1,47	6,54	5,99	5,55	4,62	3,27	2,43
17,45	3,90	3,42	2,80	1,93	1,37	8,73	5,68	5,27	4,37	3,08	2,29
26,17	3,70	3,15	2,62	1,78	1,31	13,09	—	4,81	4,03	2,84	2,13
						17,45	4,89	4,55	3,81	2,69	2,02

[1]) Проуз ссылается на Сирса (Sears [1912, 1]) и Уагстафа (Wagstaff [1924, 1]) как на источники использовавшегося метода, который, в сущности, совпадал с методом эксперимента Пуйе 1844 г.

Проуз исследовал стержни одинакового диаметра при шести различных радиусах (0,159; 0,318; 0,98; 1,44; 2,58 и 4,60 см) торцовой поверхности, при пяти, для каждого из радиусов, различных длинах (8,5; 17,0; 35,6; 49,6 и 63,6 см) и при скоростях от 2,18 до 24,00 см/с. Для сохранения сходных условий от измерения к измерению он последовательно на том же самом образце уменьшал радиусы торцов. Из результатов основных экспериментов, представленных в табл. 97, видно, что продолжительность контакта зависит не только от длины образца и скорости удара, как было показано ранее, но для стержней данного диаметра также, и чувствительно, от радиуса первоначальной поверхности контакта.

В остальной части работы Проуз обсуждает наблюдаемые различия между закаленными и мягкими поверхностями удара. Он сделал вывод, что разность между измеренным значением продолжительности двойного прохождения фронта волны и значением, предсказанным Сен-Венаном и равным $t=2l/c_0$, где $c_0=\sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в стержне, а l — длина стержня, есть функция радиуса торца, скорости удара и длины стержня. Данные были получены по значениям продолжительности удара, представленным в табл. 97. Они в самом деле показали заметное возрастание этой разности ΔT с уменьшением радиуса торца, уменьшением скорости удара и увеличением длины стержня. Проуз рассматривал экстраполяцию на плоские торцы, для которых происходит более быстрый рост давления. Он ожидал, основываясь на теории Сен-Венана, что для стержней длиной более 30 см должно соблюдаться линейное соотношение между продолжительностью удара и длиной стержня, что, конечно, не вполне соответствовало всем результатам экспериментов предыдущих пятидесяти лет.

3.36. Первое использование электротензометрических датчиков сопротивления для изучения профилей волн в эксперименте Больцмана: Фаннинг и Бассетт (1940)

Герберт Томлинсон (Tomlinson [1883, 1]) в 1883 г. провел обширные исследования взаимосвязи электрического сопротивления и деформации растяжения металлической проволоки, не предполагая, однако, что это явление можно рассматривать как основу для разработки экстензометров. В 1931 г. Е. С. Итон (Eaton [1931, 1]) использовал электротензометрические датчики сопротивления для того, чтобы измерить деформацию бетона. Рой Вашингтон Карлсон[1]) в 1935 г. подытожил пятилетний прогресс в усовершенствовании «упругих проволочных измерителей деформации», а тремя го-

[1]) (Carlson [1935, 1]). Электротензометрические датчики сопротивления из угольной нити использовались 15 годами раньше Бертоном Мак-Колумом и О. С. Петерсом (McColum and Peters [1922, 1]).

дами позднее Дональд Ш. Кларк и Г. Дэтуилер (Clark and Datwyler [1938, 1]) из Калифорнийского технологического института описали работы Эдварда Е. Симонса мл., который осуществил дальнейшее развитие вопроса, впервые применив накладные, прикрепленные к

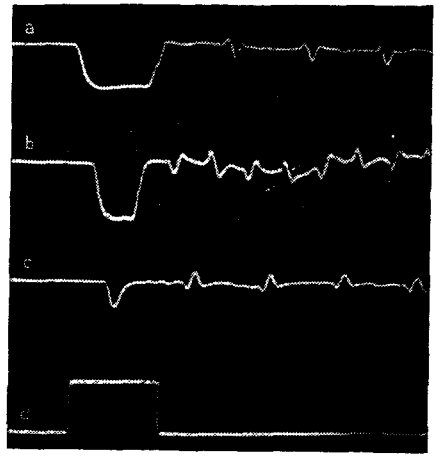


Рис. 3.62. Опыты Фаннинга и Бассетта (1940). Первые опыты по установлению деталей зависимости деформаций во времени в эксперименте с соударяющимися стержнями. Результаты были получены с помощью углеродного ленточного экстензометра. Показания экстензометров, расположенных: *a*) около ударяемого конца, *b*) посередине длины, *c*) на удалением от ударяемого конце стержня, *d*) синхронизационный хронометражный сигнал.

образцу, электротензометрические датчики сопротивления. Связь датчика с образцом достигалась при помощи липкой шотландской ленты (Scotch tape) и цементирующего вещества (Glyptal binder). Артур Г. Руж из Массачусетского Технологического института примерно в то же время укреплял проволоку на бумаге, приклеенной своей обратной стороной к образцу, деформация которого подлежала измерению.

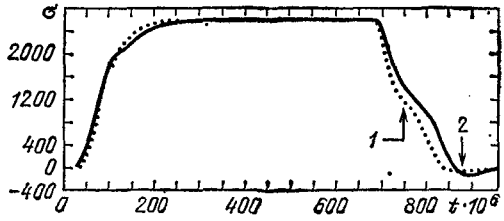


Рис. 3.63. Опыты Фаннинга и Бассетта (1940): сравнение экспериментально найденного профиля волны с профилем, определенным по теории Сирса 1912 г.; сплошная линия — теоретический, пунктирная — экспериментальный, t — время; по оси абсцисс отложено $t \cdot 10^6$ с; σ — сжимающее напряжение в фунт/дюйм^2. *1* — отражение достигает конца стержня, испытавшего удар, *2* — контакт прекращается.

Возвращаясь к проблеме ударного нагружения стержня с целью определения значения E при динамическом воздействии, мы можем отметить, что Р. Фаннинг и У. В. Бассет (Fanning and Bassett [1940, 1] в 1940 г. использовали элемент электрического сопротивления в форме «у́гольного ленточного экстензометра» для того, чтобы впервые изучить истинную историю деформации во времени в точках цилиндрических стержней, подвешенных на двух нитях, после симметричного ударного нагружения. Результаты измерений, проведенных посередине длины стержня (*b*), вблизи конца, по торцу которого производился удар (*a*), и у конца (*c*) исследуемого стержня, про-

тивоположного концу испытавшего удар, показаны в виде осциллограмм на рис. 3.62. Исследовались стержни длиной 152 см и диаметром 2,73 см. Конец (ударяемый.— *А. Ф.*) одного стержня был плоским, а конец другого имел вид сферического сегмента известного радиуса.

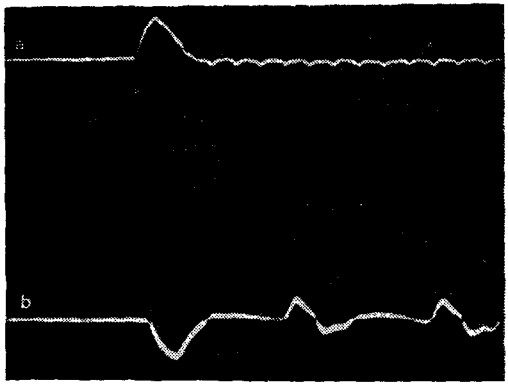


Рис. 3.64. Опыты Фаннинга и Бассета (1940): экспериментальное установление функциональной зависимости напряжений от времени при соударении короткого и длинного стержней, показывающей напряжения вблизи конца, испытавшего удар; в коротком стержне (*a*) и в длинном (*b*).

Для сравнения значения деформации (преобразованной в напряжение путем умножения на E), измеренной на расстоянии 14,3 см от ударяемой поверхности, с результатами теории были проделаны

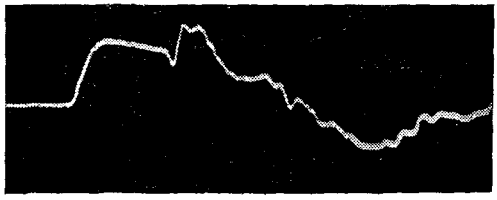


Рис. 3.65. Опыты Фаннинга и Бассетта (1940): опытная демонстрация того факта, что отражение от «фиксированного» конца стержня не дублирует прямую волну, как это следует из элементарной теории.

вычисления, основанные на анализе Сирса 1912 г.; результаты этого сравнения для элементов, испытавших удар,— двух стержней длиной 183 см — показаны на рис. 3.63. Сопоставление показало, что необходимо ввести представление о постепенном повышении уровня напряжений волнового фронта, как и предполагал Сирс, и что это более оправдано, чем скачкообразный рост напряжений на фронте волны, имеющий место в теории Сен-Венана.

Некоторые из трудностей, с которыми сталкивались в прежних исследованиях, можно обнаружить при наблюдениях за процессом столкновения стержня длиной 30,5 см со стержнем длиной 183 см; на рис. 3.64 линия *a* показывает результаты измерений возле конца короткого стержня, а линия *b* — возле конца длинного стержня.

Мероприятием, введение которого поставило новую проблему в изучении распространения одномерной волны, было выполнение

Фаннингом и Бассеттом измерения также и для волны, отраженной от «фиксированного» конца стержня. Они выразили некоторую озабоченность в связи с тем, что отраженная волна сжатия не дублировала прямую, как это ожидалось в соответствии с элементарной теорией [1]). Результат этого опыта представлен на рис. 3.65.

3.37. Использование Дэвисом (1948) техники электрической емкости при определении перемещений во впервые выполненном сравнении профиля волны в стержне с предсказываемым на основе трехмерной теории Поххаммера для цилиндрических брусьев (1876)

Во всех экспериментальных исследованиях удара о цилиндрический стержень, от проведенного Больцманом в 1881 г. до выполненного Фаннингом и Бассеттом в 1940 г., в попытках объяснения деталей распространения волн в терминах условий на ударяемой поверхности явно предполагалось одномерное распространение волн. И это несмотря на то, что детальная трехмерная теория вибрации цилиндрических брусьев, разработанная Лео Поххаммером (Pochhammer [1876, 1] в 1876 г. и в дальнейшем обсужденная Чарльзом Кри (Ch. Chree [1889, 1] в 1889 г., существовала еще до того, как Больцман в 1881 г. установил, что теория Сен-Венана не соответствует экспериментам.

Осознать значение трехмерности и связанной с ней геометрической дисперсии при распространении волн в цилиндрическом брусе выпало на долю Р. М. Дэвиса (Davies [1948, 1], который изложил сущность вопроса в своем обзоре проблемы в 1948 г. Его важная статья, вместе с тем по существу фундаментально развивавшая исследования Б. Гопкинсона, вновь поставила эту проблему и стимулировала дальнейшие исследования в течение последующих двух десятилетий. Действительно, такие исследования продолжают выполняться, и сейчас имеется огромный поток статей на эту тему [2]).

Восьмидесятитрехстраничное исследование Дэвиса, озаглавленное «Критическое изучение сжатых стержней Гопкинсона»,—замечательно хорошо написанная работа, стоящая тех многих часов, которые требуются для изучения ее во всех деталях. Гопкинсон вызывал быстрое изменение во времени осевых напряжений в своем длинном стержне, стреляя в центр одного из его торцов пулями, имеющими

[1]) Интересное экспериментальное изучение этой проблемы проделано Е. А. Риппергером в 1952 г. (Ripperger [1952, 1]) и Е. А. Риппергером и Х. Норманом Абрамсоном (Ripperger and Abramson [1957, 1]) в 1957 г.

[2]) Выполняя обзор по упругим, вязкоупругим и пластическим волнам, Р. М. Дэвис в 1956 г. заявил: «По грубым оценкам в течение последних прошедших пяти лет было опубликовано около пятисот статей по трем аспектам этой проблемы; ясно, что нет возможности обсудить все имеющиеся в этой области результаты, и этот обзор, следовательно, должен ограничиться некоторыми из наиболее важных черт современного состояния проблемы». (Davies [1956, 1] стр. 65.)

высокую скорость. В том же эксперименте Дэвис применил технику измерения перемещений, используя стержень как заземляющий элемент параллельного плоского конденсатора. Изолированной частью была смонтированная металлическая пластинка. Эта пластинка была

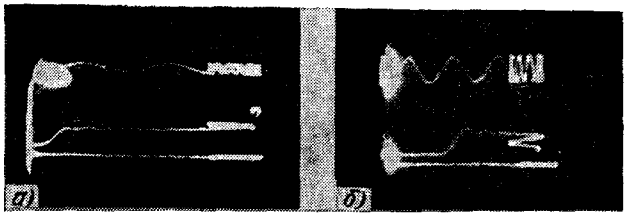


Рис. 3.66. Опыты Дэвиса (1948): осциллограммы зависимости перемещений от времени для стержня, подвергнутого воздействию у противоположного конца: *а*) взрыва, *б*) удара стальным шариком.

заряжена до высокого напряжения при помощи электрической цепи, содержащей подходящий элемент сопротивления, который обеспечивал продолжительное постоянство его во времени. Перемещение точки поверхности стержня как функция времени вызывало в очень короткие промежутки времени изменение емкости прикрепленного к нему конденсатора, влекущее за собой изменение напряжения, отображающееся на дисплее осциллографа в виде соответствующим образом калиброванной осциллограммы. Такие измерения были проделаны на свободном ненагруженном конце бруса, и в условиях некоторого приспособления схемы отдельно было проведено определение радиальных перемещений. На рис. 3.66 приведены осциллограммы опытных профилей волн перемещений: на рис. 3.66, *а* — от импульса, вызванного взрывом одной унции заряда (С. Е.)[1] на конце стержня с диаметром 2,54 см и длиной 183 см и на рис. 3.66, *b* — от импульса, вызванного стальным шариком 1,2 см в диаметре, ударяющим тот же стержень со скоростью 5560 см/с.

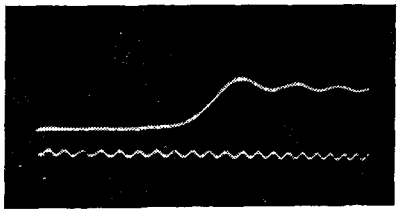


Рис. 3.67. Опыт Колски (1952): использование конденсаторной (емкостного сопротивления) техники Дэвиса для измерения реакции свободного конца стержня, подвергнутого взрыву на противоположном конце. Период колебаний синхронизационного хронометражного сигнала 5,3 мкс.

Герберт Колски (Kolsky [1953, 1]), который позже усовершенствовал эту емкостную технику Дэвиса (Davies [1948, 1]), описал в 1953 г. профиль волны на свободном конце от взрыва детонатора № 8 (рис. 3.67). Синхронизирующий сигнал для этого эксперимента имел период 5,3 мкс. Волны масштаба времени для остальных данных были такие, как показаны на рис. 3.67.

Дэвис подчеркнул вначале, что интерпретация его результатов, а также результатов первоначального эксперимента Гопкинсона зависит от справедливости следующих предположений: что возникающие волны линейно упруги; что импульс давления распространяется без искажения и что давление распределено равномерно по поперечному сечению стержня. При этих предположениях функция, характеризующая изменение перемещения на конце от времени, могла быть продифференцирована, чтобы получить зависимость от времени напряжения, вызванного импульсом. Коэффициент Пуассона ν и модуль E для твердого тела известны, так что, используя также значение радиальных перемещений, можно непосредственно получить зависимость напряжений, вызванных ударным импульсом, от времени. Таким образом, на основе данных измерения радиальных перемещений, сделанного в точках на расстояниях 115 см (*а*) и 35 см (*б*) от конца стержня, диаметром в 2,54 см и длиной 183 см, при осевом ударе пулей с закругленным носиком, летящей со скоростью 34595 и 35692 см/с, и показанных [1]) на рис. 3.68, могла быть построена кривая зависимости давления от времени, приведенная на рис. 3.69 (Davies [1956, 1]). ▮

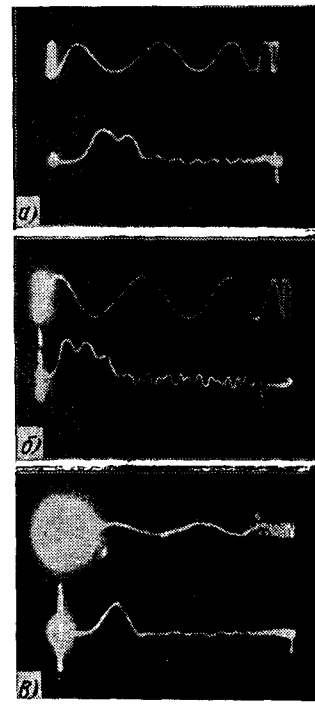


Рис. 3.68. Опыты Дэвиса (1947): осциллограммы радиальных перемещений, относящиеся к трем точкам, расположенным по длине стержня, подвергнутого удару пули со скругленным ударяющим концом.

Значительная часть статьи Дэвиса была посвящена анализу второго предположения, а именно, что импульс не диспергирует. Он впервые провел аккуратное вычисление фазовой и групповой скоростей для различных мод бесконечного стержня в терминах теории Поххаммера и Кри к тому времени уже семидесятилетней давности.

В последовавшем за этим исследовании 1956 г., посвященном обзору полей волн напряжений в твердых телах, Дэвис привел результаты измерений с помощью электротензометрических датчиков сопротивления применительно к воздействию импульса, состоящего из продольных плюс изгибных компонент (*а*) (одиночный датчик) и

[1]) Дэвис выразил благодарность доктору Энрико Вольтерра за эти подробные данные.

только из продольных компонент при исключении изгибных (*б*) (сдвоенные датчики), показанные на рис. 3.70.

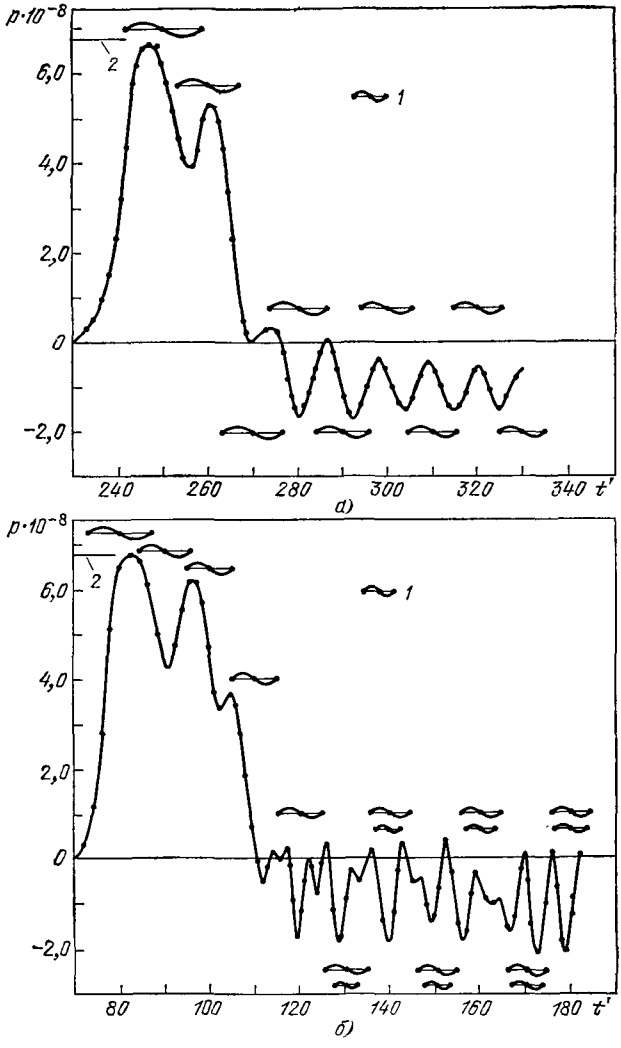
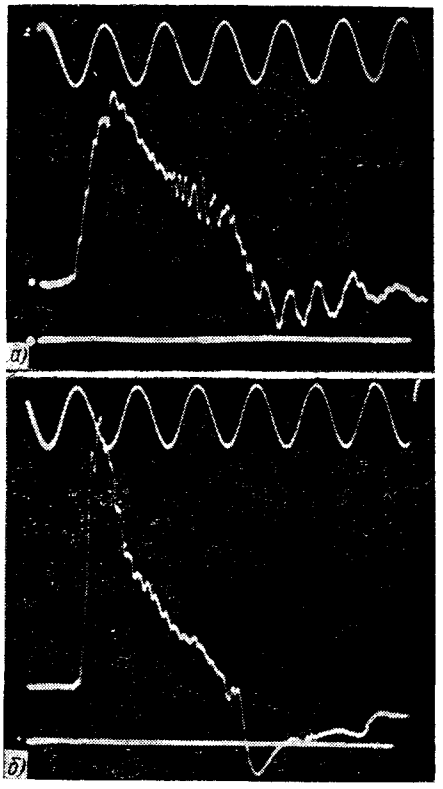


Рис. 3.69. Опыты Дэвиса (1948): кривые зависимости давления от времени, найденные на основе данных, взятых из осциллограмм, приведенных на рис. 3.68. *а*) Сечение с $x=115$ см; *б*) $x=35$ см. *1* — период T_p группы, которая доминирует во времени t' (первая форма), t' — время в мкс. p — давление в дин/см²; *2* — $\hat{p}$ — расчетное значение давления в дин/см².

Рис. 3.70, *а* показывает результаты измерений при помощи тензорезистора импульса и волны масштаба времени. Дэвис поручил этот эксперимент Н. Дж. Рису. Эксперимент проводился с дюралевым стержнем длиной 275 см и диаметром 0,636 см, импульс в кото-

ром создавался давлением воды, возбуждаемым выстрелом пулей в поршень. Эксперимент, которому соответствует рис. 3.71, был проведен при прямом осевом столкновении пули, имеющей плоский носик с торцом стального стержня диаметром 1,27 см и длиной 183 см. Датчик был установлен на расстоянии 79 см от ударяемого конца. Дэвис поручил эти опыты доктору Д. Е. Томасу. Эти данные плюс данные аналогичных опытов сравнивались с теоретически найденными средним периодом T_p, для первого эксперимента (рис. 3.72) и с зависимостью T_p/T_a от $t/(T_0/2)$ для второго (рис. 3.73). (T_a — представляет собой продолжительность прохождения бесконечно длинными волнами отрезка, длина которого равна радиусу



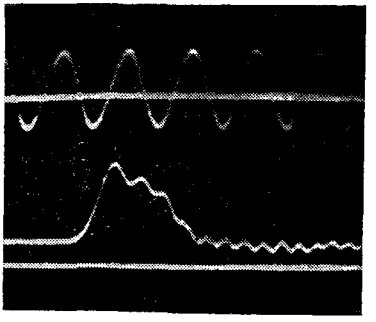


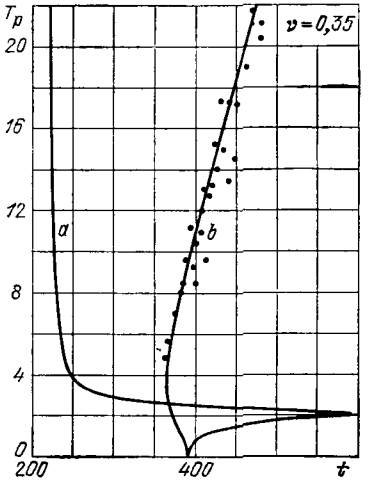
Рис. 3.70. Опыты Дэвиса (1956): профили волн, полученные при помощи датчиков электрического сопротивления: *а*) для продольных при наличии и изгибных составляющих и *б*) для чисто продольного безызгибного компонента.

Рис. 3.71. Опыты Дэвиса (1956): зависимость деформации от времени, обнаруженная при помощи датчиков электрического сопротивления в случае осевого удара пули, имеющей плоский торец, о торец длинного стального стержня.

стержня, и T_0 — расстоянию от точки удара до точки измерения.) Рис. 3.72 показывает корреляцию экспериментальных данных с предсказаниями теории для волн изгибных и рис. 3.73 — для волн продольных (растяжения или сжатия). Эти результаты демонстрируют не только наличие многих мод деформаций в некоторых ситуациях экспериментов со стержнями, но также общую сложность явления, которая может лишить правомочности переупрощенную

интерпретацию данных, основанную на предположении одномерности явления.

Является ли определяющее соотношение линейным и применима ли точная теория для бесконечного цилиндра, это — вопросы, на которые трудно ответить, исходя из физических соображений. Теория Поххаммера — Кри не дает решения для цилиндрических брусьев со свободными торцами, что неизбежно имеет место в экспериментах. В 1956 г. Ричард Скэлак [1]) предложил модифицирован-



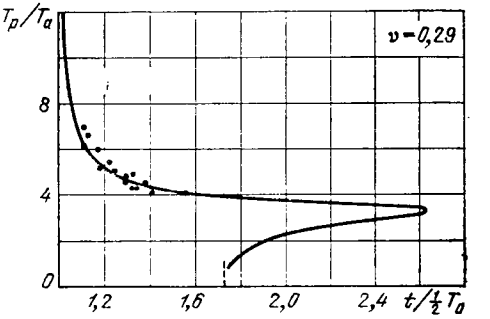


Рис. 3.72. Опыты Дэвиса (1956): сравнение теоретических данных с полученными экспериментально на основе обработки осциллограмм, показанных на рис. 3.70,*а*; t — время в мкс, T_p — в мкс. Пояснение см. в тексте.

Рис. 3.73. Опыты Дэвиса (1956): сравнение теоретических данных с полученными экспериментально на основе обработки осциллограмм типа показанных на рис 3. 71, пояснение T_p, T_a и T_0 см. в тексте.

ную трехмерную теорию, основанную на анализе асимптотического поведения, которая допускала сравнение с экспериментом только на относительно больших расстояниях от ударяемой поверхности. Однако, несмотря на то, что это упрощало сравнение теории с экспериментом при условии, что предложенная теория и определяющие соотношения правильны, теория, развитая Скэлаком, не делает намного более простой процедуру надежного установления того факта, что наблюдаемая дисперсия волновых фронтов возникает единственно вследствие различия волновых скоростей для волн различной длины, как это явствует из трехмерной теории вибрации цилиндров. Если трехмерная теория еще и оказывается существенной для интерпретации экспериментальных результатов, то использование данных этой теории о распространении волн в цилиндрическом стержне с целью установления вида неизвестной зависимости между напряжением и деформацией едва ли позволит найти приемлемый путь для решения этой проблемы.

[1]) Skalak [1957, 1], Скэлак изложил эти соображения на съезде в 1956 г., они были опубликованы в 1957 г.

3.38. Эксперименты по распространению волн малой амплитуды в металлических цилиндрах, выполнявшиеся в течение последних двух десятилетий: последовательность изменений в технике экспериментов и в интерпретации результатов

Юджин Эштон Риппергер (Ripperger [1953, 1]) в 1953 г. используя пьезоэлектрический датчик для измереиия деформаций, созданный им в предыдущем году (Ripperger [1952, 1, 2]), рассмотрел проблему осевого удара по стальному стержню линой 91,4 см шариком, летящим со скоростью 130,5 см/с. Он использовал стальные шары разных размеров. Фиксируя каждый сигнал деформации при помощи датчиков, размещенных на расстояниях 2,54; 15,24 и 45,72 см

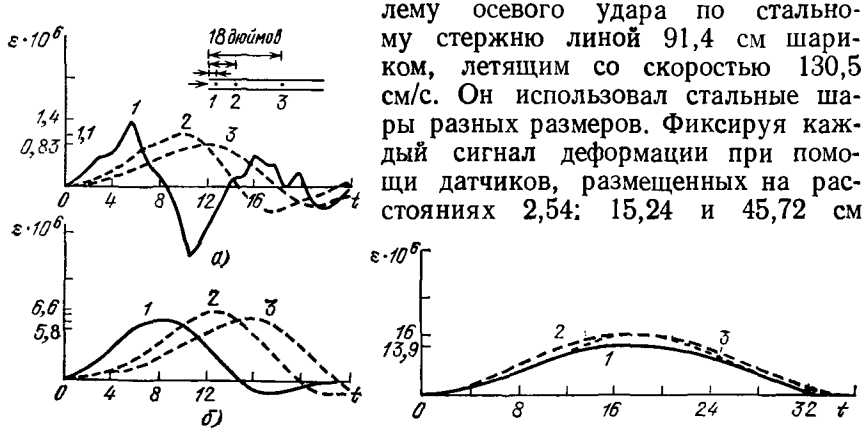


Рис. 3.74. Опыты Риппергера (1953); определение с помощью пьезоэлектрических датчиков изменения профиля волн деформаций по измерениям в трех различных по длине стержня точках при осевом столкновении с ним шариков указанных диаметров. Диаметр стержня равен одному дюйму. *1* — первый датчик, *2* — второй датчик, *3* — третий датчик; *t* — время в 10^{-6} с, *ε* — деформация. *а)* Случай, когда диаметр шарика равен 0,125 дюйма; *б)* случай, когда диаметр шарика равен 0,25 дюйма.

Рис. 3.75. Опыты Риппергера (1953): волны деформаций в стержне (данные см. в подрисуночной подписи к рис. 3.74) при осевом ударе по нему шарика с диаметром 1,27 см (0,5 дюйма); диаметр стержня равен одному дюйму. *1* — первый датчик, *2* — второй датчик, *3* — третий датчик; *t* — время в 10^{-6} с, *ε* — деформация.

от места удара, он мог сравнить формы импульса в этих трех сечениях по длине стержия. Так же, как и Дэвис, Риппергер рассматривал проблему разделения продольных и поперечных компонент, Риппергер подробно проанализировал различие результатов, полученных при варьировании диаметров как стержней, так и шаров; он сравнил значения максимальных амплитуд деформаций, полученные в эксперименте, со значениями, иайденными на основе модифицированной теории Герца. На рис. 3.74 показаны эффекты дисперсии по данным, полученным при помощи датчиков, установлеиных в трех указанных выше сечениях. Профили импульсов сравнивались для случаев удара шариками с диаметрами 0,318 и 0,635 см по торцу стержня с диаметром 2,54 см; на рис. 3.75 показан эффект от удара шарика диаметром 1,27 см о тот же самый стержень.

Таблица 98

Риппергер (1953)

Диаметр шарика (дюйм)	Расчетные значения	Замеренные значения			Диаметр шарика (дюйм)	Расчетные значения	Замеренные значения		
		датчик 1	датчик 2	датчик 3			датчик 1	датчик 2	датчик 3
Стержень диаметром 1 дюйм					Стержень диаметром 1 дюйм				
Максимальные амплитуды импульсов деформации $\cdot 10^6$					Продолжительность импульса с $\cdot 10^6$				
1/8	1,84	1,4	1,1	0,83	1/8	8,5	8,4	14,4	17,8
1/4	7,3	5,8	6,6	6,2	1/4	16,8	14,6	20,0	23,4
1/2	28,9	13,9	16,0	16,0	1/2	34,3	33,8	33,8	33,8

В табл. 98 дается сравнение экспериментально найденных продолжительностей импульсов и их максимальных амплитуд с результатами вычислений. Как утверждал Риппергер, «изменение эффектов дисперсии и затухания, имеющее место при возрастании длительности импульса, совершенно очевидно при рассмотрении рис. 21 и 22 (здесь рис. 3.74 и 3.75) и результатов, приведенных в таблице» (Ripperger [1953, 1], стр. 35).

Риппергер приходит к заключению:

«Для того чтобы импульс передавался вдоль стержня без существенного уменьшения амплитуды и изменения формы, он должен иметь длительность приблизительно в 8 раз бо́льшую, чем время, необходимое ему для прохождения расстояния, равного диаметру стержня». (Там же, стр. 39.)

Опять-таки, так же как и Дэвис, Риппергер выразил сомнение в равномерности распределения напряжений по поперечному сечению стержня и задался вопросом, дают ли адекватную информацию измерения лишь на поверхности образца. Окончательно Риппергер пришел к выводу, что средняя скорость импульса действительно позволяет аппроксимировать скорость распространения волны в стержне $c_0=\sqrt{E/\rho}$. Исходя из своих экспериментов, он дал значение $c_0=16\,800\pm300$ фут/с, которое для стали соответствовало динамическому значению $E=21\,200$ кгс/мм^2 (что лежит между предельными значениями 21 900 и 20 400 кгс/мм^2). При распространении большого импульса, как отметил Риппергер, эти пределы были слишком велики, чтобы можно было с определенностью сравнивать динамические и статические модули, и это несмотря на то, что указанную проблему еще 110 лет назад сформулировал Вертгейм и что прошло уже почти 50 лет после попытки Грюнайзена получить окончательный ответ.

Когда эксперимент сравнивается с теорией, основанной на линейной аппроксимации, независимо от того предполагаются ли распро-

страняющиеся волны одномерными или трехмерными, главная трудность состоит в том, что *a priori* нельзя быть уверенным в том, каким образом в действительности в условиях эксперимента распределены напряжения и деформации в пространстве и во времени. Вдобавок, когда рассматривается зависимость истории деформирования в точке от истории нагрузки, приложенной к некоторой области на поверхности тела, в лучшем случае можно лишь приближенно учесть эффекты пространственности, а также другие источники дисперсии, такие, как нелинейность или вязкость, описание которых может оказаться желательным.

При любом обсуждении экспериментов по распространению волн в твердых телах, проведенных в течение последних 20 лет, приходится отбирать материал, содержащийся во многих сотнях опубликованных статей [1]). Большая часть из них может быть опущена, поскольку является повторением, или тривиальна, или имеет ценность лишь в очень специальных областях применения. Однако остается еще большое количество статей, посвященных экспериментам, которые стоит изучить детально.

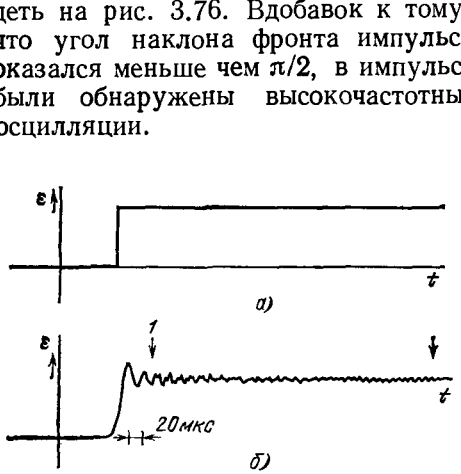
Определенно, из этих работ одной из наиболее интересных и важных является работа Чарльза Вильяма Картиса (Curtis [1960, 1]). Используя технику пьезокристаллов Риппергера, Картис детально определил изменения во времени деформаций вдоль магниевого стержня диаметром 5,08 см и длиной 732 см, нагруженного на одном конце импульсом ступенчатого очертания от удара воздушной волной, которая возникла и перемещалась вдоль длинной трубы после разрыва в ней диафрагмы. Картис отметил, что: «Хотя на решение Поххаммера — Кри часто ссылаются как на точное, оно было первоначально получено для бесконечно длинных стержней (простирающихся от плюс до минус бесконечности) и лишь совсем недавно были сформулированы точные решения задач о переходных процессах, включающие случаи полубесконечных стержней (стержней с одним концом)». (Curtis [1960, 1] стр. 17). Упомянутое здесь решение принадлежит Ричарду Скэлаку (Skalak [1957, 1]) и уже отмечалось мною в конце предыдущего раздела [2]).

---

[1]) В данном исследованнн, где основное вннмание сосредоточено на определяющих уравнениях, мне, к сожалению, приходится опустить описание работ, в которых иа протяжении столетня, после первоначального открытия Вертгейма, усовершенствовалась техиика экспериментов с применением фотоупругости. Например, вполне уместным для нашего обсуждения является анализ работы М. М. Фрохта и Пауля Д. Флннна (Frocht and Flynn [1956, 1]) по распространению волн в фотоупругих материалах и выполненной десятилетием позднее работы Флинна (Flynn [1965, 1]), посвященной изучению динамнческой фотоупругости со сверхвысокой скоростью фотографирования.

[2]) Следует заметить, что теория Скэлака была разработана для стержней бесконечной длины. Она опнсывает деформацию двух полубесконечных стержней после их соударення. Поскольку в этой теории стержень имеет бесконечную длиу, то не возникает проблемы, связанной с иаличием свободиого конца. В эксперименте Картиса, однако, стержень оставался полубесконечным. По существу, то поперечиое сечеиие, по которому ианосился воздушный удар, было свободиым.

Картис выбрал стержень длиной 731,5 см и диаметром 3,81 см из магния по той причине, что низкое значение E для этого материала позволило ему получить высокое значение максимальной деформации при чрезвычайно малой амплитуде импульса, равной 0,032 кгс/мм². Предполагаемая продолжительность нарастания фронта ударного импульса, остававшегося постоянным в течение нескольких миллисекунд, составляла одну микросекунду. Различие между результатами расчета, основанного на элементарной теории, и экспериментальными результатами, полученными в сечении, расположенном на расстоянии 150 см от ударяемой поверхности, можно видеть на рис. 3.76. Вдобавок к тому, что угол наклона фронта импульса оказался меньше чем $\pi/2$, в импульсе были обнаружены высокочастотные осцилляции.



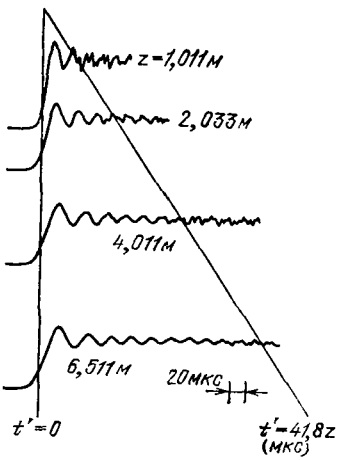


Рис. 3.76. Опыты Картиса (1960): профиль волны на расстоянии 150 см от ударяемого конца в длинном магниевом стержне, подвергнутом воздушному удару по одному из торцов. *а*) Элементарная теория; *б*) экспериментальная автоматическая запись действительных деформаций. *1* — иет рассеивания. Длнна датчика 2,2 см; t — время (цена делеиия 20 мкс), ε — деформация.

Рис. 3.77. Опыты Картиса (1960): профили воли в последовательном ряде точек вдоль стержия, подверженного воздушиому удару, показывающие рассеивание основиого фронта и развитие второй формы колебаиий. Фронты основной волны смещены так, чтобы совпали во времени их начала.

Сравнивая данные, полученные при помощи датчиков деформации, изготовленных из титаната бария, которые были расположены в различных местах вдоль стержня, Картис обнаружил, что волновой фронт диспергирует. Для того чтобы обнаружить не только изменение наклона первого, основного, фронта, но и появление вторичных мод колебаний к предсказанному моменту времени, отмеченное наклонной сплошной линией (рис. 3.77), очертания главного волнового фронта, наблюдавшиеся в различных сечениях в разные моменты времени, были сдвинуты так, чтобы своими соответствующими точками они попали в одно и то же начало оси времени.

Для тех кто интересуется раскрытием экспериментальными средствами сложных деталей высших форм, соответствующих час-

тотным уравнениям задач о собственных значениях и собственных векторах, существенным является использование экспериментальной техники, способной записывать изменение информации в течение микросекундных промежутков. Получение данных, приведенных выше на рис. 3.76 и 3.77, Картис поручил Георгу

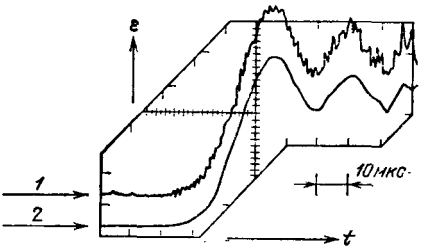


Рис. 3.78. Опыты Картиса (1960): профили волн в стержне, подверженном воздушному удару, показывающие высокочастотные колебания, видимые при малой длине датчика и не наблюдаемые из-за сглаживания при длинном датчике; t — время, ε — деформация. *1* — короткобазовый датчик (0,3 см), *2* — длиннобазовый датчик (2,24 см).

Фоксу. Был использован датчик длиной 2,2 см. Детали процесса были сглажены усредненными показаниями на участке, равном длине датчика. Это ясно видно, если провести сравнение с показаниями датчиков, имеющих длину, равную 0,3 см. Такое сравнение

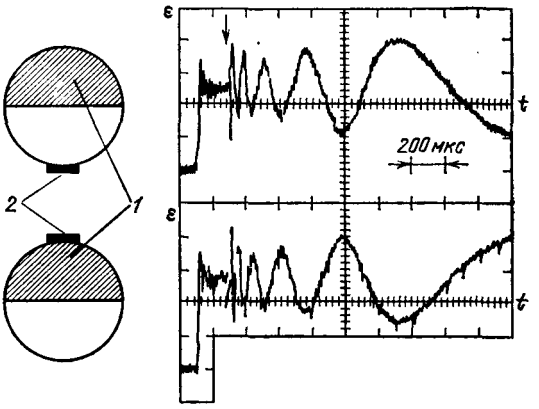


Рис. 3.79. Опыты Картиса (1960): профили волн при ударах фронтах, ограниченных половиной поверхности торца, как это показано на рисунке, для двух различных положений датчика. Отмечается наложение продольной и поперечной составляющих. *1* — часть площади торца, на которой распределено давление (заштрихована), *2* — месторасположение датчиков; ε — деформация, t — время в мкс.

дано на рис. 3.78 для сечения, расположенного на расстоянии 150 см от ударяемой поверхности. Этим выразительно иллюстрируется одна из проблем установления теоретической чувствительности эксперимента в ситуации, когда описывается сложная волновая структура.

Картис также генерировал ударные импульсы, которые приводили к появлению как продольных, так и поперечных колебаний, закрывая половину конца трубы, создающей удар, способом, показанным на рис. 3.79. На этой же фигуре приведена осциллограмма истории деформирования во времени, полученная на другом конце стержня.

Приведенные данные отвечают допустимости суперпозиции продольных и поперечных мод. Картис обнаружил, что последние были в согласии с вычислениями для первой поперечной моды, но имелись также признаки связи и со второй модой. Первоначальные

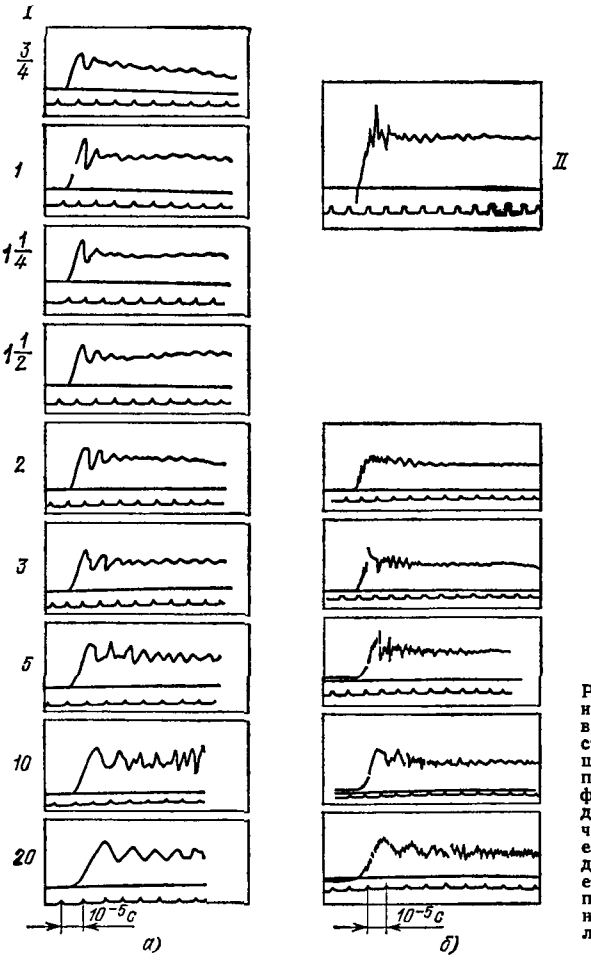


Рис. 3.80. Опыты Микловитца и Найзвангера (1957): запись во времени параметров состояния стержня, испытавшего удар. *а*) Радиальное перемещение; *б*) осевая деформация. I — расстояние в дюймах от места удара до сечения в стержне из алюминиевого сплава (диаметром 1 дюйм), в котором наблюдается профиль волны, II — профиль волны деформации с наибольшими по уровню амплитудами колебания деформации сжатия.

эксперименты по ударным волнам были фактически подготовлены Картисом в 1954 г., до того как Скэлаком был сделан асимптотический анализ данной задачи, с использованием интегралов Фурье. Обсуждение, приведенное здесь, взято из резюме, представленного на симпозиум 1959 г. (Curtis [1960, 1]).

В июне 1956 г., за шесть месяцев до опубликования результатов анализа Скэлака, Юлиус Микловитц и К. Р. Найзвангер (Miklowitz and Nisewanger [1957, 1]) представили исследование, в котором

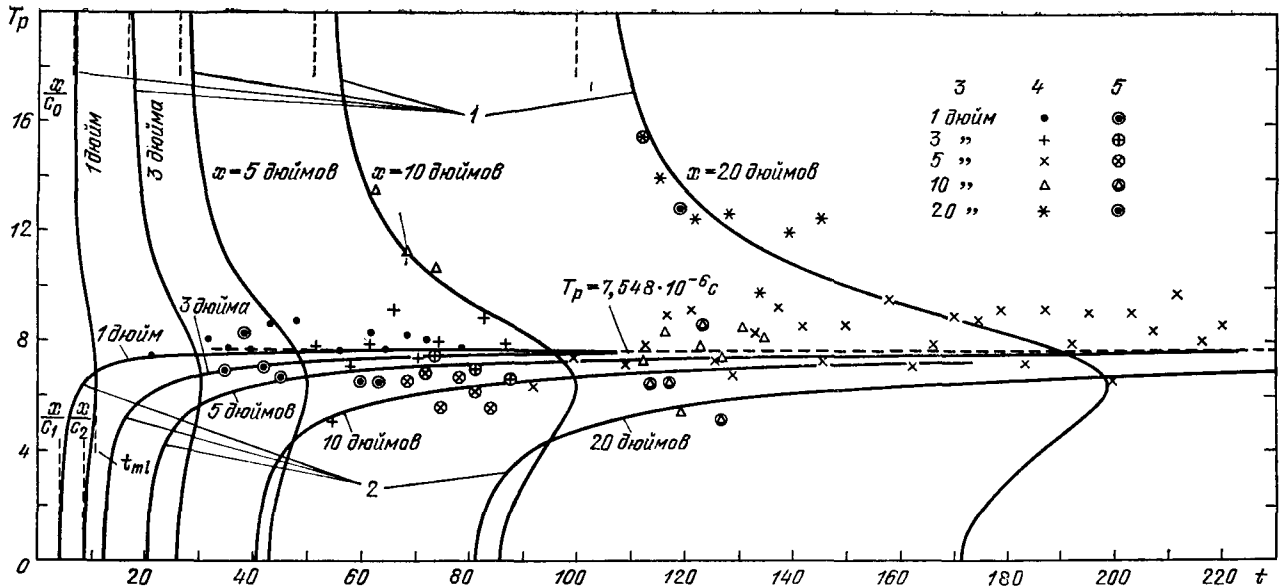
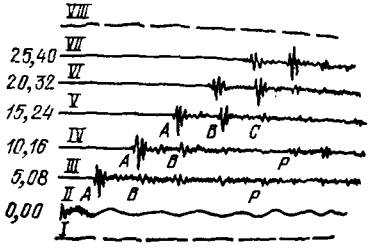


Рис. 3.81. Опыты Микловитца и Найзваигера (1957): сравнение расчетных и экспериментальных значений для результатов, представленных на рис. 3.80. *1* — продольные формы, *2* — радиальные формы, *3* — расстояние в дюймах между точкой удара и точкой наблюдения, *4* — обозначения радиальных перемещений, *5* — осевые деформации. По оси абсцисс отложено $t\cdot10^6$ с (t — время); по оси ординат отложен $T_p\cdot10^6$ с (T_p — превалирующий период).

повторяли опыты Картиса, с нагружением образцов с помощью трубы, генерирующей удар, но используя в качестве образца стержни (из алюминиевого сплава) диаметром 2,54 см. Они получили почти в семь раз более высокий максимум давления, а именно, равный 0,21 кгс/см². Радиальные перемещения во многих сечениях вдоль стержня были измерены при помощи конденсаторного микрофона, а осевые деформации в тех же сечениях — при помощи двадцати



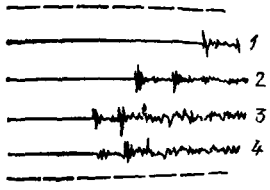


Рис. 3.82. Опыты Хьюджеса Поидрома и Мимса (1949): распространение импульса вдоль стальных стержней. Импульсы индуцированы и восприняты при помощи кварцевых кристаллов, расположенных на каждом из концов. Стержни из холоднокатаной стали диаметром 3,645 см.

Рис. 3.83. Опыты Хьюджеса, Пондрома и Мимса (1949): распространение импульса вдоль стержня диаметром 2,54 см и длиной 15,240 см. Импульсы были индуцированы и восприняты кварцевыми кристаллами, расположенными на каждом из концов стержня. Верхняя и нижняя штриховые линии — маркеры времени, *1* — плексиглас, *2* — латунь, *3* — алюминий, *4* — сталь.

очень коротких датчиков электрического сопротивления, смонтированных последовательно. Осциллограммы измерений обоих типов в выбранных сечениях показаны на рис. 3.80, из рассмотрения которого ясно видно общее развитие дисперсии наблюдаемых волн. Микловитц и Найзвангер прокомментировали возможный источник различий в тонких особенностях двух типов измерений. Они предположилн, что разница была связана либо с их инструментами, либо с интерполяцией вдоль диаметра радиальных перемещений.

Эти данные после сравнения с приближенной теорией Р. Д. Миндлина и Г. Херрманна (Mindlin and Herrmann [1922, 1]), описывающей дисперсии волн в стержнях, приводят к корреляции, показанной на рис. 3.81.

Дэвис показал, что для описания осевого соударения стержней является существенным использование трехмерной теории. Таким образом, экспериментатор должен быть проницательно бдительным по отношению к теоретической чувствительности эксперимента в такой сложной физической ситуации, чтобы распознать среди многих внушающих доверие теорий ту, которая является применимой в физическом отношении.

Другой подход к определению динамических постоянных упругости был предложен Д. С. Хьюджесом, В. Л. Пондромом и Р. Л. Мимсом (Hughes, Pondrom and Mims [1964, 1]). Цилиндриче-

ский стержень рассматривался как трехмерное тело ограниченных размеров в терминах микросейсмологии. Чтобы получить короткий импульс [1]) на одной торцевой поверхности, использовался кварцевый кристалл; на противоположном конце стержня был установлен кристалл-детектор. Изменяя длину стержня, Хьюджес, Пондром и Мимс смогли геометрически представить продолжительность прохождения начального расширения (дилатации), а также однократно и многократно отраженных импульсов в том случае, когда длина импульса была достаточно малой, чтобы можно было разделить различные отраженные составляющие. Изменяя как диаметр, так и длину образца, они могли произвольно контролировать свои вычисления и измерения, прежде чем находить постоянные упругости, используя измеренные скорости распространения волн. Множество хорошо иллюстрирующих вопрос снимков осциллограмм, полученных ими, приведено на рис. 3.82 для стержней указанной длины; символ 0,00 означает пребывание двух кристаллов в состоянии контакта. Диаметр холоднокатаного стального стержня был равен 3,645 см. Линии *I* и *VIII* представляют собой масштаб времени — длина каждого штриха равна продолжительности 10 мкс.

На рис. 3.83 приведены сравнительные продолжительности прохождения импульса в плексигласе, латуни, алюминии и стали в стержнях диаметром 2,54 см и длиной 15,24 см. Эти данные позволили получить значения скоростей волн и постоянных упругости, которые сведены в табл. 99. Общее соответствие с ранее полученными значениями доказывало возможность такого использования микросейсмологического подхода при исследовании динамической упругости твердых тел.

Таблица 99

Хьюджес, Пондром и Мимс (1949)

Материал	V_D (м/с)	V_R (м/с)	ρ (г/см³)	K (кгс/мм²)	μ (кгс/мм²)	E (кгс/мм²)	ν
Холоднокатаная сталь I	5880,0	3203,5	7,82	16 685	8 194	21 127	0,289
Холоднокатаная сталь II	5892,2	3211,8	7,82	16 736	8 237	21 229	0,289
Алюминий	6379,0	3100,0	2,70	7 628	2 655	7 127	0,345
Латунь	4283,0	2033,0	8,56	11 253	3 615	9 792	0,355
Плексиглас	2640,0	1269,0	1,18	5 820	1 940	5 238	0,350

Подобным образом в 1954 г. Герберт Колски (Kolsky [1954, 1]) рассмотрел динамическую упругость с точки зрения микросейсмо-

[1]) Фактически этот импульс представлял собой волновой пакет малой длительности с частотой 3,5 МГц.

логии. На одном конце цилиндра, длина и диаметр которого были приблизительно равны, было помещено взрывчатое вещество — азид свинца — источник импульса длительностью от двух до трех микросекунд, а в центре другого конца устанавливался емкостный датчик Дэвиса для измерения перемещений по схеме, показанной на рис. 3.84. Нулевой момент времени отмечался сигналом от фотоэлемента, который срабатывал от вспышки света при взрыве.

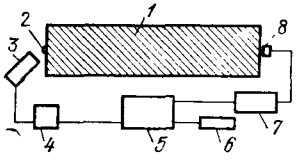


Рис. 3.84. Опыты Колски (1954): аппаратура для измерения микросейсмических импульсов очень короткой продолжительности в коротком стальном стержне. *1* — цилиндр, *2* — взрыв, *3* — фотокамера, *4* — счетчик времени, *5* — катодно-лучевой осциллограф, *6* — осциллятор, *7* — усилитель, *8* — конденсаторное устройство (датчик Дэвиса).

При $\nu=0{,}29$ для стали Колски определил коэффициенты отражения как функции угла падения на основе линейной теории упругости и смог проследить за траекторией, показанной на рис. 3.85, для которой он вычислил момент прибытия или продолжительность прохождения импульсов. Изменяя зазор конденсатора, Колски мог изменять чувствительность датчика, чтобы записать либо низкую амплитуду дилатационного предвестника, распространяющегося с дилатационной скоростью c, либо максимум главного импульса, имеющего скорость c_0. Для первой он нашел значение 6000 м/с, что соответствует вычисленному значению $c_1=6090$ м/с при $\nu=0{,}29$, исходя из значения E, определенного в опыте на продольные колебания. Скорость, определенная по импульсу, была $c_0=5300$ м/с, что сравнимо со значением скорости продольных колебаний 5320 м/с [1]). Как отметил Колски, решение Поххаммера — Кри, строго применимое только к бесконечным синусоидальным пакетам волн, было неадекватно процессам, для которых распределение энергии между дилатационными и сдвиговыми волнами изменялось при многократном отражении их от свободной поверхности. Анализ Скэлака (Skalak [1957, 1]) был ограничен описанием поведения на относительно больших расстояниях от торца цилиндра, испытавшего воздействие импульса, как раз таких, для которых Картис (Curtis [1960, 1]) провел свои сравнения экспериментальных и теоретических результатов. Микросейсмические исследования Хьюджеса, Пондрома и Мимса (Hughes, Pondrom and Mims [1949, 1]) и Колски (Kolsky [1954, 1]) не имели таких ограничений. Их задача состояла в том, чтобы получить требуемую точность определения продолжительности прохождения импульса, т. е. продолжительности порядка одной микросекунды. В их методе требовались короткие импульсы или волновые пакеты такой длины, чтобы выделить момент прибытия.

---

[1]) В дополнение к исследованию резонансных продольных колебаний Колски также определил E, посылая импульсы по двухметровому стержню из той же стали.

В 1960 г. тоже на основе микросейсмологии я (Bell, [1960, 4]) анализировал на участке стержня, начиная от его торца длиной в один диаметр, процесс развития и последовательного роста деформаций от импульса, испытываемого центром торца цилиндрического алюминиевого стержня диаметром 5,08 см и длиной 305 см. Импульс я получал при ударе в центр торца упомянутого цилиндра алюминиевым стержнем диаметром 0,635 см и длиной 53,4 см; продолжительность импульса составила 200 мкс. Для измерения радиальных перемещений на расстояниях 1/4 диаметра и через каждые 1/2 диаметра до 30,8 см от ударяемой поверхности была применена модифицированная техника Дэвиса, в которой используются емкости. Для определения продольной деформации были применены электротензометрические датчики сопротивления. Установка показана на рис. 3.86, а графики измеренных радиальных перемещений и продольных деформаций даны соответственно на рис. 3.87, 3.88.

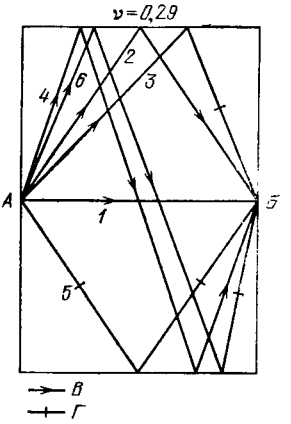


Рис. 3.85. Опыты Колски (1954): определение волн по Колки при его экспериментах с использованием коротких импульсов. *А* — заряд, *Б* — детектор, *В* — волны расширения (дилатационные); *Г* — волны сдвиговые (дисторционные).

При скорости удара в 417 см/с в ударяющем стержне максимальная деформация достигала значения $820 \cdot 10^{-6}$, что значительно ниже уровня, соответствующего пределу упругости. Через отношение площадей я получил значение деформации в ударяемом цилиндре, равное $12{,}5 \cdot 10^{-6}$. Как можно видеть на рис. 3.88, результаты элементарной теории находились в прекрасном соответствии с трехмерным поведением в эксперименте. Прямоугольный ступенеобразный скачок, показанный на рис. 3.88, был выбран таким, каким он предполагается в элементарной теории при скорости $c_0 = \sqrt{E/\rho}$; линия a соответствует скорости дилатационной волны c_1; линия b—c_0, и линия d — скорости волн сдвига $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$.

В процессе вычислений я предполагал (там же), что начальный волновой фронт сферический и что на свободных поверхностях цилиндра происходит разделение амплитуды (падающей волны) между дилатационными и сдвиговыми волнами при сферическом затухании амплитуд. Пространственные распределения напряжений и радиальных перемещений определялись для моментов, когда фронт дилатационной волны достигал точек, удаленных на расстояния, равные пяти диаметрам (25,4 см) и десяти диаметрам (50,8 см) цилиндра от ударяемого торца. На рис. 3.89 применительно к частному случаю наклона луча, исходящего из центра ударяемого торца цилиндра, а именно луча, составляющего с плоскостью торца

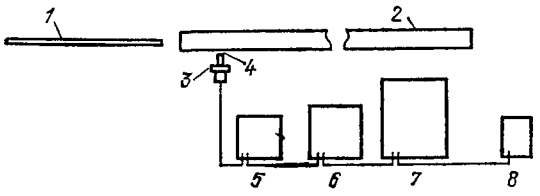
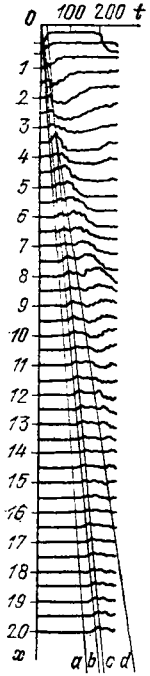


Рис. 3.86. Опыты Белла (1960); схема экспериментальной установки для измерения радиальных перемещений в длинном стержне, подвергнутом центральному осевому удару по одному из концов. *1* — алюминиевый стержень диаметром 0,64 см, длиной 53,34 см, *2* — алюминиевый стержень диаметром 5,08 см, длиной 3,05 метра, *3* — емкостный зонд, *4* — зазор 0,005 см, *5* — усилитель, *6* — электрический фильтр, *7* — осциллоскоп, *8* — генератор временных маркеров (меток времени).



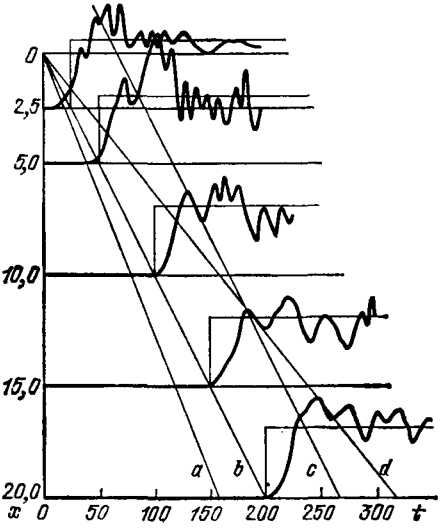


Рис. 3.87. Опыты Белла (1960); измерение радиальных перемещений, произведенное на экспериментальной установке, показанной на рис. 3.86. Измерения были выполнены при помощи емкостных датчиков; t — время в мкс, x — расстояния от торца, по которому произведен удар (единицей измерения является длина диаметра стержня). Для каждого сечения, находящегося на указанном на оси расстоянии, дан график профиля волны радиальных перемещений точек границы поперечного сечения.

Рис. 3.88. Опыты Белла (1960); профили волн продольных деформаций, найденные на экспериментальной установке, показанной на рис. 3.86, на указанных расстояниях вдоль стержня от ударяемого торца. Измерения были выполнены при помощи датчиков электрического сопротивления; t — время в мкс, x — расстояние от торца, по которому произведен удар (единицей измерения является длина диаметра стержня). Для каждого сечения, находящегося на указанном на оси расстоянии, дан график профиля волны продольных деформаций.

цилиндра угол, равный 64,5°, показано соответствующим образом увеличенное и спроектированное распределение волн малой амплитуды для области, расположенной по одну сторону от осевой плоскости. На рис. 3.90 дано изображение аналогичных распределений, но для всего цилиндра и применительно к значениям угла

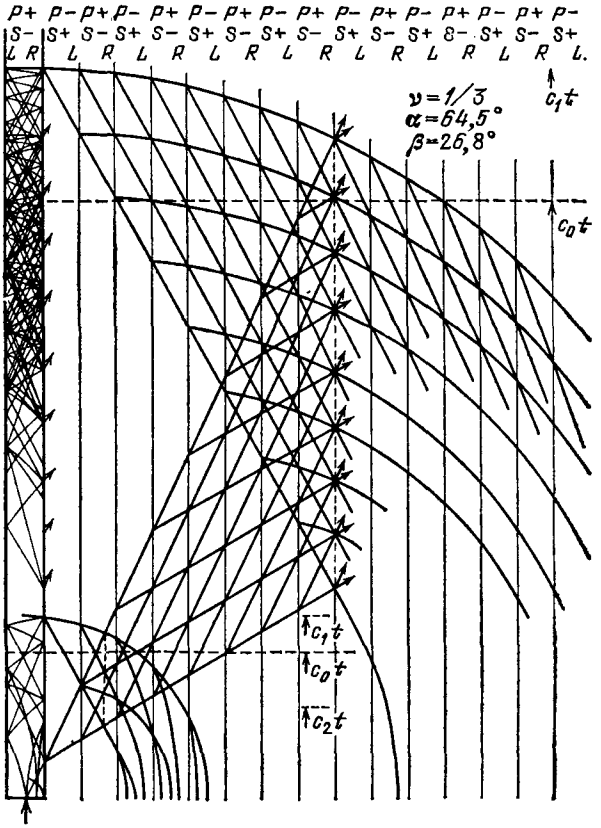


Рис. 3.89. Опыты Белла (1960): распространение волны в соответствии с микросейсмологией в стержне, подвержеином осевому удариому импульсу ступенчатого вида, получаемому на устаиовке, изображенной на рис. 3.86. Подробности показаны для одного луча с начальным углом 64,5°. Рисунок соответствует моментам времени, когда ведущая (дилатационная) волна проходила расстояния, равные пятн и двадцати длннам диаметра стержия.

между лучом, исходящим из центра ударяемого торца, и плоскостью этого торца, равным 0, 10, 20, . . ., 80, 90°.

Фактически вычисления проводились для значений углов через каждые пять градусов. Это требовало тщательного учета знака амплитуды малых волн при суммировании проекции. На рис. 3.91 можно увидеть проделанное мною сравиение данных экспериментального измерения радиальных перемещений (кружочки) и полученных на основе вычислений (сплошная линия) для момента, когда

дилатационная волна достигала точки, находящейся на расстоянии пяти диаметров от точки удара. (Я опустил обсуждение алгебраических упрощений, возможность использования которых была обнаружена при этих вычислениях.)

На рис. 3.92 показано сравнение осевых напряжений, соответствующих эксперименту (кружочки), с найденными путем вычислений, основанных на пространственной теории распространения и

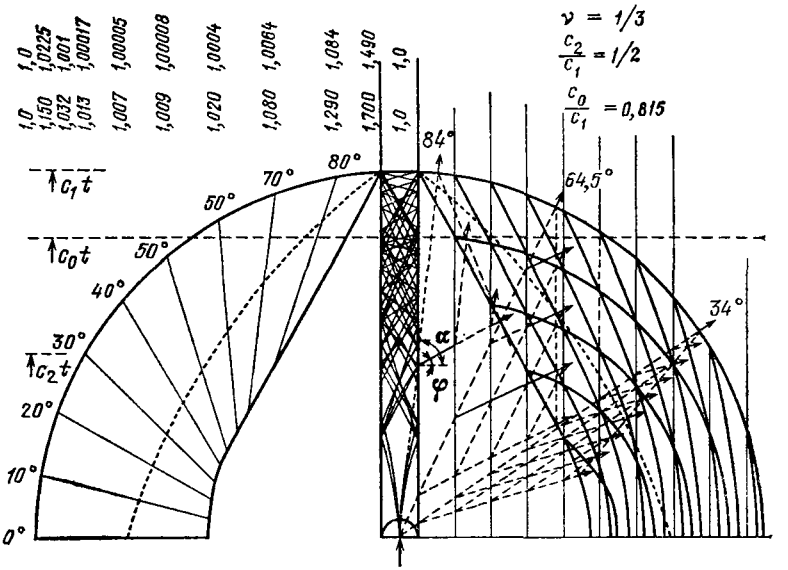


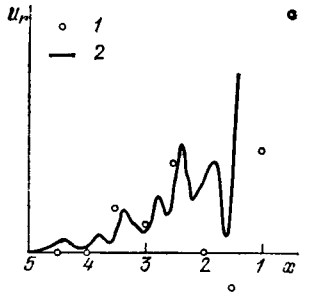
Рис. 3.90. Опыты Белла (1960); распространение волны в стержне, подвергнутом осевому удару, в момент времени, когда фронт ведущей (дилатационной) волны проходит расстояние, равное десяти длинам диаметра стержня.

отражения волн (сплошная линия), и с полученными на основе элементарной теории распространения одномерных волн в стержнях (штриховая линия), когда волна расширения (дилатационная волна) достигала точки, находящейся от точки удара на расстоянии, равном двадцати диаметрам, т. е. спустя 200 мкс после удара.

Отдельные эксперименты были проведены на больших блоках алюминия для того, чтобы определить распределение амплитуд на первоначально сферическом волновом фронте. При более точном анализе (который был осуществлен в связи с интересом к процессу развития волн конечной амплитуды на участке цилиндра, примыкающем к ударенному торцу и имеющем длину, вдоль оси равную длине диаметра) необходимо было пренебречь бесконечностью напряжений в точках, расположенных на оси, вытекающей из предположения о сосредоточенном воздействии ударного импульса.

Если о торец того же самого цилиндра, который обсуждался выше, ударял не сплошной стержень меньшего, чем у цилиндра,

диаметра, а полый цилиндрический стержень (трубка), то при той же скорости ударяющего тела в области цилиндра, удаленной от ударяемого торца на расстоянии не менее половины размера диаметра, экспериментальные результаты оказывались нечувствительными к значительному изменению распределения по ударяемому



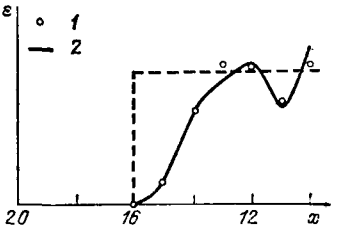


Рис. 3.91. Опыты Белла (1960): сравнение радиальных перемещений, полученных на основе расчетов и измерения в условиях использования экспериментальной установки, схема которой представлена на рис. 3.86, в момент времени, когда ведущая (дилатационная) волна достигла расстояния от места удара, равного пяти длинам диаметра стержня. Расчеты были основаны на анализе распределения волн в соответствии с рис. 3.89 и 3.90; кружок — эксперимент, линия — расчет, x — расстояние от места удара (единица измерения длины равна длине диаметра стержня), u_r — радиальное перемещение точек контура поперечного сечения. *1* — эксперимент, *2* — теория.

Рис. 3.92. Опыты Белла (1960): сравнение данных измерений осевой деформации с результатами расчета в условиях использования экспериментальной установки, схема которой представлена на рис. 3.86, для момента, когда ведущая дилатационная волна прошла расстояние от места удара, равное двадцати длинам диаметра стержня. Расчеты основаны на анализе распределения воли в соответствии с рис. 3.89 и 3.90 (Белл, 1960). Штриховая линия соответствует решению на основе элементарной теории; сплошная линия — расчет, кружок — эксперимент, x — расстояние от места удара (единица измерения длины равна длине диаметра стержня), ε — осевая деформация стержня. *1* — эксперимент, *2* — теория.

торцу импульсной нагрузки, т. е. это было экспериментальной демонстрацией справедливости принципа Сен-Венана при динамическом воздействии в данных условиях. Я пришел к заключению, что корреляция экспериментальных результатов и результатов вычислений, показанная на рис. 3.92, продемонстрировала, что исследования на основе микросейсмологии дают возможность описать поведение вблизи ударяемого торца, а на относительно больших расстояниях от этой поверхности в хорошем соответствии находятся экспериментальные данные Картиса (Curtis [1960, 1]) и результаты, полученные применением асимптотической теории Скэлака (Skalak [1957, 1]). На основе обсужденных результатов можно увидеть путь к правдоподобному преодолению несоответствия между экспериментом и теорией, которое Больцман обнаружил в первых экспериментах по соударению стержней 78 годами ранее (Boltzmann [1882, 1]). Моя работа была посвящена исследованию прямой задачи — по известному импульсу на ударяемой поверхности установить процесс развития волнового поля. Для решения обратной задачи — установления неизвестной истории приложенного импульса во

времени и на площадке действия — Картис предложил использовать трехмерную теорию брусьев.

В статье 1960 г. Картис показал, что удар цилиндров с почти плоскими торцами порождает дисперсивные волновые фронты, тип

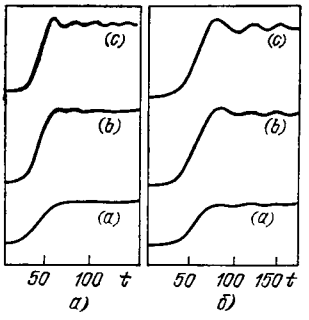


Рис. 3.93. Опыты Картиса (1960): рассеивание, измеренное при осевом столкновении стержней с почти плоскими торцами для трех различных скоростей соударения: (*а*) — 44 см/с, (*б*) — 76 см/с, (*в*) — 139 см/с. Измерения были выполнены в точках, находящихся на двух различных расстояниях от поверхности удара для того, чтобы показать имевшее место рассеивание; *а*) профили волн в сечении, отстоящем от места удара на 101,4 см, *б*) профили волн в сечении, отстоящем от места удара на 508,2 см, t — время в мкс.

которых можно видеть на рис. 3.93. Измерения деформаций, проделанные в двух сечениях при трех скоростях удара, демонстрируют наличие изменения форм волны и другие детали, которые изменяются вместе со скоростью удара.

3.39. Ультразвуковые методы определения постоянных упругости

Как я уже указывал выше при обсуждении работы Корню (Cornu [1869, 1]) (раздел 3.21), Шефер и Бергманн (Schaefer und Bergmann [1935, 1]) в 1935 г. предложили экспериментальный метод определения динамических постоянных упругости оптически прозрачных твердых тел. При вибрациях, возбуждаемых либо непосредственно пьезоэлектрическими элементами, либо косвенно, с использованием подсоединенных, вызывающих колебания пьезокристаллов, возникали стоячие волны короткой длины. Монохроматический свет с подходящей длиной волны, проникая через такое вибрирующее тело, порождал линии оптической интерференции. Дифракционный анализ при известной кристаллографической ориентации твердого тела позволял вычислить его постоянные упругости.

В своем мастерском обзоре 1969 г., посвященном более чем трем десятилетиям развития этой техники, включающей использование импульсов, полученных путем введения лазерных лучей, Джон Мэйу Лью (Liu [1969, 1]) обсудил 177 статей, из которых почти 90 отражали определенные ступени в развитии ультразвукового метода измерения. Более поздние статьи описывали использование ультразвукового метода для исследования постоянных упругости третьего порядка и для определения температурных коэффициентов. Р. Бехманн и Р. Ф. С. Хирмон ((Hearmon) Landolt-Börnstein [1966, 1]) ((Bechmann and Hearmon) Landolt-Börnstein [1969, 1]) в группе

III Ландольт-Бёрнштейна, Kristall-und Festkörperphysik, Vol. 1 в 1966 г. и Vol. 2 в 1969 г. привели огромное количество численных значений постоянных упругости вообще для пьезоэлектрических веществ. Огромность множества чисел, полученных Бехманном, не позволяет привести здесь какие-либо таблицы.

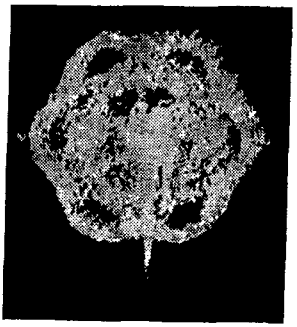


Рис. 3.94. Дифракционная картина Фраунгофера, вызванная стоячей волной в кварцевом кристалле.

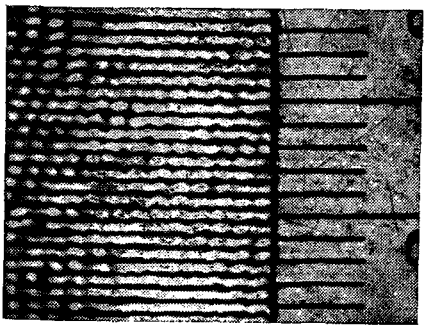


Рис. 3.95. Опыты Лью (1969): вид акустических волновых фронтов, наблюдаемых в расплавленном кварце между поляроидами с пересекающимися плоскостями поляризации.

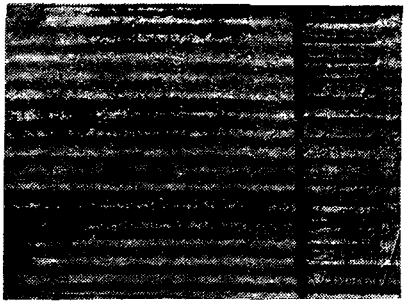
Я включил четыре рисунка из работ Лью единственно для того, чтобы проиллюстрировать общую природу оптической интерференции отмеченного типа. Картина дифракционных линий Фраунгофера, порожденная стоячей волной в кварцевом кристалле, показана на рис. 3.94, а образцы акустических волновых фронтов в расплавленном кварце, полученные между поляроидами с пересекающимися плоскостями поляризации, показаны на рис. 3.95.

На рис. 3.96 показана картина дифракционных линий Френеля от продольных стоячих волн в топазе, на рис. 3.97 представлено видимое отображение акустических волн в расплавленном кварце, полученное методом Шлиерена, позволяющим найти распределение акустической энергии вдоль траектории луча.

В целом скорости акустических волн, определенные из данного типа оптических интерференционных картин, находятся в хорошем согласии с величинами, полученными с помощью более широко используемой техники ультразвуковых эхо-импульсов, которая будет обсуждаться ниже.

В 1934 г. Льюис Баламут (L. Balamuth [1934, 1]) представил статью, которую он назвал «Новый метод определения модулей упругости и изменение главных модулей Юнга каменной соли с изменением температуры в интервале от 78 до 273 К». Эксперимент проводился с кварцевым кристаллом заданного размера, склеенным с кристаллом каменной соли известной ориентации. Тонкие полоски из листов золота обеспечивали контакт для электрического осцилля-

тора, который посредством пьезоэлектрического эффекта был способеи вводить всю систему в режим резонанса. Основанное на линейной упругости теоретическое рассмотрение резонанса продольных колебаний составной структуры, вместе с оценками эффекта



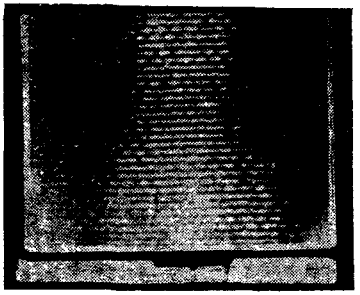


Рис. 3.96. Опыты Лью (1969): дифракционная картина Френеля, вызванная продольными стоячими волнами в топазе.

Рис. 3.97. Опыты Лью (1969): акустические волны, наблюдаемые в расплавленном кварце при использовании метода Шлиерена.

связи, позволило произвести определение E в направлении известной оси образца из каменной соли. Схема эксперимента Баламуса показана на рис. 3.98.

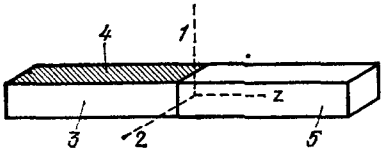


Рис. 3.98. Опыт Баламуса (1934): схема эксперимента при первом использовании Баламусом кварцевого кристалла для определения модуля упругости в твердом теле. *1* — электрическая ось, *2* — оптическая ось, *3* — кварц, *4* — золотой лист, *5* — каменная соль.

В 1936 г. Фред К. Розе (Rose [1936, 1]) распространил этот метод на крутильные колебания, выбрав в качестве образцов кварцевые кристаллы, вырезанные подходящим образом. Ему удалось свести к минимуму эффект трения на границе путем введения осциллятора, образованного из трех частей — кварцевого кристалла, магниевой вставки и каменной соли. Магний был выбран по причине близости значений коэффициента термического расширения для него и для каменной соли. Это позволило получить численные значения, приведенные в табл. 100, трех постоянных упругости c_{11}, c_{12} и c_{44} кристалла каменной соли кубической сингонии, при нескольких значениях температуры между 80 и 270 К, которые Розе сравнил с квазистатическими значениями этих постоянных для каменной соли, полученными ранее Вольдемаром Фохтом (Voigt [1876, 1], [1885, 1], [1910, 1] гл. VII, стр. 716—763).

Розе, подобно Баламусу, использовал оптический образец, изготовленный из каменной соли с высокой степенью точности. Найденные им значения модуля Юнга при сравнении со значениями той же

Таблица 100

Розе (1936)

T (K)	Адиабатические постоянные $\cdot 10^{-11}$ (дин/см^2)			Изотермические постоянные [a]) $\cdot 10^{-11}$		T (K)	Адиабатические постоянные $\cdot 10^{-11}$ (дин/см^2)			Изотермические постоянные [a]) $\cdot 10^{-11}$	
	c_{11}	c_{12}	c_{44}	c_{11}	c_{12}		c_{11}	c_{12}	c_{44}	c_{11}	c_{12}
80	5,76	1,17	1,332	5,72	1,13	200	5,33	1,26	1,301	5,24	1,17
90	5,73	1,18	1,330	5,69	1,14	210	5,29	1,27	1,298	5,20	1,17
140	5,56	1,22	1,318	5,50	1,16	220	5,25	1,27	1,294	5,16	1,17
150	5,52	1,23	1,315	5,45	1,17	230	5,22	1,28	1,291	5,12	1,17
160	5,48	1,24	1,313	5,41	1,17	240	5,18	1,28	1,288	5,07	1,17
170	5,44	1,24	1,310	5,37	1,17	250	5,14	1,29	1,285	5,03	1,17
180	5,40	1,25	1,307	5,33	1,17	260	5,10	1,29	1,282	4,99	1,17
190	5,37	1,26	1,304	5,29	1,17	270	5,06	1,30	1,278	4,95	1,17

[a]) Из Фохта (Voigt [1910, 1])

величины, полученными Баламусом в том же интервале температур 80—270 K, показали очень большую близость. Это свидетельствует о том, что если осциллятор, составленный из двух кристаллов, заменить осциллятором, состоящим из трех кристаллов, то значительных отклонений в результатах наблюдаться не будет.

В 1946 г. Флойд О. Файерстоун и Джулиан Р. Фредерик (Firestone and Frederick [1946, 1]) пропускали очень высокочастотные, короткоимпульсные, ультразвуковые волны через металлический образец, чтобы обнаружить внутренние трещины. Эти опыты стимулировали значительное число экспериментов, в которых рассматривалось использование короткоимпульсных ультразвуковых волновых пакетов для микросейсмологического изучения скоростей дилатационных и сдвиговых волн в твердых телах. Целью этих исследований являлось определение постоянных упругости. В 1947 г. Хиллард Белл Хантингтон (Huntington [1947, 1]) и в 1948 г. Джон Кирклэнд Галт (Galt [1948, 1]) определили этим способом постоянные упругости кристаллов кубической сингонии нескольких твердых тел при атмосферном давлении. Я уже описывал выше эксперименты Хьюджеса, Пондрома и Мимса, которые в 1949 г. определили постоянные упругости изотропной холоднокатаной стали, используя эту ультразвуковую импульсную технику.

Начиная с этих пионерных работ чуть более двадцатилетней давности, в поистине гигантском количестве литературных источников по этому вопросу систематически публикуются значения волновых скоростей для сотен твердых тел. Недавняя библиография по ультразвуку Алана Б. Смита и Ричарда У. Дамона (Smith and

Damon [1970, 1]) в трудах *IEEE* за апрель 1970 г. дает список на 25 страницах, который содержит библиографическое описание около 900 статей по различным аспектам этой темы, причем подавляющее большинство материалов было взято из литературы предшествовавшего десятилетия. Хирмон и Р. Бехманн в Ландольт-Бёрнштейне ((Hearmon) Landolt-Börnstein [1966, 1]; (Bechmann and Hearmon) Landolt-Börnstein [1969, 1]) приводят численные значения параметров упругости более чем для 700 различных кристаллических твердых тел, которые были получены с использованием пьезокристаллов. В издании 1966 г. справочника Ландольт-Бёрнштейна содержались значения постоянных упругости почти 300 твердых тел, и значительное число их было добавлено три года спустя в издании 1969 г. Большая часть указанной литературы содержит результаты опытов, представляющих собой очевидное распространение экспериментов того же типа на огромное число твердых тел. Ста двадцатью пятью годами ранее, когда подобные усилия по преумножению экспериментальных результатов были ограничены единичностью лабораторий, Вертгейм, как отмечалось выше, добился успеха при определении квазистатических и динамических значений модулей одиннадцати элементов и 69 двойных сплавов. В современной практике число лиц, которые определяют эти параметры упругости, возрастает примерно с той же скоростью, что и количество исследованных твердых тел.

Кристаллы известной ориентации анизотропных твердых тел подвергались ультразвуковому импульсу с частотой, измеряемой мегагерцами, генерирующему продольные или поперечные волны, почти неизменяющиеся при прохождении вдоль одной из главных кристаллографических осей. Поскольку углы, определяющие ориентацию кристалла, известны, а продолжительность прохождения импульса измеряется в эксперименте, экспериментаторы обычно, не мудрствуя лукаво, предполагают, что справедлива инфинитезимальная линейная теория упругости [1]). Следовательно, предполагается также существование упругих жесткостей c_{ij} и упругих податливостей s_{ij}. Экспериментаторы, расширившие область первоначальных исследований с теми же целями, которые были у Грюнайзена (Grüneisen [1910, 1]) в 1910 г., пришли затем к заключению, что температурные зависимости указанных постоянных упругости могли быть найдены с помощью таких же ультразвуковых измерений и в пределах тех значений температуры, которые были экспериментально возможны.

Третья область исследования возникла в 1949 г. при проведении экспериментов Давидом Лазарусом (Lazarus [1949, 1]), который

[1]) Эти исследования уникальны в смысле отсутствия в них информации относительно напряжений, деформаций или скорости частиц. Обычно элементарная теория просто предполагается *a priori* справедливой, как-будто окончательно посредством этого утверждения все разновидности явлений оказываются подвластными такой интерпретации.

определил изменение постоянных упругости следующих веществ: KCl, NaCl, CuZn, Cu и Al в зависимости от уровня внешнего давления с тем, чтобы определить коэффициенты упругой объемной деформации. С недавнего времени стал широко применяться ультразвуковой импульсный эхо-эксперимент, в котором рассматривается многократное прохождение образца отраженным импульсом с целью исследования явления затухания волн в твердом теле; такое применение главным образом объясняется тем, что в распоряжении экспериментаторов имелись готовые стандартные приборы промышленного изготовления. В таких экспериментах добиваются все более высоких значений частоты импульсов, поскольку интерес представляет рассеивание как функция длины волны и параметров материала.

Последние десять лет и особенно последнее десятилетие свидетельствовали о большом интересе к использованию коэффициентов сжатия как постоянных упругости, найденных ультразвуковым методом, чтобы определять постоянные упругости третьего порядка. Поскольку амплитуде ультразвуковых волн соответствуют области деформаций порядка 10^{-7} или 10^{-8}, то представляется, что есть основание возвратиться к проблеме, поставленной Грюнайзеном (Grüneisen [1906, 1]) в 1906 г., когда, как мы помним, он продемонстрировал существенную нелинейность зависимости между напряжением и деформацией для твердых тел вблизи нулевого значения напряжения.

Ультразвук — это один из многих экспериментальных подходов, пригодных для изучения деформации твердых тел [1]). Разнообразность его применения так необычно велика, что предмет, рассматриваемый с единственной точки зрения, очевидно, еще очень далек от того, чтобы быть понятным. Важность коэффициента сжатия как константы упругости в нелинейной теории твердого континуума очевидна. Возможность экстраполирования к атомистической интерпретации коэффициента сжатия в качестве базы для линейной теории упругости является предметом современных исследований. При всех возможностях, присущих нелинейной теории, важно иметь экспериментальную интерпретацию самих экспериментальных данных; это вопрос, находящийся еще в зачаточном состоянии, несмотря на огромное количество посвященных ему литературных источников последнего времени.

Температурная зависимость постоянных упругости, найденная с помощью ультразвука, зависимость от давления, определенная подобным же образом для постоянных упругости и постоянных третьего порядка вообще, так же как явление затухания ультразвуковых волн, заслуживают детального обзора с точки зрения перс-

---

[1]) Например, Вольфгаиг Захсе (Sachse [1970, 1]) в своей недавней докторской диссертации получил некоторые интересные результаты, применив ультразвуковую техннку к кристаллам, иснытывающнм пластнческую деформацню.

пектив механики континуума. Но, как я уже отмечал выше, весь набор значений постоянных упругости анизотропных монокристаллов, данный в Ландольд-Бёрнштейне, является столь обширным, что я не думаю, что было бы целесообразно поместить здесь во вновь составленных таблицах избранные результаты, взятые из имеющихся там таблиц.

Обсуждая этот общий вопрос, мы должны заметить, что при возрастании амплитуды ультразвукового импульса (в относительных величинах; это обычно характеризуют как появление волн конечной амплитуды) становятся заметными дисперсия и супергармоники. Разумеется, это еще раз делает очевидной нелинейность определяющих уравнений при инфинитезимальных деформациях.

3.40. Истории кратковременных нагружений

Четыре главных типа истории приложения нагрузки, на которые я ссылался выше, показаны схематично на рис. 3.99. В большинстве случаев продолжительность действия нагрузки на поверхность твердого тела такова, что отражение волн от свободной поверхности образцов лабораторных размеров создает серьезные трудности в интерпретации зависимостей перемещение — время или напряжение — время в некоторой точке, удаленной от этих поверхностей. Именно по этой причине в прошлом особую осторожность проявляли при определении динамических модулей из экспериментов по вибрации образцов в тех случаях, когда порядок значения длины импульса или длины волны оказывался сравнимым с порядком размера самого образца. Немногочисленные экспериментальные методы, дававшие возможность генерировать импульсы, длительность которых была намного меньше, чем продолжительность прохождения волны вдоль наименьшего размера образца, являлись, что совершенно очевидно, важными для серьезного исследования распространения волн и, следовательно, для установления вида определяющих соотношений.

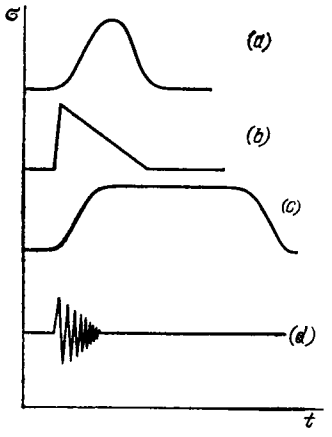


Рис. 3.99. Четыре типа истории нагружения; t — время в мкс, σ — напряжение.

Для алюминиевых или стальных стержней с плоскими торцами (рис. 3.99, *c*) продолжительность подъема фронта волны за пределами примыкающего к месту удара участка стержня, длина которого равна размеру диаметра, имеет порядок 20 мкс и превышает примерно в десять раз значение этой величины в том случае, когда при той же скорости удара испытываются стержни со скругленными торца-

ми. Удар шара по торцу стержня порождает импульс, тип которого показан на рис. 3.99, *a*, с продолжительностью подъема и общей продолжительностью, зависящими от диаметра шара. Примененное Колски (Kolsky [1953, 1]) взрывное импульсное нагружение дает внешний нагружающий импульс типа, изображенного на рис. 3.99, *b* с крутым фронтом и длительностью порядка 2 мкс; наконец, ультразвуковые импульсы мегагерцевой частоты генерируют пакетами с общей длительностью даже меньшей, чем длительность импульса, генерированного взрывом.

Интересным добавлением последнего времени к исследованию способов нагружения, вызывающих распространение волн в твердых телах, является термическое генерирование волн напряжений, описанное К. М. Персивалем и Джеймсом А. Чинейем (Percival and Cheney [1969, 1]), при котором падающий лазерный луч порождал термический импульс чрезвычайно малой длительности на свободном конце стержня. На рис. 3.100 показаны результаты воздействия таких импульсов для серии алюминиевых образцов отмеченной длины.

Эти эксперименты были модифицированы Дж. А. Бреммером и К. М. Персивалем (Brammer and Percival [1970, 1]) с целью разрешить лазерному лучу оказать прямое воздействие на алюминий вместо воздействия на промежуточный элемент из стекла, имевшийся в предыдущих опытах. В этой второй серии экспериментов с алюминиевым сплавом 2024 при помощи такой лазерной импульсной техники были определены модули упругости в температурном диапазоне от 22 до 500°С. Для установления продолжительности прохождения волны была вычислена скорость дилатационных волн путем использования кристалла турмалина. Проблема вычисления скорости сдвиговых волн в такой ситуации является важной, как много лет до этого показал Колски (Kolsky [1953, 1]). Мне представляется, что предположение Бреммера и Персиваля, о возможности вычисления скорости этих волн путем определения информации, относящейся к прохождению первым отраженным фронтом дилатационной волны участка длиной, равной размеру диаметра, требует дополнительного экспериментального исследования. При использовании лазерной техники, в отличие от ультразвуковой, генерированный импульс невозможно варьировать от продольного к поперечному. Ясно, что для экспериментальной техники твердого тела является успехом возможность получать быстрые температурные воздействия с различными историями наряду с некоторыми кратковременными историями нагружения на поверхности тела, рассмотренными ранее.

Важная черта микросейсмической техники, включающей применение чрезвычайно кратковременных импульсов, состоит в том, что в экспериментальных исследованиях не предполагаются, как это было более чем столетие тому назад, некоторые специальные, простые напряженные состояния; вместо этого обобщенные опре-

деляющие уравнения могут быть рассмотрены для трехмерных областей, правда, при наличии интерпретации зависимости от ситуации на поверхности. Поставленная в середине XIX столетия Вертгеймом и его современниками дилема по поводу распространения

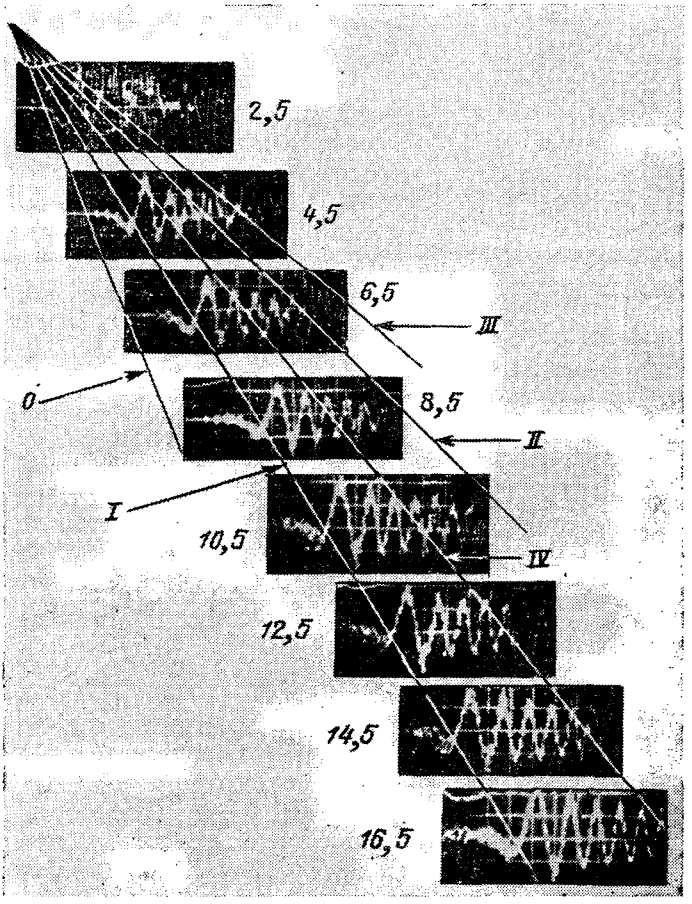


Рис. 3.100. Опыты Перснвела и Чннея (1969): экспериментальное обнаружение деталей профиля термнчески генерированной волны напряжений на различных вдоль стержня расстояниях от сечения возбуждения волны. Термический нмпульс был вызван воздействием лазера. *0* — расширение, *I* — первая форма, *II* — вторая форма, *III* — третья форма, *IV* — четвертая форма. Числа рядом с осциллограммами показывают длины алюминиевых образцов (в дюймах), в которых наблюдался профиль волны.

волн в твердых телах в свободном поле, таким образом, была в некоторой степени решена. Легионы исследователей сегодня имеют ограниченный интерес к этой давней проблеме, поскольку они стараются экстраполировать данные, полученные из ультразвуковых макроскопических опытов, к их микроскопической интерпретации.

3.41. О зависимости постоянных упругости от температуры (1843—1910)

Экспериментальные истоки общих вопросов, развитых достаточно глубоко в этой главе, можно проследить, возвращаясь назад к исследованиям Вертгейма. Тот же вывод оказался бы справедливым, если бы мы ретроспективно проследили вплоть до исходной точки историю развития экспериментов по фотоупругости; эксперимент Вертгейма был первым важным исследованием в этой области, что привело к открытию того, что в природе наблюдается линейная зависимость между напряжениями и параметром оптических свойств [1]). Аналогично, изменение объема при кручении пустотелого образца как функции угла закручивания, позже исследованное Пойнтингом, влияние электрических и магнитных полей на зависимость между напряжением и деформацией и зависимость упругих постоянных от температуры (Wertheim [1844, 1 (a)]) были впервые исследованы Вертгеймом.

Касаясь этой последней проблемы, мы возвращаемся к исследованиям Вертгейма 1843 г. зависимости постоянных упругости от температуры (там же). Начиная от этих исследований, мы можем проследить историю развития экспериментальных исследований этого важного свойства постоянных упругости в течение последовавших 125 лет. За исключением аномалий для железа и стали [2]), температурные данные Вертгейма, приведенные в табл. 55, демонстрируют не только уменьшение модулей с понижением температуры [1], но также и тот факт, что изменение их значений не могло быть обусловлено только изменением плотности, вызванным температурным расширением.

Я уже кратко упоминал температурные исследования Купфера (Kupffer [1852, 1], [1853, 1], [1854, 1]), которые были проведены более чем десятью годами позже опытов Вертгейма. Трудности в ин-

---

[1]) Эрнест Георг Кокер и Луи Наполеон Георг Файлон, которые в своем «*Treatise on Photo-elasticity*» (Coker and Filon [1931, 1]) (имеется русский перевод: Кокер Э., Файлон Л.: Оптический метод исследования напряжений.— М: ОНТИ, 1936), посвятив несколько страниц обсуждению докторской работы Вертгейма (Wertheim [1854, 1]) по фотоупругости, сослались на закон оптических напряжений, как на «закон Вертгейма» (см. стр. 230). См. также Wertheim [1851, 8], [1852, 2].

[2]) Аномалию, отмеченную Вертгеймом в железе и стали и касающуюся наличия максимума в значениях модулей в окрестности 100°C, можно было бы и не описывать здесь, поскольку имеются эксперименты, в которых такие аномалии наблюдаются, для параметров деформации в более чем одном случае при некоторых условиях эксперимента. См., например, опыты по определению значения динамического предела прочности, выполненные Михаэлом Жозефом Маижуаном и Арпадом Людвигом Надаи (Manjoine and Nadai [1941, 1]), которые установили аналогичное поведение, но с максимумом при несколько более высокой температуре, или данные о значении предела упругости, полученные Фредериком Чарльзом Лн (Lea [1922, 1]) для армко-железа или значение электротермических E-модулей Генри Уокера (H. Walker [1907, 1], [1908, 1], [1911, 1]).

терпретации исследования Купфера, как я уже отмечал выше (раздел 3.29), делают бессмысленной попытку какого-либо табулирования его результатов [1]). Однако следует отметить, что он также изучил, хотя и только качественно, известное теперь уменьшение модулей с повышением температуры, уменьшение, происходящее в большей степени, чем это могло быть объяснено изменением плотности, вызванным температурным расширением.

В 1878 г. в широко цитируемой статье о теории упругости в *Британской энциклопедии* [2]) Кельвин суммировал с его точки зрения наиболее существенные экспериментальные исследования по изучению температурной зависимости постоянных упругости, приведя таблицу значений E-модулей Вертгейма при 15, 100, 200°C, полученную 35 годами раньше. Единственной другой ссылкой, относящейся к этой теме [3]), было указание на эксперименты по кручению Кольрауша (и Лоомиса) (Kohlrausch [1870, 1]; Kohlrausch and Loomis [1870, 2]), выполненные в 1870 г. с железом, медью и латунью. На основе собственных экспериментов в области температур от 0 до 100°C они предложили температурный коэффициент в форме

$$[1-\beta\,(t'-t)-\gamma\,(t'-t)^2],$$

где t' — температура опыта в °C, и t — комнатная температура, принятая равной 20°C. Тридцатью годами позднее, в 1908 г., Хвольсон [4]) подытожил исследования температурной зависимости упругих постоянных, проделанные за этот второй промежуток времени, сославшись на многочисленные (исследования) со времени работы Кольрауша и Лоомиса в 1870 г. Как указывал Хвольсон, общее сни-

---

[1]) Это не помешало ему получить награду Ученого Общества в Геттингене в 1855 г. за отмеченные работы,— событие, которое, вероятно, внесло свой вклад в ошибочное мнение, будто Купфер не только первым изучил температуриую зависимость модулей упругости, но и добился также успеха в выяснении природы явления.

[2]) Kelvin [1878, 1], [1880, 1]. Публикация 1878 г. была препринтом статьи в Энциклопедии 1880 г.

[3]) Пирсон (Todhunter and Pearson [1893, 1]) критиковал Кельвина за отсутствие обсуждения работы Купфера. (Фактически Пирсон в нескольких местах в своем обсуждении исследования Кельвина по теории упругостн нападает иа него за систематическое игнорирование работы Купфера, чрезвычайно поразившей Пирсона по причине, которую я совершенно не в состоянии понять.) Температурные исследования Купфера были проведены тем же способом, что и его исследования поперечных вибраций прн комнатной температуре, н содержали те же дефекты интерпретации, что и указанные Цёппритцем (Zöpritz [1866, 1]). Если предположить, что ошибка не зависит от температуры, то можно заметить, что исследование, проведенное Купфером между 15 н 70 градусами Реомюра, дает

$$\mu_t' = \mu_t\,[1-\beta_\tau\,(t'-t)], \qquad t' > t,$$

где t' — температура испытания, t — значение, равное 13°R. Значение β_τ табулировано для 22 различных типов образцов и десяти металлических твердых тел.

[4]) Chwolson [1908, 1], см. также Ле Шателье (Le Chatelier [1889, 1], [1890, 1]), Амага (Amagat [1890, 1]), Ковальски (Kowalski [1890, 1]), Мартенс (Martens [1890, 1]), Фохт (Voigt [1890, 1], [1893, 3]), Виикельман (Winkelmann [1897, 1]).

жение значений упругих постоянных с ростом температуры наблюдалось во всех исследованиях. Он цитирует работу десяти экспериментаторов: Стрейнтца, Кивита, Пизати, Томлинсона, Мэри Хилтон Нойес, А. Мартенса, А. Майера, П. А. Томаса, К. Шефера и Хортона; «все эти исследователи получили одинаковые результаты».

Очень часто, вместо того чтобы попытаться найти эмпирическую формулу, соответствующую полученной зависимости модуль — температура, экспериментаторы описывали процентную разницу в значениях модуля, соответствующих двум фиксированным температурам, таким, как 0 и 100°C. Например, Хвольсон привел следующие процентные уменьшения E между этими двумя значениями температуры, используя экспериментальные результаты Купфера для железа, меди и латуни: 5,5, 8,2 и 3,9% соответственно; в области между этими же двумя значениями температуры А. Майер получил процентное снижение E на 1,16% для стекла из Сан-Гобейна (St. Gobain), от 2,24 до 3,09% для различных видов стали, 3,73% для латуни, 5,5% для алюминия, 2,47% для серебра в области значений температуры от 0 до 60°C и 6,04% для цинка от 0 до 62°C. Хвольсон цитировал П. А. Томаса, установившего, что E изменяется пропорционально плотности в степени x так, что изменения плотности оказываются, таким образом, связанными с коэффициентом расширения. Для чугуна Томас получил значение для $x=31{,}3$. Без критических комментариев Хвольсон цитирует также работу Дьюара, Шефера, Бентона, Дьюара и Хэдфильда (Dewar et Hadfield [1904, 1]) и Хэдфильда, который в 1904 г. произвел исследования E для Pt, Ni, Ag, Cu, Pd и Fe при низких значениях температуры, заключенных между +20°C и —186°C, установив, что в общем температурный коэффициент для E был постоянной величиной. Работа Хэдфильда дала возможность сделать первое предположение о линейном изменении модулей изотропных материалов с изменением температуры в области значений ниже комнатной температуры. Хвольсон описал аналогичные исследования Бентона, проведенные в 1903 г. с медью и сталью между +20°C и —186°C; Бентон также получил значения температурных коэффициентов: 1,180 для меди и 1,087 для стали, которые вводятся как множители к значению модуля при +20°C для получения значения модуля при —186°C. Работа Уассмута, который определил из эксперимента численное значение коэффициента линейного температурного расширения β и получил для железных стержней значение $\beta=0{,}000241$, была упомянута Хвольсоном как исследование, аналогичное выполненному Фохтом по изучению температурной зависимости.

Моя цель при упоминании списка [1]) экспериментальных работ,

[1]) Хвольсон, как правило, включал в список имена без указания даты выполнения работы или специальной ссылки. Предположив, что ссылки в конце раздела содержат упомянутый материал, я установил, что треть цитируемых им работ не содержит исследований температурных зависимостей, но описывает влияние истории предварительной термической обработки (отжига) на значения модулей упругости при комнатной температуре.

составленного Хвольсоном (без критического их разбора), выполненных за второй тридцатилетний промежуток времени, состоит в том, чтобы отметить внезапный, даже, можно сказать, возникший подобно взрыву, интерес к этой теме, перед окончанием XIX столетия. Детальный обзор множества статей по этому вопросу, которые я обнаружил и просмотрел, будет сделан ниже. Я полагаю, что лучше всего начать с работы Гильберта Ардена Шекспира (Shakespear [1899, 1]) 1899 г., после чего перейти к работам Эдуарда Августа Грюнайзена (Grüneisen [1910, 2, 3]); в обеих этих работах была достигнута необходимая точность для достоверного исследования зависимости констант упругости от температуры путем использования при определении напряжений чрезвычайно точного метода оптической интерференции.

Важным аспектом влияния эффектов температуры на упругость твердых тел является связь последней со всей термической историей тела — обстоятельство, которое привлекло интерес большого числа исследователей, начиная с Кулона (Coulomb [1784, 1]), впервые исследовавшего этот вопрос в 1784 г. Этот факт стал очень хорошо известен к середине XIX столетия. К 1844 г. Вертгейм (Wertheim [1844, 1]) с определенностью показал, что в том случае, когда предшествующая температурная история тела включает циклы с высокой температурой (и, следовательно, отжиг твердого тела), значения модуля упругости, определенные при комнатной температуре, в общем оказывались ниже, чем значения, определенные на тех же, или подобных, образцах до термического цикла. Таким образом, проводя эксперименты по изучению упругой деформации при повышенной окружающей температуре, мы должны ожидать различия в результатах для случаев, когда измерения делаются при повышении температуры или при понижении температуры после прохождения через некоторый температурный максимум. Действительно, такое различие было обнаружено большим числом экспериментаторов.

Выше при обсуждении работы Гарофало, Маленока и Смита (Garofalo, Malenock, and Smith [1952, 1], раздел 3.28), посвященной исследованию различных сталей, я рассматривал важный вопрос: является или нет экспериментально определенное значение коэффициента Пуассона постоянной величиной, не зависящей от температуры. Имея дело с линейной упругостью твердых тел и в особенности с линейной термоупругостью, необходимо экспериментально установить, что различные модули, такие, как модуль изменения объема K, E-модули и модули сдвига μ для изотропного тела, действительно изменяются с изменением температуры так, как это должно быть при неизмененном значении коэффициента Пуассона. Аналогично, при попытках определения постоянных упругости анизотропных монокристаллов, в предположении применимости линейной упругости, открытие того факта, что различные постоянные упругости различным образом зависят от температуры, как это и

имеет место в действительности во многих случаях, будет представлять скорее большой, чем малый интерес для теории термоупругости.

В 1870 г. Кольрауш и Лоомис ((Kohlrausch [1870, 1]) (Kohlrausch und Loomis [1870, 2])) предприняли исследование температурной зависимости модуля упругости при сдвиге для железа, меди и латуни, преимущественно с целью установления на основе более точных экспериментов, является ли найденная Вертгеймом 26 лет назад для железа аномалия, относящаяся к модулю упругости E, который растет с ростом температуры от 0 до 100°С, действительно воспроизводимым фактом, отражающим свойство, присущее материалу. Как отмечалось выше, исследование Кольрауша, которое в то время было основным по этому вопросу после экспериментов Вертгейма 1844 г. и которое было включено в статью Кельвина (Kelvin [1880, 1]) в *Британской энциклопедии* в 1880 г., в существенных чертах повторило при различных температурах окружающей среды эксперимент Кулона (Coulomb [1784, 1]) с крутильным маятником, осуществленный девяносто шестью годами раньше.

Кольрауш и Лоомис, подобно Кулону, определяли частоту крутильных колебаний проволоки, к которой был прикреплен цилиндрический груз. Зеркало, прикрепленное к грузу, давало им возможность проводить свои измерения. Они сравнивали результаты, проведя эксперименты сначала при комнатной температуре, а потом при 100°С, нагревая ту же камеру водяным паром. После нагревания камеры они сначала прерывали подачу пара, окружающего маятник, а затем измеряли период колебаний и температуру при постепенном охлаждении образца. Температура измерялась при помощи трех термометров, расположенных в различных местах камеры. Отставание показаний термометра относительно температуры камеры и последней относительно температуры тонкой проволоки было предметом специального исследования Гротриана, которое не обсуждалось. Кольрауш и Лоомис сделали несколько измерений при 0°С, используя лед. Чтобы избежать остаточного изменения упругих свойств вследствие отжига, они циклически нагревали образец несколько раз, изменяя его температуру между комнатной температурой и 100°С, прежде чем начинать непосредственно сам опыт. Все три твердых тела первоначально представляли собой жесткую проволоку диаметром от 0,2 до 0,3 мм. Кольрауш и Лоомис характеризовали материал медной проволоки как «чистую электролитически осажденную медь», а железной и латунной — как техническую проволоку.

Наблюденные отличия в значениях модуля упругости при кручении в процентах, которые были определены путем использования найденных частот колебаний, составляли: для железа 4,6%, для меди 5,5% и для латуни 5,6%, что соответствует наблюдаемому уменьшению значений модуля при сравнении измерений при 0 и 100°С. Измерения во всем промежутке между этими температурами

были проделаны с целью установления следующих эмпирических зависимостей для указанных металлов:

$$\begin{aligned} &\text{Железо:} \quad \mu = \mu_0 (1 - 0{,}000447T - 0{,}00000012T^2), \\ &\text{Медь:} \quad \mu = \mu_0 (1 - 0{,}000520T - 0{,}00000028T^2), \\ &\text{Латунь:} \quad \mu = \mu_0 (1 - 0{,}000428T - 0{,}00000136T^2). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Кольрауш указал, что при сравнении поведения модуля упругости при сдвиге железа с поведением модуля меди и латуни не было обнаружено ничего специфического. Он не мог полностью отбросить идею, что различие между результатами его собственных экспериментов и экспериментов Вертгейма объяснялось изменением объема, которое имеет место в одноосных опытах. Как отмечал Кольрауш в начале своей статьи, Вертгейм действительно не претендовал на высокую точность в своих исследованиях изменения E с температурой; Вертгейм был удовлетворен тем, что впервые продемонстрировал сам факт изменения модулей упругости с температурой. В заключение Кольрауш не использовал возможность сравнить свои экспериментальные значения для железа, меди и латуни с результатами измерений Купфера (Kupffer [1852, 1]), которые тот проделал восемнадцатью годами раньше, на том основании, что экспериментальные исследования Купфера, по его мнению, были проведены недостаточно глубоко, чтобы такое сравнение могло быть сделано [1]).

Использование Корню (Cornu [1869, 1]) в 1869 г. интерференционной оптики не стимулировало в последующие тридцать лет широкого использования этого метода экспериментаторами, интересующимися измерением деформаций. В 1899 г. Константин Рудольф Штраубель в физическом институте университета Йены и Г. А. Шекспир в Тринити Колледж (Кембридж), независимо друг от друга, снова ввели технику оптической интерференции для изучения де-

---

[1]) Такой комментарий к работе Купфера был приведен наряду с утверждением, что это было единственное другое экспериментальное исследование температурной зависимости модуля кручения, которое существовало к 1870 г. В свете его последующих критических замечаний, упоминание Кольраушем того, что за эту работу Купфер был награжден специальной премией Научного общества в 1855 г., можно расценивать как легкую иронию. Поскольку Кельвин был досконально знаком с работой Кольрауша и Лоомиса, описав их результаты во всех подробностях в 1880 г. в Эициклопедии, это пренебрежительное отношение Кольрауша к работе Купфера могло способствовать исключению Кельвином работы Купфера из его замечательной статьи, впервые опубликованной в 1878 г. Замечание Кольрауша о том, что работа Купфера не была проделана достаточно глубоко, находится в разительном контрасте с заявлением Пирсоиа в 1886 г.:

«Эксперименты были бесспорно сделаны с огромной точностью и подтвердили Купферов закон уменьшения» ([1886, 1] т. 1, стр. 754), или с утверждением Тимошенко в 1953 г.:

«Купфер исследовал вопрос о влиянии температуры на модули упругости с огромной тщательностью и представил работу на эту тему в Русскую Академию Наук в 1852 г.» ([1953, 1], стр. 221).

формации твердых тел [1]). Как мы видели, эксперименты Штраубеля, по существу, были повторением экспериментов Корню на большем числе стеклянных образцов. Шекспир же, с другой стороны, интересовался температурной зависимостью E и в особенности аномалией Вертгейма в железе [2]).

Шекспир ссылался на серии неудачных экспериментов по кручению металлических стержней, таких, как показанные на рис. 3.101,*а*. Ему не удалось при нагружении сохранить соосность с достаточной точностью, чтобы удержать интерференционные полосы от выбегания из поля зрения оптической системы. Он добился большего успеха, используя устройство, изображенное на рис. 3.101, *в*, где образец состоял из трех проволок, симметрично прикрепленных к двум круглым латунным пластинкам. С помощью опорного стержня, сделанного из того же материала, что и исследуемые стержни, он установил оптический аппарат на линии центров параллельных пластин, как показано на рис. 3.101, *а*. Как это видно на рис. 3.101, *в*, он обеспечил регулирование оптической системы.

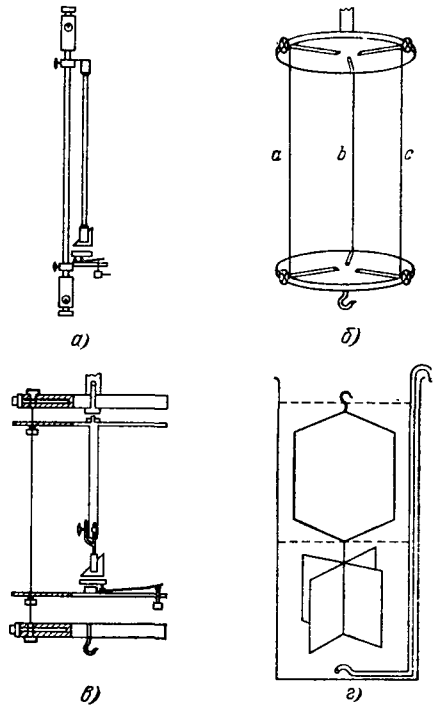


Рис. 3.101. Опыты Шекспира (1899). Схема оптического аппарата, показывающая способ получения интерференционных колец с помощью: *а*) опертых на стержень параллельных пластин; *б*) трехпроволочной системы. На *в*) и *г*) изображены соответственно начальная выверка оптической системы и приложение нагрузки при помощи выливания воды из контейнера.

Из-за необходимости подсчета большего числа интерференционных полос в течение процесса деформирования Шекспиру приходилось нагружать образец очень медленно, сводя к минимуму малые

---

[1]) В то время, как Штраубель (Straubel [1899, 1]) цитировал работу Корню, сделанную тридцатью годами раньше (Штраубель сознавал, что модифицировал и улучшил технику измерения, основанную на экспериментах Корню), Шекспир (Shakespear [1899, 1]) не ссылается ни на ранние работы, ни на использование Кантоне (Cantone [1888, 1]) оптической интерференции для измерения деформации, которую тот применил одиннадцатью годами раньше работы Шекспира.

[2]) Герберт Томлинсон (Tumlinson [1883, 1]) шестнадцатью годами ранее уже показал, что аномалия Вертгейма в железе и стали представляла собой явление остаточного отжига, возникающего при первом нагреве до 100°С.

вибрации, вызванные приложением нагрузки. Частично он добился этой цели, переместив установку на фундамент Кавендишской лаборатории и используя систему нагружения, показанную схематично на рис. 3.101, *г*. С помощью крюка он подвесил к нижней пластине груз цилиндрической формы с коническими окончаниями со стороны оснований. Сперва он наполнил контейнер водой до уровня, показанного на рис. 3.101, *г* верхней штриховой линией. Для того чтобы приложить нагрузку к системе, он отливал воду с помощью указанного сифона до достижения нагрузкой максимального значения, одинакового в каждом испытании, горизонт воды при этом снижался до уровня, отмеченного нижней штриховой линией на рис. 3.101, *г*. Он ввел лопасти для уменьшения подвижности цилиндрического груза. Главные трудности Шекспира заключались в необходимости минимизировать эффекты вибрации [1]) и изменения температуры.

Шекспир расширил задачу своего исследования, включив исследование температурной зависимости E для латуни, мягкого железа, стали и твердой латуни в температурной области от 0 до 100°С, увеличив точность измерения величин на один или два порядка по сравнению с точностью, которая была достигнута в предыдущих исследованиях. После попыток использовать несколько оказавшихся неудачными методов нагревания образцов он в конечном итоге остановился на нагревании кипящей водой, содержащейся в окружающем образец кожухе. Его статья содержит длинные описания многочисленных проблем, которые возникали при попытке провести точные интерференционные измерения перемещений вопреки возмущениям, вызываемым кипящей водой. Он частично решил эту проблему путем добавления в воду пемзы.

Первая серия экспериментов состояла в исследовании модулей упругости трех образцов из «медной специальным образом прямотянутой проволоки диаметром 1/8 дюйма», которые нагружались различными начальными весами, начиная с первого в 2,791 гс и с последующими добавлениями 2 кгс. Эта нагрузка определялась очень точно «на больших весах профессора Пойнтинга, которые были любезно предоставлены им в мое распоряжение», с использованием верхнего и нижнего уровня воды, показанных на рис. 3.101, *г*. Шекспир обнаружил, что в опытах с увеличивающейся нагрузкой модуль рос линейно, начиная со значения $8{,}24 \cdot 10^{11}$ дин/см^2 при нагрузке, равной 2,791 гс до максимального значения $1{,}053 \cdot 10^{12}$ дин/см^2, после чего оставался постоянным. Когда нагрузка снималась, экспериментальная кривая возвращалась в первоначальную точку. Шекспир указал на это странное поведение как на возможное объяснение обнаруженного Вертгеймом различия в значениях модуля, определенных различными методами.

По моему мнению, экспериментальные условия, рассмотренные

[1]) Например, все измерения приходилось проводить в тишине ночи.

Шекспиром, должны быть тщательным образом проверены. Отдавая себе отчет в существовании проблемы, связанной с отжигом образцов в процессе исследования температурной зависимости модуля, Шекспир циклически изменял температуру своих образцов большое число раз в дипазоне от 13 до 100°С с целью получить процент уменьшения модуля при каждом цикле. В этих опытах ему пришлось рассматривать примерно 300 интерференционных полос, чтобы можно было сравнить значения модуля при каждом из двух экстремальных значений температуры и одинаковой нагрузке. Два наблюдения Шекспира особенно существенны и фактически могут пролить дополнительный свет на природу аномалии Вертгейма в железе. Во-первых, не только для мягкого железа, но и для меди, твердой латуни и стали начальное нагружение образца в каждом случае приводит к процентному увеличению модуля, когда температура изменяется от 13 до 100°С. Во-вторых, во всех последующих

Таблица 101

Шекспир (1899)

Температура		Процентное различие значений модуля	Температура		Процентное различие значений модуля
13°С	100°С		13°С	100°С	
317,0	303,0 (1-е нагревание)	—4,4	278,0	287,5 (6-е нагревание)	+3,4
291,8	298,5 (2-е нагревание)	+2,3	278,5	289,0 (7-е нагреваиие)	+3,8
287,5	296,4 (3-е нагревание)	+3,1	279,0	289,0 (8-е иагреванне)	+3,6
283,0	293,7 (4-е нагревание)	+3,8	279,0	289,0 (9-е нагревание)	+3,6
279,2	289,4 (5-е нагревание)	+3,7	279,0	По окончательном охлаждении	

циклах наблюдалось уменьшение модуля подобно тому, как показано в табл. 101 для меди; после четвертого или пятого цикла процентное уменьшение модулей было постоянным. Шекспир писал:

«Почтн во всех случаях, после каких-либо изменений температуры или после отдыха (скажем в течение любого промежутка времени более получаса), первое наблюдеиие серин показывало значение удлинеиия, отличающееся от значений, обнаруживаемых прн последующих наблюдениях той же серии; первое удлнннеиие в общем случае оказывалось больше всех последующих» (Shakespear [1899, 1] стр. 551).

Помещая нагруженные образцы в поле высокой или низкой температуры на различные промежутки времени, Шекспир провел большое число измерений, касающихся аспектов памяти материалов, получив результаты, которые показали наличие существенных изменений за последующие интервалы времени. В остальных экспериментах Шекспир рассматривал другой аспект работы Вертгейма

1844 г., а именно, эффект влияния магнитного поля на модуль упругости мягкого железа.

Тот факт, что модули упругости не обязательно уменьшаются с ростом температуры, как было указано Вертгеймом, можно видеть из исследований Фрэнка Хортона 1905 г. (Horton [1905, 1]), посвященных изменению «модуля крутильной жесткости» кварцевых волокон в области температур от 20 до 1000°С. Повторяя эксперименты с крутильным маятником Кулона 120-летней давности (1784 г.) с кварцевыми волокнами диаметром 0,001 см, которые использовались с той же целью, что и в опытах Кулона, поскольку «они являются почти универсальными в качестве подвесок в крутильных установках, когда требуется высокая точность» (там же, стр. 401), Хортон добавил только две новые детали к исходным экспериментам. Во-первых, частоты колебаний, используемые для вычисления значений модуля упругости, он определял, применяя «новый метод измерения времени путем синхронизации, предложенный профессором Пойнтингом», и, во-вторых, добился важной для эксперимента точности в 0,01% при определении радиуса волокна, прокатывая малый отрезок его между двумя тонкими стеклянными капиллярными трубками и подсчитывая число вращений, необходимых для прохождения дистанции в 5 мм.

Хортон привел результаты экспериментов для шести волокон. В отличие от металлов, полученные им значения μ отличались хорошей воспроизводимостью при переходе от одного опыта к другому и от одного образца к другому. Практически постоянное значение модуля упругости при сдвиге при 15°С составляло $3{,}001 \cdot 10^{11}$ дин/см^2. Хортон провел первые серии измерений при температурах 15, 35, 55, 75 и 100°С. В каждом случае он нашел, что μ линейно возрастает с увеличением температуры, но, в отличие от начальных значений модуля, коэффициент температурного расширения менялся от одного кварцевого образца к другому, имея среднее значение $+0{,}0001235$.

Эксперименты были распространены на температурную область от 20 до 1000°С и на более тонкие волокна, подвешенные внутри нагреваемой электрическим током платиновой трубки, температура которой могла удерживаться на любом требуемом уровне. Хортон провел измерения через 250°С в этом интервале с помощью платиновой и родиево-платиновой термопары. Он нашел, что модуль упругости при сдвиге волокна возрастает с ростом температуры сперва линейно, а затем, когда температура поднимается еще выше, скорость роста постепенно уменьшается. Имелся максимум при температуре 880°С. Выше 880°С модуль упругости при сдвиге уменьшался очень быстро с увеличением температуры.

Снова, и еще в одном твердом теле можно видеть наличие аномалии Вертгейма увеличения модулей, которая наводит на мысль, что температурная зависимость модулей является иногда более сложной, чем это представляли себе Вертгейм и его последователи.

Хортон также исследовал внутреннюю вязкость волокон, наблюдая затухания крутильных колебаний, и обнаружил, что вязкость возрастает с увеличением температуры со скоростью, которая вначале была небольшой и постоянной, но, начиная примерно с 650°C, становилась значительно большей. «При 1060°C внутреннее трение волокон стало столь большим, что крутильные колебания были весьма вялыми» (там же, стр. 402).

В 1895 г. Мэри Хилтон Нойес заинтересовалась аномалией Вертгейма в температурной зависимости E для железа и стали, а также тем фактом, что такая аномалия не наблюдалась кем-либо из последующих экспериментаторов, которые изучали это явление[1]). Обсуждая результаты Вертгейма, Нойес утверждала:

«Он был столь тщательным экспериментатором, а наблюдаемое им увеличение модулей было столь значительным, что казалось невероятным допустить, что оно связано с ошибкой. Одной из целей настоящего исследования было установить, могут ли быть обнаружены какие-либо указания на существование максимума в значениях модуля между 100 и 200°C.

Многие из тех, кто экспериментально исследовал этот вопрос, использовали только несколько температур и лишь немногие вышли за пределы температуры в 100°C. Имелся также существенный разброс в результатах. Представляется желательным получить значения модуля для серии температур, возрастающих почти до 200°C, и осуществить изменения температуры таким методом, который прежде не использовали при исследовании проблемы» (Noyes [1895, 1] стр. 277).

Эксперименты Нойес проводились с проволочными образцами, имевшими длину примерно 90 см. Особый интерес в ее исследованиях представляло то обстоятельство, что она применила два разных способа нагрева образцов. При первом способе горизонтально расположенная проволока, один из концов которой огибал большое колесо, так что можно было прикладывать вертикально действующие грузы, была помещена внутри стеклянной трубки, вокруг которой была нагревающая обмотка, создающая нужную температуру. При втором способе образец нагревался путем прямого прохождения электрического тока. Разумеется, оба типа экспериментов были проделаны Вертгеймом пятьюдесятью годами раньше, и, стало быть, интересно узнать, что за «метод, не применявшийся ранее», упоминала Нойес.

После предварительной серии опытов по определению коэффициента линейного расширения, Нойес получила значение E при различных температурах, нагружая образцы грузом 0,4 кгс. Она выразила большое удивление по поводу результатов экспериментов. Значение модуля E для проволоки, нагреваемой внешней обмоткой, уменьшалось линейно с увеличением температуры, и, когда она сравнила средние значения из всех десяти опытов с каждым значением из отдельного опыта, обнаружилась блестящая воспроиз-

---

[1]) Как я уже отмечал выше при обзоре исследований Шекспира, Томлинсон (Thomlinson [1883, 1]) установил факт аномалии Вертгейма в железе и стали более чем десятью годами раньше, но даже ссылок на его широко известные исследования не имелось ни в статьях Шекспира, ни в статьях Нойес.

водимость. Однако для образцов, нагреваемых электрическим током, проходящим через проволоку, модуль E испытывал небольшое увеличение, сменявшееся небольшим уменьшением после достижения максимального значения. В целом же результат состоял в том, что модуль, по существу, оставался постоянным в области изменения температуры, исследовавшейся и в первом типе экспериментов.

Не будучи в состоянии принять этот странный результат, Нойес в следующем году повторила работу, проводя новые серии из десяти экспериментов (Noyes [1896, 1]), в которых она пересмотрела метод нагружения образца и увеличила максимум нагрузки от 0,4 до 1 кгс. Она получила результат, показанный на рис. 3.102 для проволоки, которая была быстро нагрета обмоткой до проведения измерений. В этом случае она не увидела аномалии в зависимости значения модуля от уровня температуры ни в одном из двух типов эксперимента. Таким образом, во втором исследовании Нойес [1]) не только установила, что аномалия Вертгейма не обнаружена в образцах из железной проволоки, которые она исследовала, но также выяснила, что при обоих способах нагревания получается одинаковое линейное уменьшение E; т. е. присутствие электрического тока не производит иных изменений E, кроме вызванных увеличением температуры образца, происходящего под воздействием тока.

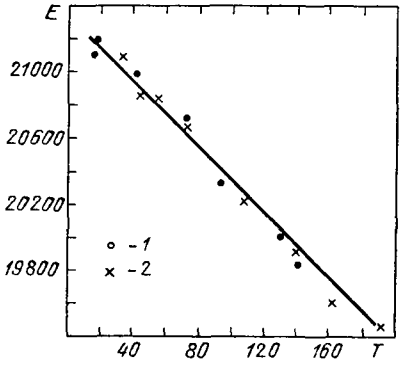


Рис. 3.102. Опыты Нойес (1896): изменение модуля E в зависимости от температуры при двух различных методах нагревания образцов. *1* — ток в обмотке, *2* — ток в проволоке; T — температура в °C, E — модуль упругости в кгс/мм².

В 1906 г. Генри Уокер, очень сильно пораженный замеченной разницей в температурной зависимости модулей, которая была описана в первой статье Нойес, и еще не увидев ее второй статьи, повторил эти эксперименты на тщательно воспроизводимой копии ее установки для случая, в котором проволока внутри стеклянной трубки нагревалась путем непосредственного прохождения в ней электрического тока (Walker [1907, 1]). Уокер исследовал сталь, мягкое железо, медь и платину. Для определения удлинений проволоки почти метровой длины он использовал микроскоп. В каждом случае при приложении малой нагрузки (а именно 0,5 кгс для железа) значение E после начального незначительного уменьшения [2])

[1]) Эта вторая статья была диссертационной работой Мэри Чилтон Нойес на соискание ученой степени доктора философии (Корнуэльский университет, 1896 г.).

[2]) Уокер, таким образом, увидел ту же аномалию поведения, что была обнаружена Вертгеймом (Wertheim [1844, 1]).

возрастало до довольно больших значений, затем переходило через упомянутый максимум, который сменялся эквивалентным уменьшением. Температура, при которой наблюдался максимум, в каждом случае была несколько меньше чем 100°С. Как и в эксперименте Нойес, когда образец нагревался в том же температурном диапазоне от 15°С до значения немногим меньше 200°С обычным путем, без прохождения тока, значение E уменьшалось линейно.

После опубликования этих результатов, которые явились более определенным и тщательным исследованием поведения проволочных образцов, описанного в первой статье Нойес, Уокер узнал, что в своей второй статье Нойес, на основании экспериментов, отвергла свои предыдущие результаты. Он усмотрел главное различие в двух ее исследованиях в уровне приложенной нагрузки и наметил экспериментальную программу, реализация которой вскоре показала, что поведение значения модуля, состоящее в возрастании его до некоторого максимума, имея сходство с аномалией Вертгейма для железа при нагревании в печи, является функцией уровня приложенной нагрузки. По мере возрастания нагрузки зависимость модулей от температуры приближалась к линейной и в конце концов становилась такой, как при обычном нагревании. Уокер исследовал эту зависимость значения модуля в обоих случаях, когда температура увеличивалась и когда она уменьшалась. Он отметил некоторое различие в значении и расположении максимума для двух частей температурного цикла. Он опубликовал эти первые результаты, полученные в 1907 г. для железа, стали, меди и платины (Walker [1907, 1], [1908, 1]); Уокер расширил и уточнил их в 1910 г. (Walker [1911, 1]), добавив исследования для кобальта и никеля. Указанная зависимость экспериментально определенного значения модуля от уровня приложенной нагрузки в присутствии электрического тока в образцах не ограничивалась магнитными материалами, но в различной степени существовала у всех изученных им шести металлов.

Для того чтобы произвести дальнейшее исследование зависимости значения модуля от уровня нагрузки в присутствии электрического поля, Уокер провел серии дополнительных экспериментов с каждым из нескольких металлов. Он сохранял значение силы тока постоянным и определял E при многих нагрузках вплоть до достижения предела упругости материала. Он вновь обнаружил, что значения модуля проходят через максимум в области низких напряжений, уменьшаясь при последующем увеличении напряжений, согласуясь с температурными измерениями при постоянной нагрузке.

Три статьи Уокера (Walker [1907, 1], [1908, 1], [1911, 1]) содержали значительное количество данных и включали подробности, относящиеся к размагничиванию железа, стали, никеля, а также к созданию предварительного напряжения и предварительного нагрева всех рассмотренных твердых тел с целью минимизировать или устранить дальнейший отжиг или создание малой остаточной

деформации в течение реального эксперимента. Поскольку для стали, железа, меди, платины, кобальта и никеля было обнаружено, по существу, одинаковое поведение, здесь в качестве характерного примера показаны результаты только для кобальта и меди. При различных постоянных нагрузках изменялась температура посредством электрического тока и результаты сравнивались (рис. 3.103) со значениями тех же величин, полученными при обычном нагревании образцов из кобальта. Рис. 3.104 показывает результаты экспериментов с теми же материалами, в которых модуль определялся

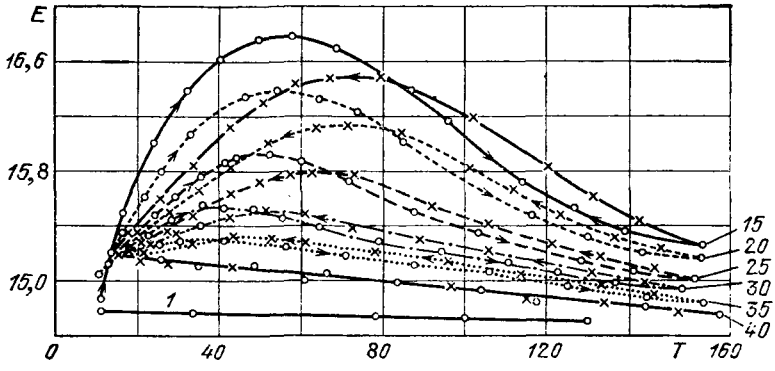


Рис. 3.103. Опыты Уокера (1911): изменение модуля E кобальта в зависимости от температуры при нагревании электрическим током в сравнении с зависимостью при обычном нагревании. *1* — обыкновенное нагревание; T — температура в °C, E — модуль упругости в тс/мм². Справа около кривых указаны значения нагрузки в кгс.

как функция значения нагрузки при фиксированной напряженности H электрического поля. Во всех своих экспериментах Уокер испытывал кобальтовые образцы в форме тонких полос, но не в виде проволоки. Аналогичные результаты для немагнитной медной проволоки показаны на рис. 3.105.

Следует указать, что объяснение Томлинсоном аномального поведения железа, которое Вертгейм наблюдал при обычном нагревании, нельзя распространить на эффекты, обнаруженные Вертгеймом, Нойес и Уокером при нагревании электрическим током, проходящим через образец.

Уокер, подобно Шекспиру до него (и, как я отмечал, подобно Томлинсону шестнадцатью годами до Шекспира), заметил, что значение модуля, определенное при первом температурном цикле, отличается от найденного при втором цикле и аналогично при последующих циклах в порядке возрастания величины. Интересное поведение образцов, наблюденное Уокером, продемонстрировало, что нелинейная зависимость напряжения от деформации при малых деформациях может изменяться в присутствии электрическо-

го поля различной напряженности [1]). Трудно понять, почему это открытие, а также открытие наличия максимума у функциональной зависимости модуля от напряжения при «аномальном поведении» не стимулировали дальнейших исследований этой проблемы в течение последующих шести десятилетий.

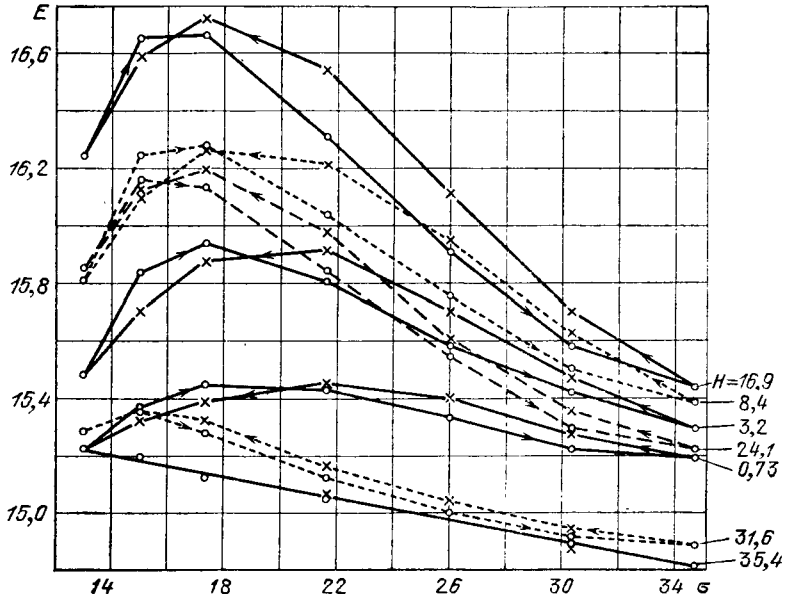


Рис. 3.104. Опыты Уокера 1911): модуль E кобальта как фуикция механических напряжений в кгс/см² при различных фиксированных напряжениях H электрического поля; σ — напряжение в кгс/мм², E — модуль упругости в тс/мм².

Как мы видели в гл. II (раздел 2.25), когда касались вопроса о нелинейности зависимости между напряжением и деформацией при малых деформациях металлов в непосредственной близости к нулевому значению напряжения, и в настоящей главе, когда касались непосредственного определения коэффициента Пуассона при помощи интерферометрии, работа Грюнайзена, подобно работе Вертгейма, была очень важной в развитии механики твердого деформируемого тела. Грюнайзен отличался необычной способностью зада-

[1]) Насколько мне известно, серьезное исследование этого электроупругого поведения с точки зрения напряжений не проделывалось с 1910 г. В частности за прошедшие два десятилетия упор был сделан в основном на ультразвуковые методы, при которых исследование влияния имеющих место магнитных полей на соответствующие металлы ограничивалось чрезвычайно малыми амплитудами деформаций. (Соответствующие ранее выполненные исследования изгибных колебаний также были ограничены малыми деформациями.) Следовательно, функциональная зависимость поведения от напряжений исключалась самой природой эксперимента.

вать фундаментальные вопросы и ставить эксперименты, имеющие непосредственное к ним отношение. Эта его способность отчетливо видна в экспериментальных исследованиях влияния температуры на сжимаемость твердых тел. В этих экспериментах он использовал «метод Мэллока», описанный выше в разделе 3.30. Исследование, результаты которого были опубликованы в статье 1910 г. (Grüneisen [1910, 3]), было связано с ростом его интереса к постоянству отношения коэффициента линейного теплового расширения α к удельной теплоемкости c_p, т. е. α/c_p, а также к постоянству отношения

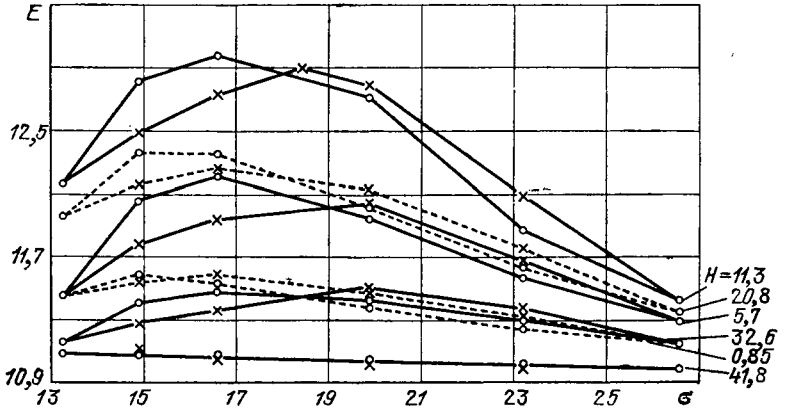


Рис. 3.105. Опыты Уокера (1911): модуль E меди (немагнитного материала) как функция механических напряжений в кгс/мм² при различных фиксированных напряжениях H электрического поля; σ — напряжение в кгс/мм², E — модуль упругости в тс/мм².

коэффициента теплового объемного расширения β к удельной теплоемкости ($\beta/c_p = \text{const}$). В частности, его интересовало сравнение экспериментальной температурной зависимости коэффициента объемного расширения с экспоненциальной зависимостью, предложенной в 1908 г. Максом Фердинандом Тиизеном (Thiesen [1908, 1]), и с экспоненциальной формулой Тиизена для зависимости удельной теплоемкости от температуры. Эти зависимости имеют вид

$$c_p = \varepsilon A T^{\varepsilon} \tag{3.16}$$

и

$$\beta = -\frac{dA}{dp} T^{\varepsilon}, \tag{3.17}$$

где T означает абсолютную температуру, ε дается формулой

$$\varepsilon = \frac{1}{B} \frac{dA}{dp}. \tag{3.18}$$

Тиизен установил, что уравнениями (3.16) и (3.17) описывается поведение платины при $\varepsilon = 0{,}18$. Позднее, после более критической проверки полученных данных, он пришел к заключению, что при

возрастании температуры коэффициент объемного расширения возрастает значительно быстрее, чем удельная теплоемкость, так что β/c_p не сохраняет постоянного значения с изменением температуры и формулы (3.16) и (3.17) не могут быть использованы при одинаковом значении ε.

Грюнайзен (Grüneisen [1910, 1, 2]) в 1910 г. исследовал Al, Fe, Ni, Cu, Pd, Ag, Ir и Pt. Он произвел определение коэффициентов расширения в диапазоне температур от —190 до 100°C и сравнил их значения с полученными большим числом других экспериментаторов, включая Карла Франца Фредерика Христиана Шееля (Scheel [1907, 1]), Шееля и Вильгельма Хейзе (Scheel and Heuse [1907, 1]), Фритца Хеннинга (Hennig [1907, 1]) и Людвига Холборна и Зигфрида Валентинера (Holborn und Valentiner [1907, 1]). Грюнайзен также провел эксперименты для изучения температурной зависимости коэффициентов расширения Mg, Zn, Cd, Sb, Ir, Au, Pb и Bi между —183 и +100°C. После обсуждения особого поведения цинка, кадмия и олова, данные о которых он сравнил с данными, полученными ранее Фохтом [1]), Грюнайзен пришел к заключению, что экспоненциальная формула Тиизена действительно пригодна для описания коэффициентов температурного расширения как функций температуры. Он заметил также, что коэффициенты в экспоненциальной формуле зависят от температуры плавления. Представляя данные эксперимента на плоскости Δl—T/T_m, где T — температура опыта, T_m — температура плавления (T и T_m — в градусах Кельвина), а Δl — абсолютное удлинение стержня при изменении температуры от 0 K до T K, Грюнайзен установил формулу

$$\Delta l = \mathcal{U}\left(\frac{T}{T_m}\right)^{1+\varepsilon}. \tag{3.19}$$

Здесь $\mathcal{U}=VT_m^{1+\varepsilon}$ — постоянная металла; Грюнайзен табулировал численные значения этой постоянной. Его результаты представлены на рис. 3.106, где сплошные линии указывают ту область, в которой (для построения этих линий) были взяты действительные (экспериментальные) данные, а штриховая линия — экстраполяция при помощи экспоненциальной формулы. Грюнайзен показал исследованную им зависимость до температуры плавления.

Во второй статье 1910 г. Грюнайзен (Grüneisen [1910, 2]) рассмотрел зависимость удельной теплоемкости от температуры. Он приходит к заключению, что в температурной области от —190 до 100°C удельная теплоемкость и коэффициент расширения имеют почти одинаковую зависимость от температуры, и, таким образом, отношение α/c_p постоянно во всей рассматриваемой температурной области, а экспоненциальная формула Тиизена соответствует фактам.

---

[1]) Voigt [1910, 1]. Данный том содержит ссылки на работы Фохта с 1870 г.

В той же статье, в частности, посвященной постоянным упругости, Грюнайзен поднимает вопрос, который возбуждает интерес к его работе и в настоящее время. Он хотел знать, является ли отношение $\alpha/c_p = \text{const}$ не зависящим от давления и является ли эта постоянная, а также формула Тиизена, которые находились в хорошем согласии с экспериментами при комнатном давлении, применимыми также и при более высоком давлении, при том же или ином значении постоянной ε. С этой целью Грюнайзен продолжил опыты по определению сжимаемости твердых тел как функции температуры, используя

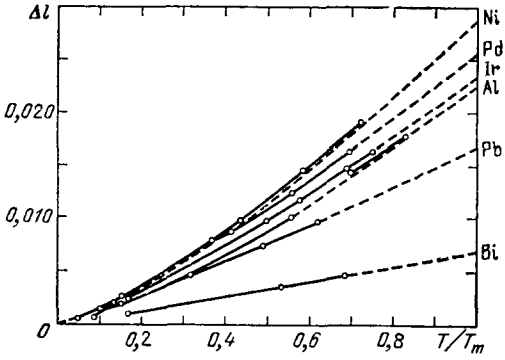


Рис. 3.106. Опыты Грюнайзена (1910): графики зависимости удлинения от сходственной (гомологической) температуры для различных указанных на рисунке металлов; T — температура металла, T_m — температура плавления металла, Δl — удлинение.

Таблица 102

Грюнайзен (1910)

Алюминий				
t	—191	15	125	
$\chi \cdot 10^6$	1,32	1,46	[1,70 (1,90)]	
Железо 1				
t	—190	18	128	165
$\chi \cdot 10^6$	0,606	0,633	0,664	0,675
Медь				
t	—191	17,5	133	165
$\chi \cdot 10^6$	0,718	0,773	0,815	0,828
Серебро				
t	—191	16	134	166
$\chi \cdot 10^6$	0,709	0,763	[0,835 (0,853)]	[0,862 (0,889)]
Олово				
t	—190	15,2		
$\chi \cdot 10^6$	2,1	[(3,1)]		
Платина				
t	—189	16,8	133	164
$\chi \cdot 10^6$	0,374	0,392	0,401	0,404
Свинец				
t	—191	14,2		
$\chi \cdot 10^6$	[(2,5)]	[(3,2)]		

Температура t дана в градусах Цельсия.
Значения $\chi \cdot 10^6$ даны в см²/кгс.

метод Мэллока, модифицированный таким образом, чтобы можно было проводить измерения при разных значениях окружающей температуры. Это экспериментальное исследование, которое во всех деталях описано в третьей статье Грюнайзена (Grüneisen [1910, 3]) в 1910 г., вело к общему рассмотрению необходимых условий для применимости линейной теории упругости изотропного твердого тела при автономном установлении зависимости от температуры модуля упругости при сдвиге μ, E-модуля, модуля изменения объема K и коэффициента Пуассона ν. К 1910 г. температурная зависимость E, μ и ν была изучена несколькими экспериментаторами, но Грюнайзен был первым, кто включил в эти исследования эксперименты по изучению влияния сжимаемости и кто добился достаточной точности, чтобы сделать из этих экспериментов осмысленные заключения применительно к изотропному телу.

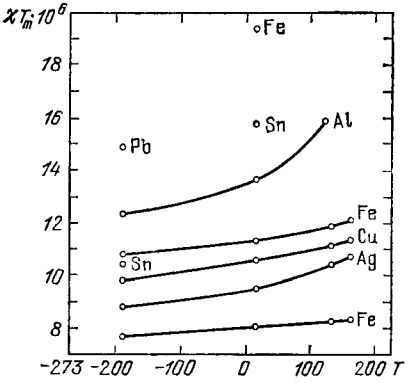


Рис. 3.107. Опыты Грюнайзена (1910): сводный график зависимости произведения сжимаемости (χ) и температуры плавления (T_m) от текущего значения температуры T в °C для различных металлов, указанных на рисунке. Цена деления на оси ординат 10^6.

Подробности использования Грюнайзеном метода Мэллока для определения сжимаемости при комнатной температуре были приведены выше, вместе со сравнением с другими модулями в терминах формул для изотропных твердых тел, связывающих все эти величины. Полученные с использованием указанного метода экспериментальные значения сжимаемости в области температур от —191 до 166°C для алюминия, железа, меди, серебра, олова, платины и свинца даны в табл. 102, где скобки означают данные без вычета упругого последействия.

Грюнайзен заключил в квадратные скобки те значения, которые, как он думал, были слишком велики главным образом из-за остаточного течения; он заключил в круглые скобки те величины, которые, по его мнению, были слишком велики вследствие упругого последействия. Будучи одним из первых экспериментаторов, осознававших, что при сравнении параметров деформирования твердых тел должна быть введена температура плавления T_m для металлов, Грюнайзен составил график зависимости произведения сжимаемости χ и температуры плавления T_m от температуры опыта T, как показано на рис. 3.107. Легко видеть, что это произведение зависит от температуры нелинейно. Можно заметить далее, что для заданной температуры произведение $\chi \cdot T_m$ обратно пропорционально температуре плавления твердого тела.

Определив зависимость сжимаемости от температуры, Грюнайзен понял, что теперь можно поставить фундаментальный вопрос линейной теории упругости, сравнив температурную зависимость коэффициента сжимаемости с температурными зависимостями E, μ и ν, установленными в предшествующих экспериментах.

Элементарные соображения подсказывают, что в соответствии с зависимостями

$$1+\nu=\frac{E}{2\mu}, \tag{3.20}$$

$$\chi=\frac{1}{K}=\frac{3(1-2\nu)}{E} \tag{3.21}$$

значения коэффициента Пуассона, найденные из уравнения (3.20) и (3.21) при использовании экспериментально определенных значений соответственно E и μ, также E и K, при любой температуре должны быть одинаковыми, но зависящими от температуры. Вводя четыре температурных коэффициента k_i, а именно,

$$k_\chi=\frac{1}{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad k_E=-\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial t}, \quad k_\mu=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}, \quad k_\nu=\frac{1}{\nu}\frac{\partial\nu}{\partial t}, \tag{3.22}$$

где t — температура, можно получить два условия

$$k_\chi=k_E-\frac{3K}{\mu}(k_\mu-k_E) \tag{3.23}$$

и

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial\nu}{\partial t}=\frac{1+\nu}{\nu}(k_\mu-k_E)=\frac{1+\nu}{\nu}\frac{\mu}{3K}(k_\mu-k_\chi). \tag{3.24}$$

На основе своих собственных опытов при комнатной температуре Грюнайзен определил все четыре упругие постоянные, из которых независимыми для изотропного тела являются только две, и табулировал значения коэффициентов, входящих в зависимости (3.23) и (3.24) (табл. 103).

Таблица 103

Грюнайзен (1910)

	$\frac{1+\nu}{\nu}$	$\frac{3K}{\mu}$	$\frac{1+\nu}{\nu}\cdot\frac{\mu}{3K}$		$\frac{1+\nu}{\nu}$	$\frac{3K}{\mu}$	$\frac{1+\nu}{\nu}\cdot\frac{\mu}{3K}$
Al	3,94	8,2	0,48	Sn	4,03	7,8	0,52
Fe	4,57	6,0	0,76	Pt	3,56	12,2	0,29
Cu	3,86	8,8	0,44	Pb	3,22	26,7	0,12
Ag	3,63	11,4	0,32				

Анализируя свои данные, Грюнайзен заметил, что во всех рассматривавшихся им случаях сжимаемость росла с увеличением температуры и что по данным Бока (Bock [1894, 1]), которые я

описал выше в разделе 3.25, коэффициент Пуассона или не зависел от температуры, как в случае железа, или был слегка возрастающей функцией температуры, как в случае других металлов, исследовавшихся Боком. Из зависимостей (3.23) и (3.24) и численных значений, помещенных в табл. 103, Грюнайзен установил систему условий, которым должны удовлетворять температурные коэффициенты в изотропной инфинитезимальной линейной теории упругости. Они имеют вид

(1) $k_\mu > k_E > k_\chi$, в предельном случае $k_\mu = k_E = k_\chi$;

(2) значение величины $k_\mu - k_E$ является лишь малой долей (между 1/6 и 1/12) от $k_E - k_\chi$, и, таким образом, еще меньшей частью коэффициента k_E;

(3) температурный коэффициент k_ν примерно в четыре раза больше, чем разность $k_\mu - k_E$, и составляет только $\left(\frac{1+\nu}{\nu}\frac{\mu}{3K}\right)$-ю часть разности $k_E - k_\chi$, т. е. значение k_ν составляет часть от k_E большую, чем от разности $k_\mu - k_E$.

Коэффициенты, приведенные в табл. 103, соответствуют комнатной температуре. Грюнайзен не обсуждал, приложимы ли они ко всей области температур, в которой он определял коэффициенты, не ставил он также возможно более фундаментальный вопрос о том, что привело его к мысли применять полученные соотношения для изотропных твердых тел при комнатной температуре и не применять при других температурах в рассматриваемой им области.

Согласно данным о зависимости упругих постоянных от температуры, имевшимся к 1910 г. (данным, которые обычно представлялись в форме процентного уменьшения значений модулей между двумя частными возрастающими значениями температуры), обычно значение разности $k_\mu - k_E$ было больше, чем разрешалось условием (2), в особенности для металлов с высокой температурой плавления типа платины или железа, поскольку для них $k_E - k_\chi$ было малым. Грюнайзен полагал, что вычисление k_ν было до некоторой степени бесполезным ввиду малости $k_\mu - k_E$. Он отметил, что экспериментальные данные, полученные Каценельсоном (Katzenelsohn, Inaug. Diss. Berlin, 1887) и Клеменсом Шефером (Schaefer [1901, 1], [1902, 1]), были больше, чем разрешалось условием (3). Например, в случае платины и железа, для которых E изменялось между 0 и 100°C на 2 и 3,5% соответственно; изменение ν в том же интервале температур должно было быть меньше, чем 0,6 и 2,6% в то время, как Каценельсон дал намного большие значения для изменения коэффициента Пуассона равные 3,07 и 3,80% соответственно. Хотя данные Бока (Bock [1894, 1]) для стали и никеля при 20 и 150°C были в согласии с требованием Грюнайзена, заключавшимся в том, что коэффициент Пуассона должен почти не зависеть от температуры, для меди и серебра увеличение ν было таким, что условие (3) нарушалось.

Вследствие особенностей имевшихся в распоряжении данных для четырех постоянных упругости и ограниченности аргументации

Грюнайзена, значение этой работы состоит в том, что в ней Грюнайзен впервые рассмотрел круг вопросов, которые в свете обнаруженных противоречий должны были стимулировать более тщательный анализ и эксперимент. Что такого анализа и экспериментов не последовало, в большой степени обусловлено тем, что в течение следующих шестидесяти лет у физиков-экспериментаторов, либо интересовавшихся анизотропией и фотоупругостью, либо определявших зависимость от температуры постоянных упругости кристаллических тел с помощью ультразвука и т. п., не возникало серьезных вопросов по поводу применимости линейной теории упругости, которая лежит в основе интерпретации экспериментальных данных.

Грюнайзену должна быть отдана честь первого со времен Вертгейма исследователя, который экспериментально определил все четыре упругие постоянные изотропных материалов E, μ, ν и K. Чтобы ие допустить слишком случайного сравнения этих ранних результатов с ультразвуковыми измерениями последних двадцати лет, следует подчеркнуть, что опыты Грюнайзена, подобно опытам Вертгейма, были проделаны при относительно больших амплитудах деформаций, вместе с тем сам Грюнайзен наряду с другими демонстрировал нелинейность и при малой деформации. Ультразвуковые измерения, выполняемые при амплитудах деформации порядка 10^{-7}, т. е. определяющие модули упругости практически при нулевых напряжениях, порождают совершенно иную проблему: при распространении волн нелинейность проявляется в изменении формы профиля волны, в состоянии установившихся вибраций нелинейность вызывает появление ультрагармоник. Однако в отношении температуры вопросы, введенные Грюнайзеном применительно к квазистатическим деформациям, также актуальны и для процесса распространения ультразвуковых волн с амплитудами, значения которых на много порядков меньше.

3.42. Сравнение значений температурных коэффициентов, полученных на основе квазистатических экспериментов и экспериментов с использованием ультразвуковых волн

При сопоставлении температурной зависимости постоянных упругости, найденной ультразвуковым методом вблизи нулевого значения напряжения, с той же зависимостью, полученной из квазистатических опытов при значительно бо́льших деформациях, корреляция может иметь, а может и не иметь места. Я выбрал для рассмотрения эксперимент Чарльза Цуккера (Zucker [1955, 1]), который в 1955 г. определил скорости продольных и сдвиговых волн в поликристаллическом алюминии 1100 F (99,0% чистоты) в температурной области от 20 до 400°C.

В торец поликристаллического стержня длиной 2 фута и диаметром 1 дюйм Цуккер вводил пакеты синусоидальных волн дли-

тельностью 5 мкс и с частотой 5 МГц через промежутки времени, равные 5 мс. Он использовал вырезанные вдоль оси x или y кварцевые кристаллы и записывал скорости продольных и поперечных волн. Поскольку при склеивании кристаллов в области высоких температур возникли трудности, он охлаждал этот конец образца в водяной ванне с температурным градиентом, доводящим температуру до постоянного значения на удаленном конце образца. Трехдюймовый продольный разрез в образце на его конце создавал начальное отражение, хронометрируя которое и сравнивая с данными хронометрирования на свободном конце, он, используя синхронизирующий осциллограф, смог определить скорости волн в области постоянной температуры. Печь длиной 18 дюймов имела область постоянной температуры длиной 4 дюйма, в ней были установлены хромоалюминиевая термопара, измеряющая температуру с точностью $\pm 1°C$. Чтобы вычислить изменение плотности в зависимости от изменения температуры, он принял начальную плотность равной 2,70 г/см^3, а коэффициент линейного расширения равным $25{,}3 \cdot 10^{-6}$ на градус Цельсия. Установленная им общая точность измерения волновой скорости составляла 2,0%.

Игнорируя неподходящий для экспериментатора в области механики сплошной среды выбор терминологии (симулирующей терминологию теории монокристалла), основанной на предполагаемом осреднении «истинных» постоянных упругости монокристалла, что является ненужной процедурой, поскольку образцы были поликристаллическими и, следовательно, эксперимент давал значения K и μ для поликристалла, если тело было статистически изотропным, мы можем продолжить сравнение результатов Цуккера при комнатной температуре с результатами Грюнайзена, использовавшего метод Мэллока, предложенный 45 годами раньше. Для двух измеряемых скоростей волн в поликристалле мы имеем [1])

$$\rho V_L^2 = K + \frac{4}{3}\mu \quad \text{и} \quad \rho V_T^2 = \mu$$

и также для изотропных тел, поскольку коэффициент Пуассона задается формулой

$$\nu = \frac{(V_L^2/V_T^2 - 2)}{2(V_L^2/V_T^2 - 1)}. \tag{3.25}$$

Отсюда, беря измеренные значения скоростей непосредственно из графика, поскольку табличные значения не были приведены, мы находим, что при 25°C значения K, μ и ν соответственно равны 7540 кгс/мм^2, 2690 кгс/мм^2 и 0,341.

Поскольку изотропия предполагалась при определении значения коэффициента Пуассона, то это же предположение при вычислении

[1]) Цуккер использовал следующие обозначения:

$$\rho V_L^2 = C_{11} \text{ и } \rho V_T^2 = C_{44}.$$

E при 25°C (по даиным Цуккера) дает $E=7220$ кгс/мм². Динамический способ экспериментального определения сжимаемости $\chi=1/K$ дает значение $1{,}33\cdot10^{-4}$ см²/кгс. Сравнивая эти значения постоянных упругости поликристаллов, определенные динамически при 25°C, с квазистатическими данными Грюнайзена, полученными при 18°C при помощи метода Мэллока в опытах с пустотелыми трубками из поликристаллического алюминия, мы видим, что Грюнайзен получил более высокую сжимаемость, равную $1{,}46\cdot10^{-4}$ см²/кгс, а экспериментально определенное значение E для трубки было равно 7330 кгс/мм². Путем непосредственного определения E и ν для алюминиевого стержня Грюнайзен получил значения 7200 кгс/мм² и 0,34 соответственно. Эти *квазистатические* модули были почти идентичны полученным Цуккером в *динамическом* опыте для стержней. Значение коэффициента Пуассона было получено Цуккером по экспериментально найденным E и μ из соотношения (3.20), которое справедливо для линеаризованной теории изотропных материалов, тогда как Грюнайзеном значение ν было получено из эксперимента непосредственно. Грюнайзен нашел коэффициент Пуассона и по опытно найденным им значениям E и μ, что дало слегка меньшее значение $\nu=0{,}32$.

Кёстер и Раушер (Köster und Rauscher [1948, 1]) в 1948 г. произвели тщательное определение значения E для алюминиевых стержней в опытах с изгибными колебаниями; их результат $E=7220$ кгс/мм² при 20°C совпадает в точности со значением, вычисленным исходя из данных Цуккера.

На протяжении последних прошедших двух десятилетий я часто определял E в поликристаллическом алюминии как квазистатически, так и путем использования измеренной волновой скорости. Мои образцы, вероятно, были подобны образцам Цуккера, поскольку и ему и мне материал был в одно и то же время поставлен в качестве подарка Американской алюминиевой корпорацией и имел одинаковую чистоту по спецификации, а образцы имели одинаковый диаметр. Из большого числа опытов [1]), проведенных при 25°C, среднее значение E для этого алюминия (который более подробно будет обсужден в разделе 3.44) было $E=7180$ кгс/мм². В качестве дальнейшей проверки этой частной группы упругих постоянных, полученных Цуккером при комнатной температуре с целью исследования зависимости их от температуры, значение модуля упругости при сдвиге $\mu=2690$ кгс/мм², полученное Цукером в опытах с применением ультразвука, можно сравнить с предсказанными на основании недавно открытого мною (Bell [1968, 1], гл. V, стр. 141) дискретного распределения значений модулей сдвига химических элементов.

Опытные результаты при нулевых напряжениях и предсказания находятся в точном согласии между собой.

[1]) Bell [1968, 1]. Эта монография включает экспериментальные результаты, полученные в моей лаборатории с начала 50-х гг.

Как я описывал с большими подробностями (Bell [1968, 1]), модули упругости при сдвиге при сходственной (гомологической) температуре $T/T_m<0{,}4$ определяются на основе линейной функции $\mu=1{,}03\cdot\mu(0)\cdot[1-T/(2T_m)]$. При температуре 25°C, для которой $T/T_m=0{,}32$, вычисленное устойчивое значение модуля упругости при сдвиге при нулевом значении напряжения для изотропного алюминия в упомянутом дискретном распределении значений равно 3110 кгс/мм², что близко к значению $\mu=2690$ кгс/мм², найденному на основании данных Цуккера. Следует подчеркнуть, что вычисленное мною значение основано на теории, вытекающей из анализа огромного количества значений модулей, найденных экспериментально для почти шестидесяти элементов и бинарных соединений.

Таким образом, мы видим, что в последние годы была достигнута устойчивость значений, полученных из большого числа экспериментов при комнатной температуре, несмотря на различие применяемых экспериментальных методов. Мы можем отметить, что в конечном итоге численные значения μ для алюминия, определенные из квазистатических опытов и из динамических опытов с распространением в образце волн, были обычно очень близкими. Многие экспериментаторы и теоретики, имея в виду, что квазистатические испытания являются изотермическими, и молчаливо предполагая, что распространение волн является адиабатическим процессом, считали, что при динамических испытаниях значения для E должны получаться несколько более высокими. Однако, как бы разумным ни могло казаться это предположение, оно еще должно быть продемонстрировано экспериментально.

Возвращаясь непосредственно к зависимости модулей упругости от температуры, мы можем, тем не менее, произвести сравнение такой зависимости, полученной Цуккером из экспериментов с распространением волн (кружочки), с моими предсказаниями (Bell [1968, 1]) (сплошная линия), показанное на рис. 3.108. В свете этих предсказаний результаты Цуккера для алюминия составили контраст с результатами экспериментального определения модулей 57 элементов и двух двойных соединений.

Неизвестно, возникли ли малые отклонения, наблюдаемые при более высоких сходственных (гомологических) температурах вследствие того, что свыше 200°C, т. е. выше чем $T/T_m=0{,}57$, техника эксперимента должна была быть модифицирована способом, описанным выше, для того чтобы кварцевый кристалл можно было подсоединить к образцу. Экспериментальные значения, полученные при $T/T_m<0{,}5$, были в явно хорошем соответствии с моими более поздними предсказаниями. На рис. 3.109 значение E, вычисленное при помощи формулы для изотропных материалов, а именно:

$$E=\frac{\rho V_t^2\,(3V_e^2-4V_t^2)}{V_e^2-V_t^2}\,, \tag{3.26}$$

путем использования значений модуля изменения объема и модуля

упругости при сдвиге, определенных Цуккером, сравнивается с моими более поздними предсказаниями, в которых предполагалось, что коэффициент Пуассона остается неизменным при изменении температуры. Это сравнение показывает очень хорошее согласие как при комнатной температуре, так и при более высоких значениях

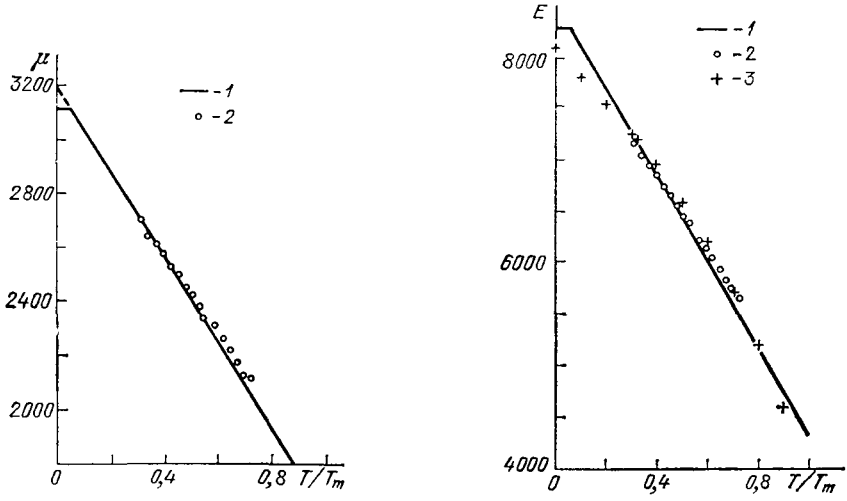


Рис. 3.108. Опыты Цуккера (1955): μ— модули, определенные для алюминия (1100°F) при помощи ультразвука, в зависимости от температуры (кружки — 2) и их сравнение с предсказаниями Белла (1968) (сплошная линия — *1* — см. ниже формулу (3.27)); рассматривается область температур $T/T_m \leqslant 0{,}5$, $\mu(0)=3110$ кгс/мм²; T — текущая температура образца, T_m — температура плавления материала образца, μ — модуль упругости при сдвиге в кгс/мм².

Рис. 3.109. Опыты Цуккера (1955): зависимость E от T/T_m. *1*— предсказания Белла (см. зависимость (2.42)) для поликристаллического алюминия, *2* — модули упругости E, определенные Цуккером при помощи ультразвука, *3* — значения, определенные в экспериментах Кёстера и Раушера с поперечными колебаниями, проведенных в 1948 г.; $T/T_m \leqslant 0{,}5$, $\nu=1/3$; T — текущая температура образца, T_m — температура плавления материала образца, E — модуль упругости в кгс/мм².

температуры. На рисунке имеются также значения E при различных температурах, взятые из исследования Кёстера и Раушера (Köster und Rauscher [1948, 1]), для которых, как было показано выше, имела место очень большая близость соответствующих значений двух систем данных при комнатной температуре.

Грюнайзен определил сжимаемость при —191, 15 и 125°C, и эти три значения оказались соответственно [1]) равными $1{,}32 \cdot 10^{-6}$,

[1]) Значение сжимаемости, при 15°C существенно выше, чем значение по Бриджмену с учетом корректирующего коэффициента при линейном слагаемом, равном $1{,}397 \cdot 10^{-6}$. Интересно, что в 1915 г. Ричардс, результаты которого известны как ошибочные, получил для алюминия среднее значение сжимаемости, равное $1{,}47 \cdot 10^{-6}$. Поскольку это почти то же самое значение, которое раньше получил Грюнайзен, у Ричардса возникла некоторая степень уверенности в достоверности найденного им неточного численного значения.

$1{,}46 \cdot 10^{-6}$ и $1{,}70 \cdot 10^{-6}$, как можно увидеть из табл. 102. Сжимаемость, найденная Цуккером при 25°С, имеет существенно более низкое значение, а именно $1{,}325 \cdot 10^{-6}$, но оно находится в гораздо лучшем соответствии с более точным значением $1{,}397 \cdot 10^{-6}$, получаемым на основе линейного члена формулы Бриджмена. Интересно отметить, что динамическое значение оказывается неожиданно низким, даже ниже, чем при квазистатическом определении. Динамически определенная Цуккером сжимаемость при 125°С была равна $1{,}44 \cdot 10^{-6}$. Более низкое численное значение сжимаемости может объясняться различием в химическом составе рассматриваемых алюминиевых образцов. Однако, как и в данных Кёстера, температурные отношения не находились в близком соответствии.

Таким образом, из этого сравнения, которое охватывает резко различающиеся экспериментальные методы и способы определения одних и тех же величин за более чем 45-летний период, можно заключить, что в XX столетии была достигнута большая точность в определении постоянных упругости, и возможность достижения такой точности в настоящее время позволила подробнее изучить те фундаментальные вопросы, которые впервые поднял Грюнайзен.

3.43. Об исследованиях температурной зависимости постоянных упругости и декремента колебаний, выполненных после 1910 г.

К концу второго десятилетия XX столетия стал выпуклее процесс специализации экспериментаторов по признаку их интересов и мотивов, побуждающих исследования. Изучение температурных зависимостей параметров упругости является хорошим примером тенденции перехода к модельно-ориентированным, специализированным исследованиям, которая все еще находится в стадии развития. Совершенствование паровых и газовых турбин, двигателей внутреннего сгорания и, теперь, космической техники с их требованиями работы в условиях всевозрастающих температур и давлений наталкивает одну из групп исследователей на экспериментальное изучение сложных металлических сплавов, температурные коэффициенты и внутренние демпфирующие свойства которых удовлетворяют требованиям технологического использования. Вторая группа с несколько меньшим интересом к собственно механике занималась исследованием температурной зависимости коэффициентов упругости монокристаллов с тем, чтобы сравнить результаты экспериментов с результатами расчета применительно к модели твердого тела при 0 К или получить численное значение волновой скорости для вычисления дебаевских температур [1] и проверить предложенные в физике модели, описывающие удельную теплоемкость твердых тел. Третья группа стала проявлять интерес по меньшей мере к полуколичественным данным, относящимся к модулям упругости при сдвиге в монокристаллах различных структур и предварительных историй

вместе с соответствующими пределами упругости или предельными значениями определяющих касательных напряжений, рассматриваемыми как инструмент для исследования моделей термически активизированных дислокаций, в надежде открыть роль кристаллических несовершенств во многих областях науки. Четвертая группа, также технологически ориентированная, сосредоточила свое внимание на трудностях практического или полупрактического решения многомерных краевых задач и формулировки приближенных аналитических моделей, которые, как надеялись, позволили бы адекватно описывать поведение твердого тела под внешней нагрузкой, относительно которой предполагается, что она и ее история изменения в полной мере известны. Наконец, имелось и несколько экспериментаторов таких, как Вернер Кёстер, сохранивших первоначальный интерес к большим исчерпывающим экспериментальным исследованиям, в общих рамках которых может быть рассмотрена физическая приложимость любых уместных теоретических построений прошлого или настоящего. В самой рациональной механике с ее важным упором на обобщенный нелинейный отклик, теоретические разработки прошедших последних двух десятилетий — периода времени, когда имелись наиболее благоприятные возможности для экспериментаторов,— в действительности лишь в немногих случаях были посвящены твердым телам ограниченных размеров и подверженным контролируемым нагружениям, для которых проведение экспериментов являлось необходимым.

К исследованиям представителей первой, технологически ориентированной группы экспериментаторов, таких, как Эверетт и Микловитц (Everett and Miklowitz [1944, 1]) или Гарофало, Маленок и Смит (Garofalo, Malenock and Smith [1952, 1]), работы которых уже описаны, можно было бы добавить эксперименты Фредерика Чарльза Ли и О. Х. Кроусера (Lea and Crowther [1914, 1]) 1914 г., в которых они провели квазистатическое растяжение мягких сталей при температурах от 20 до 600°С. В 1922 г. Ли (Lea [1922, 1]) распространил эти исследования на армко-железо, четыре вида углеродистой стали с различным процентным содержанием углерода, четыре никель-хромовые и никель-хромо-ванадиевые стали, пять различных технических бронз известного химического состава и на сплав алюминия и меди, используемый для изготовления поршней в двигателях самолетов.

Температурная зависимость модулей E и μ в опытах с квазистатическим нагружением «мертвым» грузом была, конечно, только одним аспектом интересов Ли в его температурных опытах, выполнявшихся при использовании электрической печи. Его экстензометр, снабженный зеркалом, позволял с помощью подзорной трубы определять деформации снаружи печи. Он также рассмотрел температурные зависимости пределов упругости и прочности [1]), пластич-

[1]) Ввиду длительной дискуссии о температурной аномалии Вертгейма в зна-

ности и максимального остаточного удлинения. Рис. 3.110 и 3.111 показывают результаты опытов с растяжением армко-железа, углеродистой стали с С, составляющим 0,5%, и никель-хромо-ванадиевой проволоки, в то время как на рис. 3.112 даны модули упругости, определенные из опытов на кручение «мертвым» грузом, как функции температуры. Ли заметил главные различия в значениях модуля упругости при сдвиге (отыскиваемых в опытах на кручение), рассматриваемого как функция химического состава, а также зависящего от очевидного наличия критических точек при определенных уровнях температуры. Обсудив табулированные результаты экспериментов для 16 твердых тел, одним из которых был никелевый сплав с 95,5% никеля, он пришел к заключению, что техническое использование этих металлов при температуре вплоть до 250°С допустимо. В контексте настоящего обсуждения стóит заметить, однако, что сложная деформация при наличии легирующих добавок наводит на мысль, что следует пытаться сначала понять природу более простых твердых тел, прежде чем стремиться связать все детали гетерогенности в фундаментальную теорию твердого тела.

К. Бах и Р. Бауманн (Bach und Baumann [1921, 1]) в 1921 г. провели опыты с мягкими и углеродистыми сталями при нагружении «мертвым» грузом в температурном диапазоне от 20 до 500°С и наблюдали большое падение значения модуля при 400°С, за которым следовало обычное линейное уменьшение E с увеличением температуры. Франклин Эверетт [1]) в своей докторской диссертации, выполненной в Мичиганском университете в 1931 г., описал подобные результаты для модуля μ стали, полученные тоже в опытах с нагружением «мертвым» грузом. Он наблюдал неожиданное падение значения модуля, но это случилось при несколько меньшей температуре, равной 300°С.

Е. Хонеггер (E. Honegger [1932, 1]) в 1932 г. в аналогичном технологически ориентированном исследовании, используя экстензометр с поворачивающимся зеркалом и специальную испытательную машину Амслера, провел опыты на растяжение для определения E при скоростях нагружения, которые он характеризовал как «быстрое» и «медленное» нагружение. Он получил динамические значения E, используя простую балку, нагруженную поперечно колеблющейся массой, расположенной посредине пролета. При температуре выше критической (300°С) он установил, что E изменяется при различных скоростях нагружения так, как показано на рис. 3.113. Два квазистатических испытания отличаются одно от другого тем, что в одном проходило 1,5 мин, а в другом 30 с в процессе увеличения нагрузки, следовательно, скорость нагружения

чениях постоянных упругости железа, вероятно, стоит указать, что Ли в 1912 г., подобно Манжуану и Надаи в 1940 г., обнаружил подобный факт наличия максимума в значении предела прочности при 200°С.

[1]) Everett [1931, 1]. Эверетт был докторантом профессора Степана Прокопьевича Тимошенко.

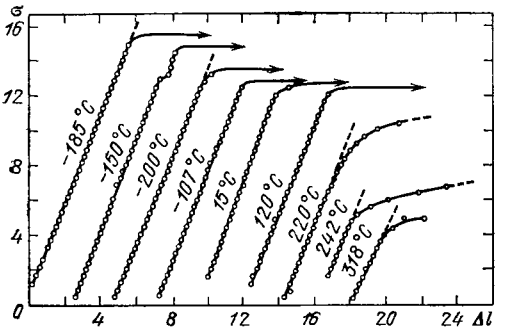


Рис. 3.110. Опыты Ли (1922): осевое растяжение армко-железа при различных значениях температуры; Δl — удлинение (цена деления на оси Δl равна 0,000893 дюйма), σ — напряжение в тс/дюйм². Нули смещены.

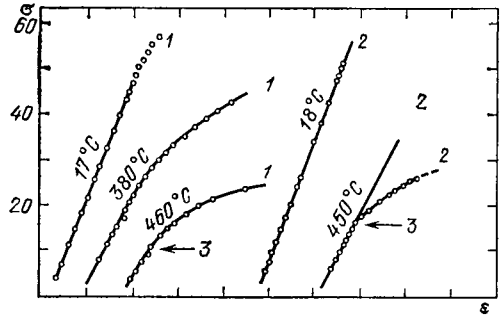


Рис. 3.111. Опыты Ли (1922): зависимости между напряжениями и деформациями при различных значениях температуры для стальных проволок. *1* — углеродистая сталь с 0,5% С, *2* — хромо-никеле-ванадиевая проволока, *3* — предел упругости; ε — деформация, цена деления 1/1000, σ — напряжение в тс/дюйм².

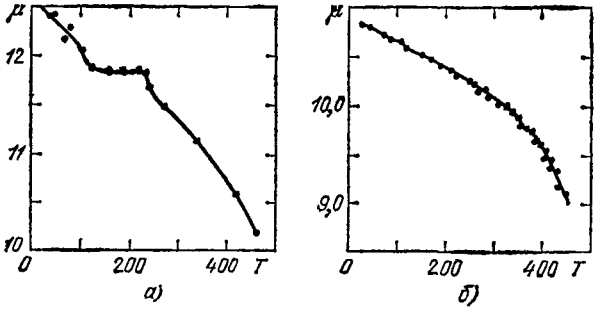


Рис. 3.112. Опыты Ли (1922): изменение модуля упругости при сдвиге в зависимости от температуры. *а*) Стержни из мягкой стали; *б*) проволока из стали с содержанием 0,57% углерода. Обнаруживается различие; T — температура в °С, μ — модуль упругости при сдвиге, цена деления 10^6 фунт/дюйм².

изменялась только в смысле среднего значения во времени. Был обнаружен любопытный факт, состоящий в том, что результаты динамических вибрационных опытов были определенно меньше при комнатной температуре. Как обычно, разница была приписана неоднородности материала и возможному невыполнению условий шарнирного опирания при вибрации стержня.

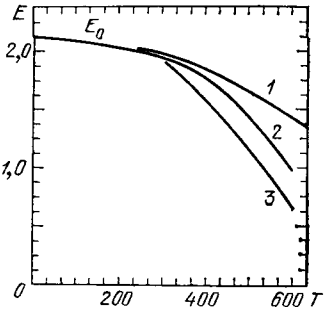


Рис. 3.113. Опыты Хонеггера (1932): сравнение модулей упругости иержавеющей стали, определенных при трех способах, указаиных на рисунке, показывающее увеличение различия результатов с увеличением температуры; *1* — при колебаниях, *2* — при обычном растяжении, *3* — при медленном растяжении; *T* — температура в °С, *E* — модуль упругости, цена деления 10^6 кгс/см².

В 1921 г. Тимошенко (Timoshenko [1921,1]) дополнительно модифицировал простейшую теорию вибрации стержня, учтя не только инерцию поворота сечений, которая была введена в рассмотрение раньше еще в XIX столетии, но также дополнительный прогиб от сдвига.

В 1931 г. Карл Антон Эрих Гоэнс (Goens [1931,1]), первоначальный интерес которого был связан с изучением одного из направлений в развитии атомных моделей твердого тела, выполнил тщательно поставленные эксперименты по изгибной вибрации трех цилиндрических стальных стержней различных размеров и призматического алюминиевого стержня с размерами $7\times10\times250$ мм. Он обнаружил столь близкую согласованность результатов уточненной теории с экспериментальными в своем исследовании частот колебаний вплоть до частоты, соответствующей пятой моде, для определения которых путем сравнения использовал электронный звуковой трансмиттер, что пришел к заключению об обнаружении метода, обеспечивающего точное определение значений постоянных упругости. Для улучшения оценки точности своих измерений он высказал пожелание пересмотреть предшествовавшие опыты того же типа, включая свои собственные работы и работы Грюнайзена. Используя тот же метод, Гоэнс и И. Уиртс (Goens und Weerts [1936,1]) в 1936 г. провели обширную серию опытов с медью, золотом и свинцом при комнатной температуре. Наиболее важные приложения нового метода исследования описаны Гоэнсом в статье (Goens [1940, 1]) 1940 г., посвященной температурной зависимости постоянных упругости монокристаллов меди, золота, свинца и алюминия в интервале между —253 и 50°С. Эти данные для низких температур все еще широко цитируются в современной литературе главным образом потому, что Гоэнс сравнил экстраполированные в 0 К значения модулей с результатами применения квантовомеханической теории Клауса Фухса (Fuchs [1936, 1]), предложенной в 1936 г.

Гоэнса также интересовали оба вида колебаний — изгибные и

крутильные,— происходящих в кристаллах, ориентация которых позволила ему подсчитать волновые скорости, а зная их, определить дебаевскую температуру при 20 и —273°С. Он защемлял стержень посредине и укреплял на обоих концах массы, как показано на рис. 3.114. В случаях как изгиба, так и кручения Гоэнс определял частоты в звуковой области, используя стандартный звуковой трансмиттер.

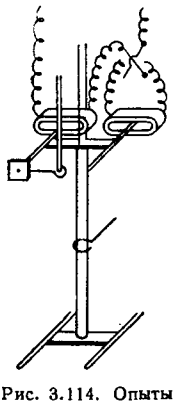


Рис. 3.114. Опыты Гоэнса (1940); экспериментальный аппарат для определения постоянных упругости при кручении с изгибом.

Наблюденная линейная зависимость упругих податливостей s_{ij} от температуры допускала в каждом случае возможность экстраполяции от —253 до —273°С. Значения как податливостей s_{ij}, так и упругих жесткостей c_{ij}, приведены в табл. 104. Вычисление Фухса для меди дали значения постоянных упругости $c_{11}=17{,}5\cdot10^{-11}$ дин/см², $c_{12}=12{,}4\cdot10^{-11}$ дин/см² при —273°С, которые Гоэнс счел вполне удовлетворительно коррелирующими с его экспериментальными данными.

Ровно столетие прошло между пионерными исследованиями упругих свойств твердых тел, проведенных Вертгеймом в 40-х гг. XIX века, и кульминационными итоговыми работами Вернера Кёстера 40-х гг. XX века. Кёстер, который полагался главным образом на точные эксперименты по изгибной вибрации, располагал преимуществом знания уточненной теории при установлении в своих исследованиях основных мод колебаний, для оценки значения почти пренебрежимого вклада инерции поворота сечений. Он определил значения E для более чем тридцати элементов, сравнив их со значениями модулей одиннадцати соответствующих элементов, найденными Вертгеймом, а также значения модулей 59 двойных сплавов, сравнив их с соответствующими данными Вертгейма для 64 сплавов. Интересное различие по сравнению с результатами Вертгейма, особенно по отношению к сплавам, заключается в существенном увеличении объема побочной информации, относящейся к кристаллическим структурам и фазовым явлениям, которая позволила Кёстеру классифицировать и привести в соответствие все его результаты, полученные на основе более точно изготовленных образцов и более точно определенных частот вибрации. В своих первых экспериментальных исследованиях зависимости модулей упругости от температуры Вертгейм ограничился квазистатическими испытаниями в интервале температур между —15 и 100°С, а также всего несколькими элементами; динамические исследования Кёстера охватывали большее множество твердых тел и диапазон температур от —185 до 1000°С. Оба рассматривали наличие корреляции между континуальными и атомистическими параметрами или отсутствие таковой, оба осредняли значения коэффициента Пуассона твердых тел, и где это было уместно, влияние магнитных эффектов

на модули упругости. Параллель, однако, заходит не так далеко по той причине, что оба провели обширные и полные исследования предмета, но каждый рассматривал примеры физического поведения скорее как основу для объективного пересмотра предлагавшихся и принимавшихся гипотез и теорий, чем с целью ограниченного исследования, подтверждающего некоторое, выбранное заранее, объяснение.

Таблица 104

Гоэнс (1940)

Кристалл	Температура (°C)	Основные постоянные упругости при +20°C и −273°C					
		s_{ik} (10^{-13}) см²/дин			c_{ik} (10^{11}) дин/см²		
		s_{11}	s_{12}	s_{44}	c_{11}	c_{12}	c_{44}
Cu	+20	14,91	−6,25	13,28	17,00	12,3	7,53
	−273	13,56	−5,65	12,33	18,2	13,0	8,1
Au	+20	20,30	10,65	23,80	18,6	15,7	4,20
	−273	21,39	−9,73	21,95	19,4	16,2	4,55
Pb	+20	93,0	−42,6	69,4	4,83	4,09	1,44
	−273	67,5	−31,0	52,8	6,7	5,7	1,89
Al	+20	15,90	−5,80	35,16	10,8	6,22	2,84
	−273	14,20	−5,00	31,46	11,4	6,20	3,18

Основой экспериментов Кёстера, представляющих интерес для настоящего обзора, явился остроумный прибор, описанный Фрицем Фёрстером (Forster [1937,1]) в 1937 г. Целью было подвесить образец с помощью тонких проволочек таким образом, чтобы потери энергии в опорах или соединении опорных устройств и образца стали действительно пренебрежимыми. Были усовершенствованы различные конфигурации опор, допускающих протекание изгибных, крутильных и даже продольных колебаний параллелепипедов или цилиндров как вынужденных, так и свободных. Один из концов каждой из поддерживающих проволок был закреплен, а другой прикреплен к движущейся механической части электромагнитного преобразователя (датчика). Одна система служила как возбуждающая причина при вынужденных колебаниях, а другая как приемник. Установка позволяла определять также частоты свободных колебаний и параметр демпфирования. Статья содержала детальное описание различных рассмотренных конфигураций схем и обширное исследование многих проблем, с которыми пришлось столкнуться в процессе достижения необходимой точности измерения не только для определения модуля упругости E, но и параметра резонансного демпфирования,— обеих величин как функций окружающей температуры.

Установка для горизонтальных изгибных колебаний показана на рис. 3.115, где E и S — элементы преобразователя. Нагрева-

тельный аппарат, показанный на рис. 3.116, позволял проводить температурные измерения в широкой области значений.

Отсылая заинтересованных читателей к статье Фёрстера для ознакомления с деталями метода, позволяющего получить вибрации чрезвычайно малой амплитуды в системе, имеющей большую чувствительность опирания, я укажу на другую статью Фёрстера и Кёстера, также 1937 г., в которой описаны первые серии экспериментов

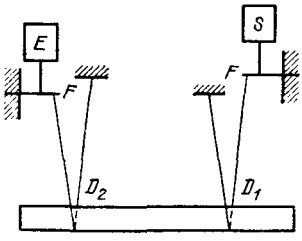


Рис. 3.115. Опыты Фёрстера (1937); способ опирания образца при вибрационном способе определения постоянных упругостн.

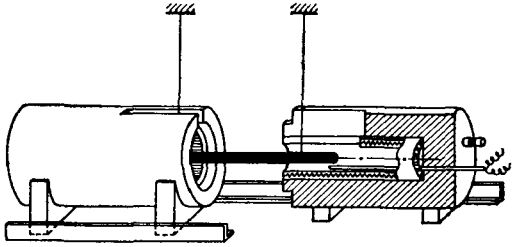


Рис. 3.116. Опыты Фёрстера (1937); нагрев тельный прибор, использов«иный при вибрационном способе определения изменения модуля упругости с изм неннем температуры.

по определению модуля E и исследованию резонансного демпфирования одиннадцати чистых металлов и ряда двойных сплавов (Förster und Köster [1937,2]).

Таблица 105

Фёрстер и Кёстер (1937)

Металл	Модуль упругости E (кгс/мм²)	Декремент колебаний $\delta(\cdot 10^4)$	
Железо	21 700	5,6	Отожжеио в течение 1/2 часа при $T=930$°C, воздушио охлаждеио
Никель	21 900	72,1	Отожжен в течение 1/2 часа при $T=700$°C
Медь	12 820	35,5	Отожжеиа в течение 1/2 часа при $T=400$°C
Молибден	59 100	5,1	Агломерированиый, отожжен в течение одного часа при $T=900$°C
Алюминий	7 230	0,46	99,99% Al, отожжеи в течение 1/2 часа при $T=550$°C
Магний	4 530	2,1	99,99% Mg, отожжеи в течение 1/2 часа при $T=550$°C
Цинк	13 130	7,7	99,99% Zn, опытный стержень отожжен в течение одного часа при $T=200$°C
Кадмий	6 250	11,0	Литой
Висмут	3 480	17,6	Литой
Свииец	1 450	45,7	Литой
Олово	4 560	54,2	Литое

Ранний интерес Кёстера к физическому аспекту поведения твердых тел в зависимости от окружающей температуры стал очевидным (Köster [1935,1]) в его исследованиях 1935 г. температурной зависимости электрических и магнитных параметров в промежутке от комнатной температуры до 1000°С. После усовершенствования экспериментов Фёрстера по вибрации стержней, Кёстер использовал эту технику, чтобы определить E для 32 чистейших металлов и 59 двойных сплавов в температурном диапазоне от —180 до 1000°С. Дополнительно при каждой температуре он измерял коэффициент демпфирования, представленный в форме $\delta = \ln A_0/A_1$, т. е. натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд. Обширный ряд данных для этих двух определенных им величин, E и δ, был опубликован в серии статей между 1937 и 1948 гг., представляющих в XX столетии главный источник по изучению модулей упругости поликристаллических изотропных твердых тел, определенных из вибрационных испытаний.

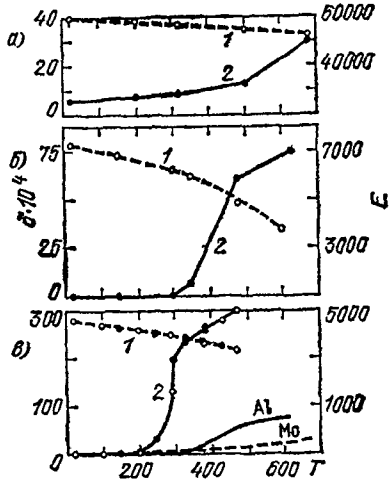


Рис. 3.117. Опыты Фёрстера и Кёстера (1937 : зависимость модуля упругости E и коэффициента демпфирования (внутреннего сопротивления) для: *а*) молибдена; *б*) алюминия; *в*) магния (для сравнения даны графики E для Mo и Al). T — температура в °С; E — модуль упругости в кгс/мм², δ — декремент колебаний; сплошная линия — модуль упругости E, штриховая — коэффициент демпфирования, кружки — экспериментальные точки. *1* — модуль упругости; *2* — коэффициент демпфирования.

Первой статьей из этой серии была работа Фёрстера и Кёстера (Förster und Köster [1937,2]). В ней описывались исходные эксперименты, были приведены значения E и δ при комнатной температуре, показанные в табл. 105 при частных видах предшествующих историй нагружения и температур отжига.

Температурная зависимость модуля E и коэффициента демпфирования δ, представленная в этих исходных исследованиях, показана на рис. 3.117.

Интерес Кёстера к этим параметрам простирался значительно дальше простого описания их определения как такового. Он изучал скачки в значениях, которые обнаруживались при зависящих от температуры полиморфных превращениях в точках Кюри [2], где это было уместно, а также такие параметры, как чистоту, размеры зерен и упорядоченность в распределении атомов элементов и двойных сплавов. Многие из этих подробностей представляют бо́льший интерес для металлургии, чем для механики континуума, но, конечно, здесь нам следует подчеркнуть тот факт, что Кёстер полу-

Таблица 106

Кёстер (1943). Упругие характеристики чистых металлов

Металл	$\chi \cdot 10^4$ см²/кгс	K кгс/мм²	E кгс/мм²	K/E	ν *)	ν **)	G кг/мм²
1	2	3	4	5	6	7	8
Li	7,2 [b]	1 390	1 170 [b]	1,19	0,36 [b]	—	430
Na	12,0 [b]	832	910 [b]	0,92	0,32 [b]	—	340
K	24,6 [b]	406	360 [b]	1,13	0,35 [b]	—	130
Rb	52,0	190	240	0,8	0,3	—	—
Cs	70,0	140	175	0,8	0,3	—	—
Be	0,855	11 700	29 280	0,40	0,08	—	13 500
Mg	2,952	3 390	4 515	0,75	0,28	—	1 770
Ca	5,697	1 750	2 000	0,87	0,31	—	750
Sr	8,187	1 220	1 600	0,76	0,28	—	620
Ba	10,19	980	1 290	0,77	0,28	—	500
Al	1,34	7 460	7 220	1,03	0,34	0,34 [a]	2 720 [a]
La	3,513	2 840	3 820	0,74	0,28	—	1 500
Ti	0,797	12 500	10 520	1,2	0,36	—	3 870
Zr	1,097	9 100	6 970	1,3	0,37	—	2 540
Hf	0,901	11 100	8 500	1,3	0,37	—	3 100
Th	1,818	5 500	7 970	0,69	0,26	—	3 160
V	0,609	16 400	15 000	1,1	0,35	—	5 500
Nb	0,570	17 500	16 000	1,1	0,35	—	6 000
Ta	0,479	20 800	18 820	1,1	0,35	—	7 000
Cr	0,600	16 600	19 000	0,87	0,31	—	7 300
Mo	0,347	28 800	33 630	0,85	0,31	—	12 200 [d]
W	0,293	34 000	41 520	0,82	0,30	0,28 [e]	15 140 [e]
Mn	0,791	12 600	20 160	0,63	0,24	—	7 800
Fe	0,587	17 000	21 550	0,79	0,29	0,29 [a]	8 280 [a]
Co	0,539	18 500	20 380 [f]	0,90	0,31	—	7 630 [f]
Ni	0,529	18 900	19 700	0,92	0,32	0,31 [a]	7 500 [f]
Md	0,34	29 000	41 500	0,70	0,26	—	16 500
Re	0,27	37 000	53 000	0,70	0,26	—	21 000
Ru	0,342	29 000	44 000	0,66	0,25	—	17 600
Os	0,26	38 000	57 000	0,65	0,25	—	22 800
Rh	0,372	27 000	38 640	0,70	0,26	—	15 300
Ir	0,268	37 300	53 830	0,69	0,26	—	21 400
Pd	0,528	19 000	12 360	1,54	0,39	0,39 [a]	4 450
Pt	0,360	27 800	17 320	1,59	0,39	0,39 [a]	6 220 [a]
Cu	0,719	13 900	12 500	1,11	0,35	0,34 [a]	4 640 [a]
Ag	0,987	10 100	8 160	1,25	0,37	0,38 [a]	2 940 [a]
Au	0,577	17 300	7 900	2,19	0,42	0,42 [a]	2 820 [a]
Zn	1,66	6 000	9 400	0,64	0,24	0,29 [g]	3 790
Cd	1,99	5 000	6 350	0,79	0,29	0,30 [a]	2 460
Hg	3,4	2 900	—	—	—	—	—
Ga	~2,0	~5 000	1 000	5,0	0,47	—	430
In	2,5	4 000	1 070	3,7	0,45	—	380
Tl	3,48	2 900	810	3,6	0,45	—	280

Таблица 106 *(продолжение)*

Металл	$\chi \cdot 10^4$ см²/кгс	K кгс/мм²	E кгс/мм²	K/E	ν *)	ν **)	G кг/мм²
1	2	3	4	5	6	7	8
Si	0,41	24 400	11 500 [i]	2,1	0,42	—	4 050
Ge	1,41	7 100	8 000	0,9	0,32	—	3 000
Sn	1,87	5 300	5 500	0,97	0,33	0,33 [a]	2 060
Pb	2,37	4 200	1 600	2,6	0,44	0,44 [a]	570 [h]
Sb	1,8	5 550	5 600	0,99	0,33	—	2 000 [i]
Bi	2,92	3 400	3 480	0,98	0,33	0,33 [a]	1 310

a) Грюнайзен (E. Grüneisen: Annal Physik (4), 25, 825 (1908)).
b) Бендер (O. Bender: Ann. Physik (5) 34, 359 (1939);) значения при —190° для Na, K вычислены по данным для монокристалла.
c) Темплин (R. L. Templin: Metals and Alloys, 3, 136 (1932)).
d) М. Дж. Драйвестейн (M. J. Druyvesteyn: Physica 8, 439 (1941)).
e) С. Дж. Урайт (S. J. Wright: Proc. Roy. Soc. (London). Ser. A 126,613 (1930)).
f) К. Хонда и Т. Танака (K. Honda and T. Tanaka: Sci. Rept. Tohoku Imp. Univ. 15, 1 (1926)).
g) Зиглершмидт (H. Sieglerschmidt: Z. Metall. 24, 55 (1932)).
h) Physikalisch-Technische Reichsanstalt: Z. Metallk. 12, 179 (1920)).
i) П. В. Бриджмен (P. W. Bridgman: Phy. Rev. (2), 9, 138 (1917)).
*) Вычислены с использованием значения отношения K/E.
**) Непосредственное опытное определение.

чил численные значения двух указанных параметров в зависимости от таких различных входных данных.

В 1943 г. Кёстер (Köster [1943,1]) подвел итог экспериментальному определению величин K, μ, E и ν при комнатной температуре, используя как данные, полученные из анализа литературы, так и свои собственные. Этот список из 49 элементов охватывал собранную им информацию по этой тематике для упругих постоянных изотропных материалов, которая предшествовала современному преобладанию в экспериментах ультразвуковых методов. Табл. 106 включает в себя список Кёстера. Значения ν в столбце 6 были вычислены, исходя из экспериментально определенного отношения K/E, помещенного в столбце 5; ошибка от использования этого отношения, как подчеркивал Кёстер, была значительно большей, чем от использования отношения E/μ при вычислении ν [1]). Все остальные значения были непосредственно определены в опыте. (Значения ν в столбце 7 представляют собой данные Грюнайзена, приведенные выше.)

[1]) Значение величины K/E изменяется от 1/2 до ∞, а E/μ — только от 1/2 до 1/3, когда ν изменяется от 0 до 1/2. Более существенно то, что K/E меняется от 0,66 до 3,5, в то время как K/μ приобретает значения от 0,4 до 0,34, когда ν изменяется от 1/4 до 0,46.

В 1947 г. Кёстер (Köster [1947,1]) вновь подготовил обзор, основанный на собранных им результатах экспериментов предыдущих лет. Модули E 31 элемента, как функции окружающей температуры, составили основу графиков на рис. 3.118, 3.119, где представлено E в зависимости от T/T_m для точек плавления твердых тел, имеющих соответственно низкие и высокие значения.

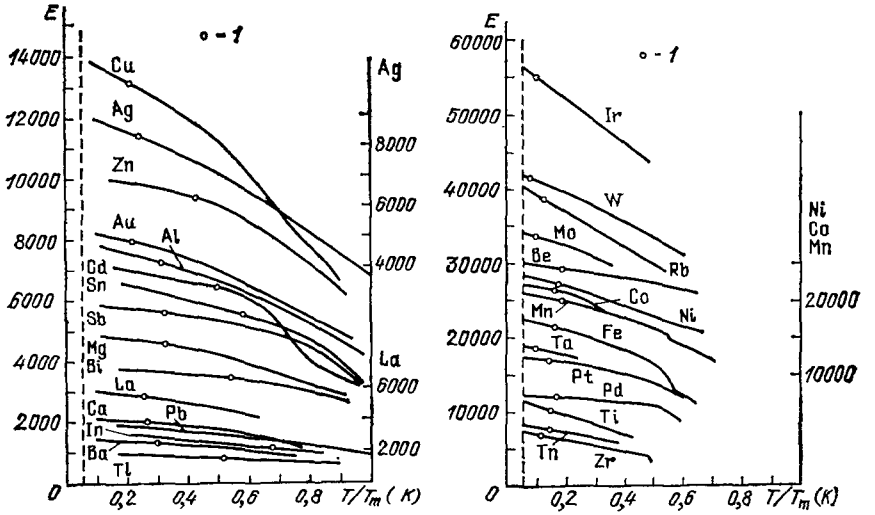


Рис. 3.118. Опыты Кёстера (1948): зависимость модуля упругости E от сходственной (гомологической) температуры T/T_m для элементов с низкой температурой плавления; T — текущее значение температуры образца в К, T_m — температура плавления материала образца в К, E — модуль упругости в кгс/мм²; *1* — точка, соответствующая 20°С.

Рис. 3.119. Опыты Кёстера (1948): зависимость модуля E от сходственной (гомологической) температуры для элементов, имеющих высокую температуру плавления; T — текущее значение температуры образца в К, T_m — температура плавления материала образца в К, E — модуль упругости в кгс/мм²; *1* — точка, соответствующая 20°С.

Я не привожу экстраполяции Кёстера этих величин до значений $T/T_m=0$ и $T/T_m=1$, т. е. до температуры абсолютного нуля и точки плавления. Он считал, что отношение этих двух гипотетических модулей имеет существенное значение, но простейшее графическое представление его данных без указанной экстраполяции подсказывает иное. Поскольку серия ультразвуковых исследований показала, что модули при сходственной температуре ниже $T/T_m=0{,}06$ должны быть постоянными, а при больших значениях T/T_m наклон кривых E—T/T_m был настолько изменчив, что я опустил также обсуждение Кёстером поведения экстраполированных параметров при $T=0$ К и $T=T_m$.

Многие экспериментаторы отмечали, что при температуре ниже комнатной модули зависят от температуры линейно. На рис. 3.120 показаны кривые зависимости dE/dT в кгс/мм² на 1°С от окружаю-

щей температуры в °С, построенные Кёстером, которые демонстрируют этот факт.

Кёстер описал постоянные демпфирования в своей статье 1948 г., посвященной поведению чистых металлов (Köster [1948,2]). Он привел детали специфики изготовления и предыстории каждого образца, изготовленного из одного из 32 рассмотренных им элементов. Он табулировал также результаты предыдущих квазистатических и динамических исследований, посвященных определению E для этих элементов, используя работу Грюнайзена (Grüneisen [1907,1])

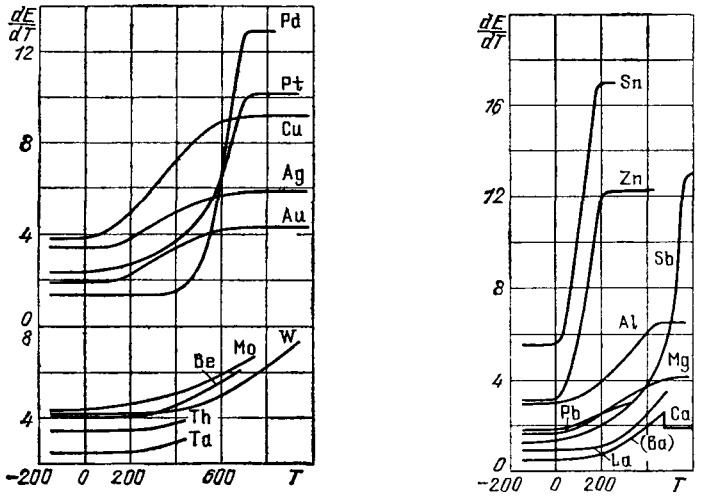


Рис. 3.120 Опыты Кёстера (1948); зависимость температурных коэффициентов модулей упругостей ($dE/(dT)$) от температуры; T — температура в °С; $dE/(dT)$ (в кгс/мм² на 1°С).

1907 г. и работу Гийлета (Guillet [1939, 1]) 1939 г. для сравнения с результатами своих собственных опытов. Любопытно, что нигде в работе Кёстера я не нашел ссылку на его предшественника в XIX столетии — Вертгейма. Этот пробел в указании исторической преемственности должен быть отмечен особо ввиду того, что в своих концепциях и целях Кёстер, по существу, повторил и расширил исследования Вертгейма вековой давности.

Все данные в своих ранних статьях Кёстер предпочитал представлять в терминах окружающей температуры в °С, а не в терминах сходственной (гомологической) температуры T/T_m, которую он использовал в финальном обзоре. На рис. 3.121 показаны зависимости E (Köster [1948,2]) от температуры для марганца, железа, кобальта и никеля, а также зависимость коэффициента демпфирования от температуры для кобальта, которая иллюстрирует интересные возможности, имеющиеся в таких экспериментальных исследованиях.

Возможно, не меньший интерес представляют его сравнения температурных зависимостей E для различной чистоты алюминия и магния (Köster [1948,3]), показанные на рис. 3.122.

Температурные зависимости модуля E и коэффициента демпфирования меди и серебра (Köster [1948,3]) с использованием и без

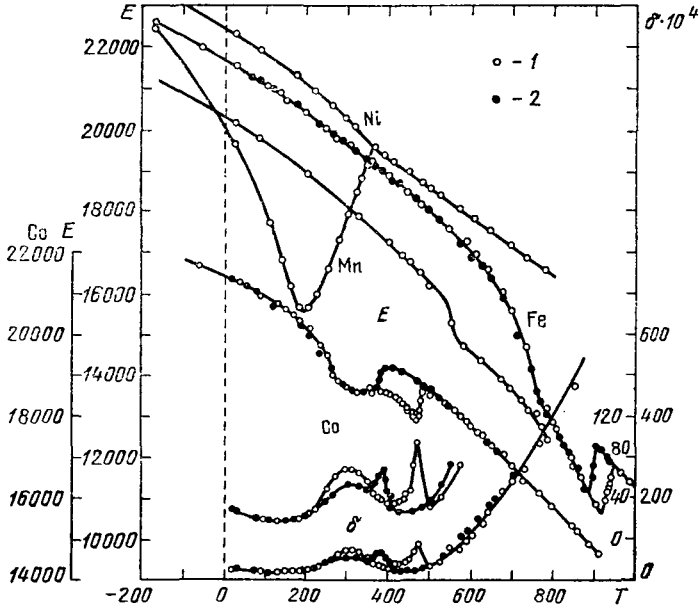


Рис. 3.121. Опыты Кёстера (1948): зависимость модуля упругости E от температуры для марганца, железа, кобальта и никеля, установленная при нагревании (светлые кружки) и при охлаждении (темные кружки). Показана также зависимость декремента колебаний δ от температуры для кобальта при тех же двух процессах; T — температура в °С, E — модуль упругости в кгс/мм².

использования предосторожностей, относящихся к содержанию кислорода, показаны на рис. 3.123, который дополнительно иллюстрирует сложность зависимостей этих параметров от многих факторов, включая, как здесь, химический состав.

Среди множества статей Кёстера, посвященных модулю E, может быть, одной из имеющих наибольший исторический интерес, является статья, написанная в 1948 г., в которой даны значения для 59 двойных сплавов, определенные вибрационным методом при комнатной температуре. В своем введении Кёстер (Köster und Rauscher [1948,1]), туманно представляя историю предмета, информирует нас о причине столь обширного предварительного обсуждения, которая состояла в том, что его исследование было первым общим изучением зависимости модулей упругости двойных сплавов от их химического состава. В статью была включена температурная зависимость модулей нескольких двойных сплавов, но основной упор

в этой статье был сделан на опыты при комнатной температуре. Хотя Кёстер рассмотрел примерно то же число двойных сплавов, что и Вертгейм до него, изученная им совокупность типов металлических сплавов была значительно более представительной. Столетие объединенных усилий в исследованиях в области металлургии

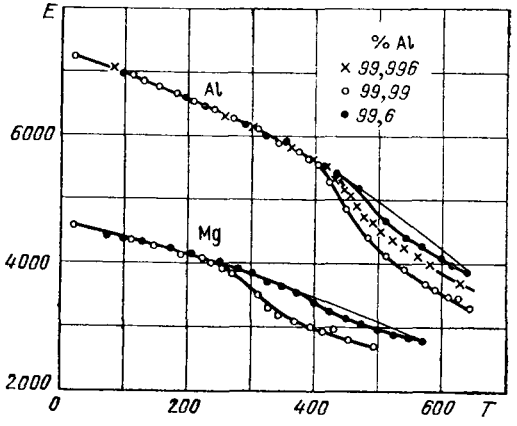


Рис. 3.122. Опыты Кёстера (1948): зависимость модуля упругости E от температуры для магния и алюминия при различной чистоте материала; T — температура в °С, E — модуль упругости в кгс/мм².

дало новую классификацию и новую технику получения сплавов, которые были доступны Кёстеру, но неизвестны Вертгейму.

Кёстер исследовал двойные сплавы твердых тел с полной растворимостью, предельной растворимостью, эвтектические сплавы и

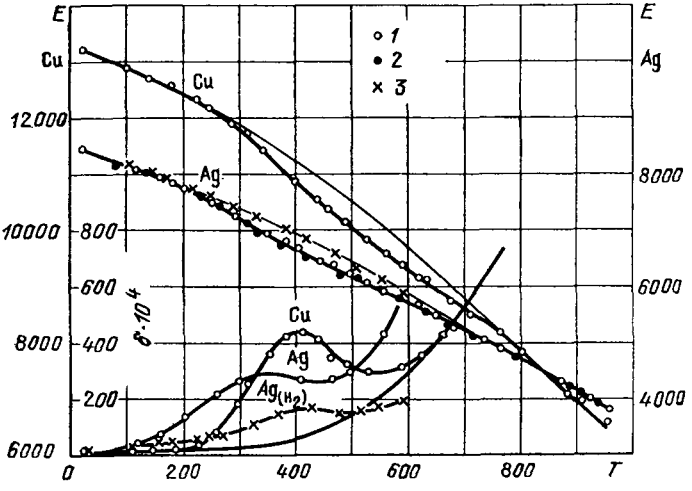


Рис. 3.123. Опыты Кёстера (1948); зависимость от температуры модуля упругости медн и серебра высокой чистоты: *1* — при нагревании и *2* — при охлаждении. Большой интерес представлял наблюдавшийся максимум декремента колебаний для этих двух металлов особо высокой чистоты; *3* — результаты для образца из серебра, которое было дважды расплавлено и отожжено в присутствии водорода; T — температура в °С, E — модуль упругостн в кгс/мм², δ — декремент колебаний. *1* — нагрев, *2* — охлаждение, *3* — расплавление в атмосфере молекулярного водорода (H_2) и закалка.

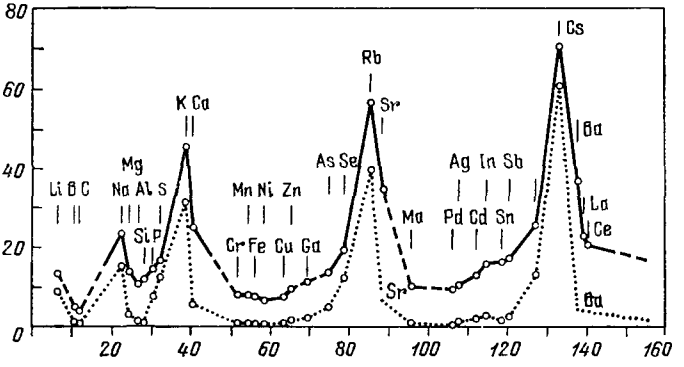


Рис. 3.124. Исследование Ричардса (1915, 1924): зависимость атомных объемов и сжимаемости элементов в твердом агрегатном состоянии от атомных весов. Сплошная линия представляет атомный объем, а пунктир — сжимаемость. Атомные объемы даются в кубических сантиметрах на грамм-атом. На рисунке показана сжимаемость, умноженная на 10^6. По оси абсцисс отложены атомные веса элементов.

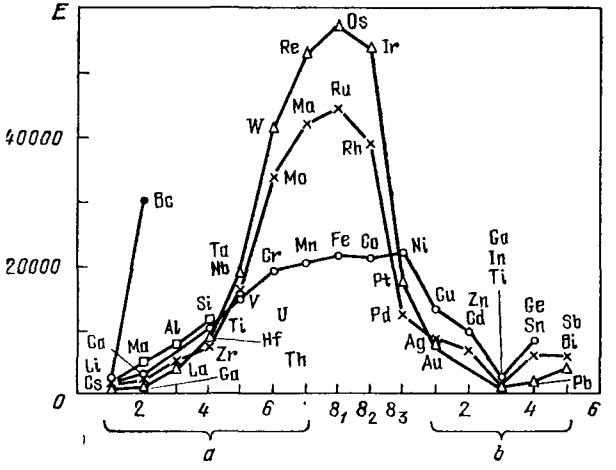


Рис. 3.125. Исследование Кёстера (1948): модуль упругости E для элементов периодической системы. На горизонтальной линии указаны номера групп периодической системы элементов; E — модуль упругости в кгс/мм².

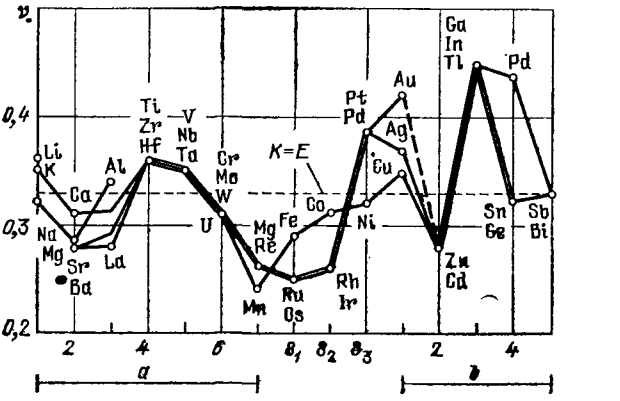


Рис. 3.126. Исследование Кёстера (1948): коэффициент Пуассона для элементов периодической системы. На горизонтальной линии указаны номера групп периодической системы элементов; ν — коэффициент Пуассона.

сплавы с интерметаллическими фазами. Читателю, интересующемуся деформационными свойствами сплавов, советуем обратиться к статьям Кёстера 1948 г. как к ценному источнику информации.

Каждому экспериментатору со времен Вертгейма до наших дней, занимающемуся накоплением значений модулей упругости, в конце концов становится интересным сравнить их с атомными параметрами.

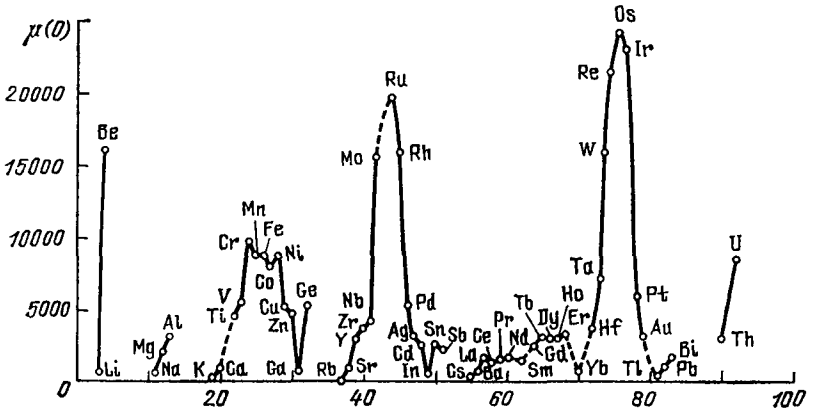


Рис. 3.127. Исследование Белла (1968): модуль упругости при сдвиге μ (0) (при абсолютном нуле в шкале Кельвина) для различных элементов в зависимости от атомного номера. По оси абсцисс отложены амомные веса элементов; μ (0) в кгс/мм².

«Закон Вертгейма», как назвал его Фохт, утверждающий (Wertheim [1844,1(a)]) постоянство произведения E и седьмой степени среднего атомного расстояния, был модифицирован Фохтом (Voight [1893, 2]), который заменил седьмую степень на шестую. Теодор Уильям Ричардс (Richards [1915,1] и см. [1924,1]) дал в последующем широко цитируемое представление сжимаемости при комнатной температуре как функции атомного веса, что показано на рис. 3.124.

Кёстер в своем обзоре 1948 г. дал подобный график (Köster [1948,4]) не только для модуля E при комнатной температуре, приведенный на рис. 3.125, но и представляющий, возможно, более фундаментальный интерес график зависимости коэффициента Пуассона ν от номера группы периодической системы, в которой располагается элемент, как показано это на рис. 3.126.

В сравнениях, проделанных Ричардсом и Кёстером, подразумевается намек на то, что зависимость их параметров от сходственной температуры неважна. В 1968 г. я (Bell [1968,1]) изобразил график зависимости значения модуля упругости при сдвиге $\mu(0)$ от атомного номера для 59 элементов, показанный на рис. 3.127, который заменяет зависимость от температуры зависимостью от параметра атома.

В тех же терминах я сравнил также функциональную зависимость значений этих модулей в нулевой точке, умноженных на атомный объем от единицы, деленной на квадрат минимума измеренного атомного расстояния и на температуру плавления. Так же как и Кёстер, когда он сравнивал значение E с атомным объемом при комнатной температуре, я установил (Bell [1968,1], стр. 147—149), что не имеется экспериментальных оснований для того, чтобы распространять аналитические решения на атомном уровне до пред-

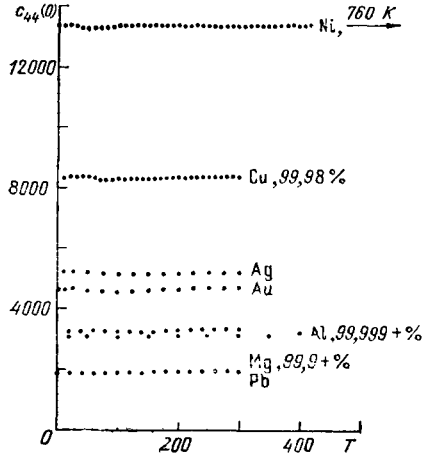


Рис. 3.128. Модули сдвига $c_{44}(0)$ монокристалла, вычисленные для различных температур Беллом (1968) по формулам (3.27) на осиове экспернментальных даниых: Al: G. N. Kamm and G. A. Alers: J. Appl. Phys. 35, No. 2, 327 (1964).— J. Vallin, M. Mongy, K. Salama and O. Beckman: J. Appl. Phys. 35, No. 6, 1825 (1964); Al (поликристаллический).— C. Zucker: J. Acoust. Soc. Am. 27, No. 2,318 (1955). Au: E. von Goens: Ann. Physik 38, 456 (1940).— J. R. Neighbours and G. A. Alers: Phys. Rev. 111, Ser. 2, 707 (1958). Ni.— G. A. Alers, J. R. Neighbours and H. Sato: J. Phys. Chem. Solids 13, 402 (1960). Mg: L. J. Slutsky and C. W. Garland: Phys. Rev. 107, No. 4, 972 (1957). Ag: J. R. Neighbours and G. A. Alers: Phys. Rev. 111, Ser. 2, 707 (1958). Cu: E. von Goens: Ann. Physik 38, 456 (1950).— W. C. Overton, Jr. and John Gaffney: Phys. Rev. 98, No. 4, 969 (1955). Pb: E. von Goens: Ann. Physik 38, 456 (1940).— S. C. Prasad and W. A. Wooster: Acta Cryst. 9, 38 (1956). T — температура в Кельвинах; c_{44} (0) — в кгс/мм².

сказания макроскопической зависимости между напряжением и деформацией для изотропных твердых тел. Вместе с тем хорошо известно, что для очень небольшого числа твердых тел, таких, как медь, калий или каменная соль, такая связь теорий на атомном уровне и эксперимента на макроскопическом достигается.

Ниже комнатной температуры модули E и μ изотропного твердого тела, а также c_{44} — одна из трех постоянных упругости анизотропных монокристаллов кубической сингонии, которая представляет собой один из двух модулей сдвига,— все зависят от температуры приблизительно линейно. Ультразвуковые исследования показали, что при значениях T/T_m, меньших чем 0,06, эти модули постоянны, т. е. они постоянны в области, расположенной слева от штриховых вертикальных линий на рис. 3.118 и 3.119 (T — температура окружающей среды, а T_m — температура плавления, обе в градусах Кельвина). В середине 60-х гг. я захотел определить значения модулей упругости при сдвиге при нулевых напряжениях для возможно максимального числа элементов с тем, чтобы сравнить их с квантованно распределенными значениями модуля упругости при сдвиге линейно упругих тел при нулевом значении напряжения, описываемыми зависимостью, в которой участвуют числа натурального ряда. Указанные квантованно распределенные дис-

кретные значения, как показали мои исследования очертания кривых зависимостей напряжения от деформации при конечных деформациях в динамической пластичности и квазистатических зависимостей между напряжениями и деформациями в той же области больших пластических деформаций, должны характеризовать поведение кристаллических тел (Bell [1968,1]) (это будет рассмотрено в разделе 3.44). С тех пор я изучал эту линейную температурную зависимость модуля для заданных твердых тел. Такая линейность, как отмечалось выше, наблюдалась Кёстером (Köster [1947,1]) и другими. Тангенсы углов наклона касательных к кривым зависимостей между напряжением и деформацией при нулевых напряжениях, дающие возможность получить значения μ и c_{44}, были следующими:

$$\begin{aligned} &\mu\,(T/T_m) = \mu\,(0), && 0 \leqslant T/T_m \leqslant 0{,}06; \\ &\mu\,(T/T_m) = 1{,}03\mu\,(0)\,(1 - T/(2T_m)), && 0{,}06 \leqslant T/T_m \leqslant 300/T_m. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Примеры значений модуля c_{44} для простых кристаллов, полученные с помощью ультразвука для интервала температур между 4,2 K и комнатной и собранные мною (Bell [1968,1]) в 1968 г., показаны на рис. 3.128. Экспериментальные значения $\mu\,(T/T_m)$ и T были использованы для вычисления $\mu\,(0)$ при каждой температуре. Имеется очевидное согласие между экспериментом и температурной зависимостью, выраженной формулой (3.27).

3.44. Квантованное распределение значений модуля упругости при сдвиге при нулевой температуре по Кельвину для упругих изотропных тел и мультимодульность для данного изотропного твердого тела: Белл (1964—1968)

Начиная с Массона и Вертгейма в 40-х гг. XIX века, ряд лиц пытались найти зависимость между определяемыми в экспериментах значениями модулей упругости для различных кристаллических тел и параметрами соответствующих атомов, в частности межатомными расстояниями. Большинству экспериментаторов, казалось, и в голову не приходило, что такие сравнения следовало делать при одинаковой гомологической (сходственной) температуре. (Гомологическая температура есть отношение температуры окружающей среды в опыте к температуре плавления данного твердого тела, T/T_m.) Как мы видели, Кёстер представлял данные для модуля упругости E именно в такой форме.

В 1964 и 1965 гг., занимаясь экспериментальным исследованием зависимостей между напряжением и деформацией, с которыми связаны закономерные распространения пластических волн в телах, подвергнутых конечным деформациям, я нашел совершенно новый тип распределения значений модулей упругости при сдвиге для элементов. Как будет детально описано ниже в гл. IV, эксперимент показал, что функции отклика при нагружении при конечных де-

Таблица 107

Белл (1968)

Кристаллическое вещество	T_m(K)	Количество опытов	Среднее экспериментальное μ (0) (кгс/мм²)	Расчетное μ (0) (кг/мм²) формула (3.28)	s	p	Источники
Os	3 273	1	24 300	23 600	1	0	a
Ir	2 728	1	23 100	23 600	1	0	a
Re	3 443	1	21 400	21 300	1	1	a
Ru	2 773	1	19 500	19 300	2	0	a
W	3 683	1	15 700	15 730	3	0	a
Be	1 550	3	16 000	15 730	3	0	a, b, c
Mo	2 893	1	15 400	15 730	3	0	e
Fe	1 809	4	8 700	8 580	6	0	a, b, c, d
Ni	1 726	2	8 600	8 580	6	0	a, b
U	1 405	2	8 440	8 580	6	0	a, b
Co	1 768	1	7 900	7 750	6	1	d
Ge	1 231	1	7 070	7 010	7	0	h
Ta	3 269	1	7 040	7 010	7	0	f
Pt	2 042	2	5 860	5 720	8	0	a, b
V	2 133	2	5 320	5 160	8	1	a, b
Cu	1 356	4	5 080	5 160	8	1	a, b, c, d
Pd	1 825	1	5 200	5 160	8	1	a
Zn	692,5	4	4 570	4 660	9	0	a, b, c, d
70-30α Латунь	1 188	1	4 700	4 660	9	0	c
Ti	1 943	2	4 420	4 210	9	1	a, b
Nb	2 743	2	3 900	3 810	10	0	a, b
Zr	2 125	2	3 680	3 810	10	0	a, b
Hf	2 523	1	3 600	3 450	10	1	a
Ag	1 233,8	3	3 170	3 110	11	0	a, b, c
Au	1 336	4	3 090	3 110	11	0	a, b, c, d
Al	933	14	3 110	3 110	11	0	a, b, c, d, g
Th	2 023	2	2 960	3 110	11	0	a, b
Tb	600	1	3 020	3 110	11	0	f
Er	1 798	1	3 180	3 110	11	0	f
Y	1 763	1	2 830	2 810	11	1	f
Dy	1 653	1	2 770	2 810	11	1	f
Ho	1 461	1	2 840	2 810	11	1	f
Cd	593,9	2	2 550	2 540	12	0	c, d
Sn	504,9	4	2 510	2 540	12	0	a, b, c, d
Gd	1 585	1	2 450	2 540	12	0	f
Sb	1 653	1	2 200	2 300	12	1	d
Mg	923	4	2 050	2 070	13	0	a, b, c, d
La	1 099	1	1 700	1 690	14	0	f
Bi	544	1	1 600	1 530	14	1	d
Nd	1 113	1	1 550	1 530	14	1	f
Pr	1 213	1	1 530	1 530	14	1	f
Sm	1 573	1	1 390	1 381	15	0	f
Ce	1 077	1	1 380	1 381	15	0	f
NaCl	1 074	1	1 360	1 381	15	0	c
Ca	1 111	1	800	830	17	1	a

Таблица 107 *(продолжение)*

Кристаллическое вещество	T_m(K)	Количество опытов	Среднее экспериментальное $\mu(0)$ (кгс/мм²)	Расчетное $\mu(0)$ (кг/мм²) формула (3.28)	s	p	Источники
Sr	1 041	1	800	830	17	1	a
Yb	2 073	1	754	750	18	0	f
Pb	600,4	3	750	750	18	0	a, b, c
Tl	576	1	370	370	21	1	a
Cs	301,7	1	340	340	22	0	a

[a] Alan Howard Cottrell: The Mechanical Properties of Matter. New Jork: John Wiley & Sons, Inc. (1964).

[b] Smithells Metals Reference Book, 3rd ed., vol. II, p. 614. Butterworth & Co. (Publ.) Ltd (1962).

[c] R. F. S. Hearmon: Advan. Phys. 5, 370 (1955).

[d] R. F. S. Hearmon: Applied Anisotropic Elasticity. Oxford Univ. Press (1961).

[e] Handbook of Chemistry and Physics, 43rd ed., p. 2169 Cleveland, Ohio: The Chemical Rubber Publishing Co. (1961—1962).

[f] J. F. Smith, C. E. Carlson and F. H. Spedding: J. Metals, Trans. Met. Soc. AIME, 9, 1212 (1957).

[g] C. Zucker: J. Acoust. Soc. Am. 27, № 2, 318 (1955).

[h] J. Friedel: Dislocations. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co. (1964).

формациях в области пластичности являются параболическими как для монокристаллов, так и для полностью отожженных поликристаллических тел с дискретным распределением значений коэффициентов параболы, поддающихся выражению через параметры, приобретающие значения чисел натурального ряда. Пытаясь найти параметры с аналогичным распределением среди нескольких кристаллических тел, для которых исследовался отклик при больших деформациях, я обнаружил, что отношения коэффициентов парабол для двух различных тел были такими же, как отношения модулей упругости при сдвиге в нулевой точке $\mu(0)$, при инфинитезимальных деформациях тех же изотропных тел. После первой публикации (Bell [1967,2]) я представил в 1968 г. подробное обсуждение квантованного распределения модулей упругости при сдвиге (Bell [1968,1]) в нулевой точке. Это распределение модулей упругости при сдвиге выражалось следующим образом:

$$\mu(0) = (2/3)^{s/2+p/4} A, \qquad (3.28)$$

где $s=1, 2, 3, 4, \ldots$; p — параметр структуры, принимающий значения 0 или 1, и A — универсальная постоянная: $A=2{,}89 \cdot 10^4$ кгс/мм².

Для ясности было сделано сравнение значений $(2/3)^{p/4}\,\mu(0)$, найденных экспериментально и предсказанных теоретически с использованием формулы (3.28), где $p=0$ или 1 для 57 элементов и

двух бинарных соединений, латуни 70—30 α и NaCl, показанное на рис. 3.129.

В табл. 107 экспериментальные значения для твердых тел сравниваются с предсказанными с помощью формулы (3.28) при соответствующем в каждом случае значении p. Можно заметить, что для большинства этих кристаллических тел $p=0$. Я определил универсальную

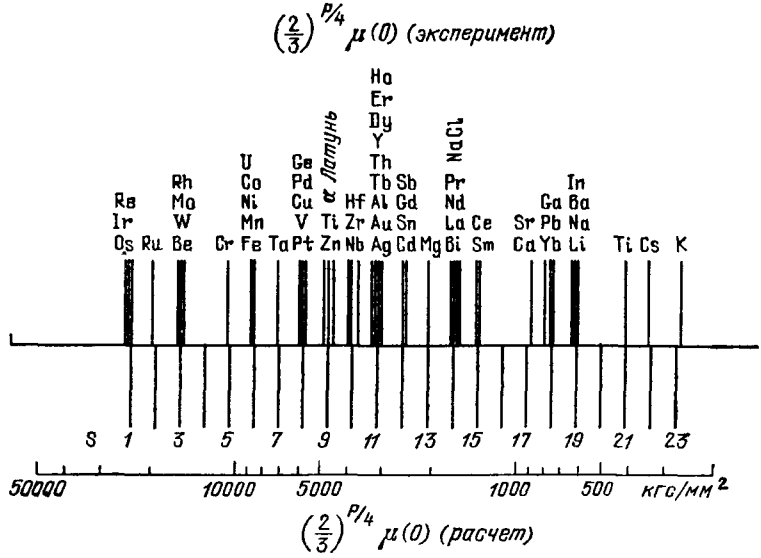


Рис. 3.129. Сравнение среднего экспериментального значения μ (0) с распределением Белла согласно формуле (3.28). Отдельные распределения при $p=0$ и $p=1$ показаны как единое распределение путем сравнения расчетных значений $(2/3)^{p/4}\mu$ (0) с экспериментальными.

постоянную A из многочисленных опытов с алюминием, выполненных при многих температурах, включая 4,2 К.

В монографии (Bell [1968,1]) в 1968 г. (см. также разделы 3.42 и 3.43 выше) я описал обширное исследование зависимости постоянных упругости от температуры, которое привело к определению надежных значений в нулевых точках для этих 59 изотропых твердых тел. То, что такое квантованное распределение значений характеризует модули упругости при сдвиге (и, как мы сейчас увидим, также характеризует модули упругости E) элементов и таких бинарных соединений, как α-латунь и NaCl, очевидно, имеет большое значение для понимания структуры кристаллических тел и вида отклика для этих тел. Тот факт, что распределение было обнаружено попутно при изучении конечных деформаций, на несколько порядков больших, чем максимальные амплитуды деформаций, для которых экспериментально определялись эти модули, наводит на мысль о существовании фундаментального единства в механике кристаллов. Это единство охватывает ряд состояний, к которым отно-

сятся значения модулей, по-видимому, независимо от кристаллической структуры, от того, является ли кристаллическое тело металлом или нет, и т. д., и для которых сравнения твердых тел должны производиться при одной и той же гомологической температуре. Экспериментально найденные значения модулей, которые я использовал в этом исследовании, включали экспериментальные результаты, опубликованные в литературе по физике металлов в течение прошедших 50 лет. Представив эти данные, я расширил область значений, включив туда очень большую часть надежных экспериментальных результатов XIX и XX столетий.

Образцы, использованные в целях науки о механике сплошных твердых сред, поставлялись как плоды искусства металлургии. Обычно цели металлургической технологии, в какой-то степени противоположные целям металлургической науки, состоят в изготовлении стабильных материалов с высоким пределом упругости и обладающих особыми свойствами, предписываемыми непосредственными практическими нуждами. В течение большей части минувших полутораста лет на наши знания или отчасти создание неправильных представлений в этой области механики влияло то, какие из образцов указанной категории материалов оказывались доступными для целей научных исследований. Например, для таких металлов, как цинк, технические справочники редко содержат значения модулей или, если они и приводятся, то диапазон этих значений так широк, что с таким же успехом можно было бы и не приводить никакого значения. Цинк, подобно многим другим материалам, весьма нестабилен в отношении параметров деформирования, однако и более стабильные материалы, такие, как алюминий, медь, железо, могут быть поставлены в условия, в которых они проявляют подобную неустойчивость, просто в результате изменения их тепловых и механических предысторий, т. е. рецептов, принятых в прикладной металлургии для материалов с устойчивыми свойствами.

Около 20 лет тому назад при исследовании больших деформаций, включая пластические волны при конечных деформациях, я заинтересовался изучением кристаллических тел, для которых тепловые и механические предыстории изменялись в большей мере, чем это обычно бывает согласно описаниям в известных мне литературных источниках. Результаты этих исследований, которые привели к моему открытию дискретного распределения значений модулей соответствующих нулевой точке в изотропных телах, явились значительным дополнением к аналогичным результатам по дискретному распределению значений коэффициентов парабол, которые я ввел для описания функции отклика при нагружении в условиях конечных деформаций. Результаты исследования также указывают на вероятность того, что модули отдельных изотропных кристаллических тел могут переходить от одного устойчивого значения для данного материала к другому дискретному устойчивому значению согласно квантованным распределениям, задаваемым фор-

мулой вида (3.28), в которых s принимает различные целочисленные значения.

Соответственно, в середине 60-х гг. я принялся за экспериментальное исследование модулей поликристаллических тел с различными деформационными и тепловыми предысториями. Я нашел, что для всех тщательно исследовавшихся материалов в опытах с нагружением мертвой нагрузкой модули соответствовали мультимодульности (т. е. наличию у одного тела нескольких дискретных значений касательного модуля.— *А. Ф.*), описываемой квантованными распределениями вида (3.28) (см. также раздел 2.27).

Я поставил опыты, чтобы исследовать вопрос мультимодульности, во-первых, чтобы продемонстрировать, что такое распределение, как распределение вида (3.28), действительно существует для экспериментально определенных значений для данного материала, и, во-вторых, чтобы выяснить детали такого поведения в зависимости от тепловых и механических предысторий. Поликристаллические образцы из алюминия, меди, магния, железа, цинка и латуни 70-30α были отожжены (нагреты до высоких температур и остужены в горне) и проверены на размер зерен и чистоту. Эксперименты по растяжению или сжатию мертвой нагрузкой осуществлялись на простой нагружающей машине, которая была построена для этой цели. Машина и многие экспериментальные результаты описаны в монографии (Bell [1968,1]) [1]) 1968 г. Приложение нагрузки осуществлялось либо непрерывно при помощи налива воды струей, либо дискретно — добавлением малых количеств песка. Несколько экспериментов было осуществлено также на машинах, в которых нагружение мертвой нагрузкой достигалось поддержанием плавающей балки в постоянном равновесии. Во время этих опытов осуществлялось много циклов разгрузки и повторного нагружения как без увеличения, так и с увеличением остаточной деформации, которая появлялась после приложения нагрузки, превышающей максимальную нагрузку предыдущего цикла. Следовательно, каждое новое нагружение имело хорошо определенную тепловую и механическую предысторию, начиная от предварительного высокотемпературного отжига.

Как это иллюстрируется нижеприводимыми численными данными, результаты этих экспериментов определенно устанавливают, что ожидаемая мультимодульность действительно имеет место и наклоны касательной к графику зависимости σ—ε хорошо согласуются количественно с дискретным распределением, найденным мною. В некоторых случаях первый наклон касательной, проведенной к графику функции $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ в начале координат, соответствует значению целого s, отличному от того, которое дает устойчивое значение модуля упругости, и после возникновения некоторого небольшого значения напряжения происходит переход, названный мною

[1]) См. рис. 3.2 на стр. 55 и гл. V.

переходом второго порядка, к еще одному значению модуля упругости, соответствующему другому целочисленному значению s. В других случаях начальный наклон соответствовал устойчивому значению s вплоть до некоторого уровня напряжения, при котором происходил скачок второго порядка; при дальнейшем росте напряжения имела место аналогичная картина, причем каждый скачок соответствовал своему изменению целочисленного значения s.

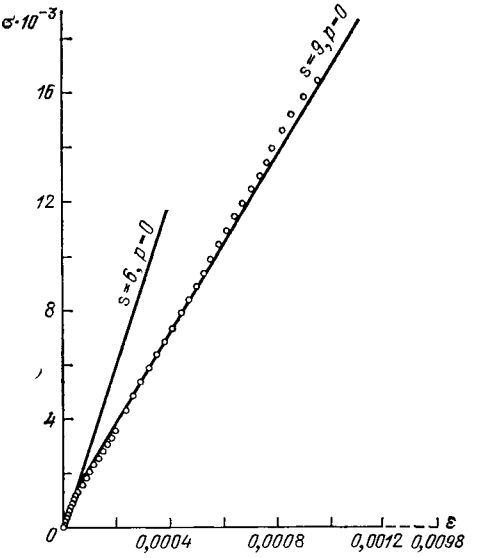


Рис. 3.130. Исследование Белла (1968) (опыт № 1283 с поликристаллическим железом 99,85% чистоты, отожженным в течение 48 часов при 1640°F, опыт проведен при 300 К);два значения модуля упругости, наблюдаемые до возникновения текучести; начальное значение модуля при $s=6$, $p=0$ равно $E=29{,}7\cdot10^6$ фуит/дюйм² (20 900 кгс/мм²); при $s=9$, $p=0$ равно $E=16{,}2\cdot10^6$ фунт/дюйм² (11 400 кгс/мм²), ε — деформация, σ — напряжение в фунт/дюйм².

Примером второй ситуации был эксперимент при комнатной температуре с поликристаллическим железом 99,85% чистоты, отжигавшимся 48 часов в соответствующей атмосфере при 1640°F, из которого я получил результаты, показанные на рис. 3.130.

Кружочки на рис. 3.130 соответствуют опытным результатам, а сплошные линии (тангенсы углов, составляемых ими с осью ε) соответствуют формуле (3.29), полученной путем комбинирования соотношений (3.27) и (3.28), а также зависимости, устанавливающей связь между E, μ и ν для изотропных тел,

$$E = d\sigma/d\varepsilon = 2(1+\nu)\,1{,}03\,(2/3)^{s/2+p/4}\,A\,(1-T/(2T_m)); \qquad (3.29)$$

$E=20\,900$ кгс/мм² — это устойчивое значение при комнатной температуре, соответствующее $s=6$. Переход к предсказанному значению $s=9$, для которого $E=11\,370$ кгс/мм², происходил при напряжении, равном приблизительно 12 кгс/мм². Значение $E=11\,370$ кгс/мм² строго сохранялось вплоть до возникновения в образце текучести,— это яркий пример существования такой мультимодульности в хорошо изученном материале. Другие примеры для железа, начальный модуль которого не соответствует устойчивому

значению при $s=6$, $p=0$, показаны на рис. 3.131. Эти образцы отжигались в течение часа при 1200°F.

Я привел много примеров такой мультимодульности (для модуля упругости E) для ряда изотропных тел (Bell [1968,1] гл. V). Например, для магния, устойчивый модуль которого имеет место при $s=13$, было показано, что в случае отжига при высокой температуре и охлаждения в горне он может иметь уменьшенное значение модуля, соответствующее значению индекса $s=15$. Здесь разница не малая: новый модуль при $s=15$ равен $E=2980$ кгс/мм², т. е. на 1/3

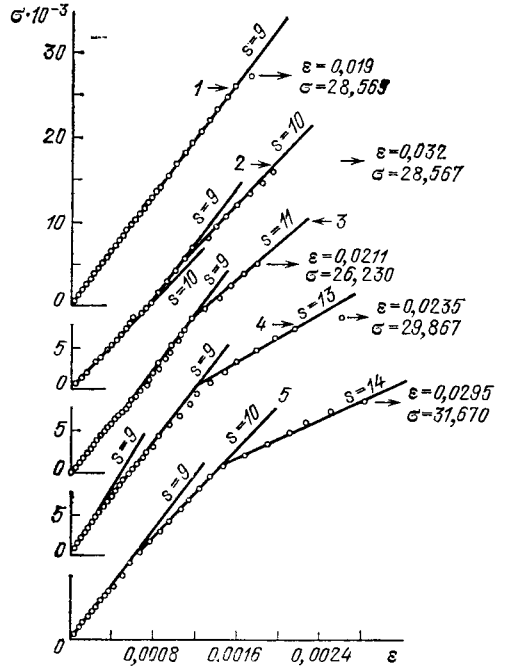


Рис. 3.131. Исследование Белла 1968) (опыты № 1250, 1244, 1242, (252, 1251, проведенные при 300 К I отожженым в течение одного часа сри 1200°F поликристаллическим железом 99,85% чистоты); распределение модулей E для железа. Стрелка указывает на точку, в которой наступает текучесть, при этом даны соответствующие значения напряжения и деформации. σ — напряжение фунт/дюйм², ε — деформация, *1* — опыт № 1250, *2* — опыт № 1244, *3* — опыт № 1242, *4* — опыт № 1252, *5* — опыт № 1251. По оси ординат отложено $\sigma\cdot10^{-3}$ фунт/дюйм².

меньше, чем устойчивое значение $E=4470$ кгс/мм² при $s=13$. На рис. 3.132, *а* показаны результаты двух экспериментов с магнием, так же как и экспериментов, демонстрирующих мультимодульность никеля, для которого устойчивый модуль соответствует $s=6$, $p=0$, и меди, устойчивый модуль которой отвечает $s=8$, $p=1$. На рис. 3.132, *б* приведено несколько результатов, полученных в экспериментах с холоднокатаной сталью и закаленным железом.

Я также показал примеры мультимодульности, которые имеют место в процессе нагружения и разгрузки полностью отожженного поликристаллического алюминия низкой и высокой чистоты. Одно интересное соотношение было получено несколько лет тому назад в моей лаборатории как часть работы Хартмана (Hartman [1967, 1]) над докторской диссертацией при эксперименте с отожженной ла-

тунью 70-30α. Это был опыт на растяжение мертвой нагрузкой, осуществленный на установке, которая использовалась в моих опытах с другими материалами. Результаты этого опыта показаны на рис. 2.84, где сплошные линии в каждом примере изображают прямые с наклонами, предсказанными на основании формулы (3.29).

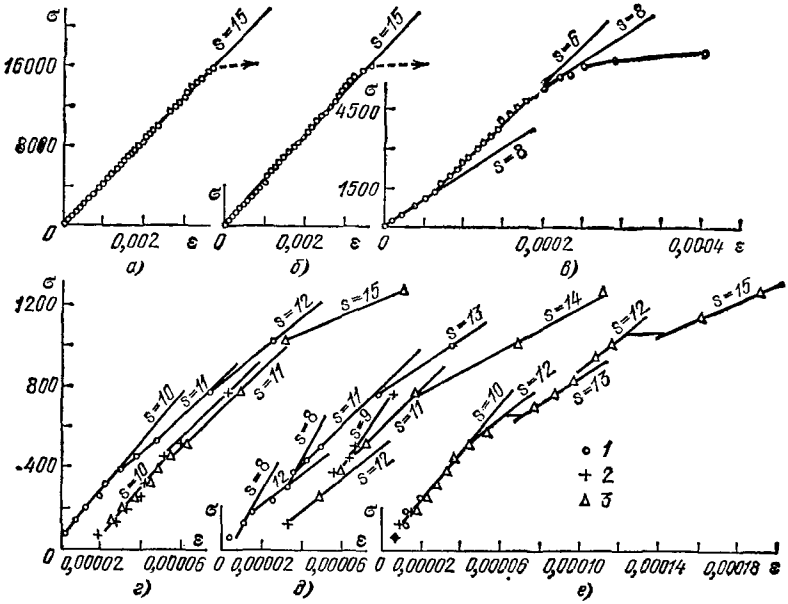


Рис. 3.132. Исследование Белла (1968) распределение модулей E (кружки, треугольники, крестики — эксперимент, сплошные линии — графики, соответствующие функции (3.28) при указанных численных значениях s), ε — деформация, σ — напряжение в фунт/дюйм^2, *1* — первое нагружение, *2* — первая разгрузка, *3* — второе нагружение. *а*) Опыт № 1282 с поликристаллическим магнием; *б*) опыт № 1284 с поликристаллическим магнием; *в*) опыт с отожженным поликристаллическим никелем (опыт выполнен Филби (Filbey); *г*) опыт № 1296 с поликристаллической медью; *д*) опыт № 1295 с поликристаллической медью; *е*) опыт № 12.3 с поликристаллической медью.

В свете моего открытия 60-х гг. квантованной структуры модулей изотропного тела представляется заманчивым сделать обзор результатов экспериментирования XIX столетия, когда предписания справочников для тепловых и механических предысторий, стандартизированные формы образцов и жесткие испытательные машины еще не были широко распространенными как сегодня [1]).

[1]) Многие современные экспериментаторы, использующие стандартные жесткие испытательные машины в течение многих лет никогда не имели возможности осуществить опыт с мертвой нагрузкой. Даже на жестких машинах обсуждаемое явление как-то давало о себе знать. Интересно заметить, что, после того как я описал открытие этой мультимодульности несколько лет тому назад, многие лица сообщали мне об аналогичных наблюдениях, которые до этого они приписывали особенностям данного образца или затруднениям, связанным со спецификой испытательной машины. Такие данные изредка публиковались после первого десятилетия XX столетия.

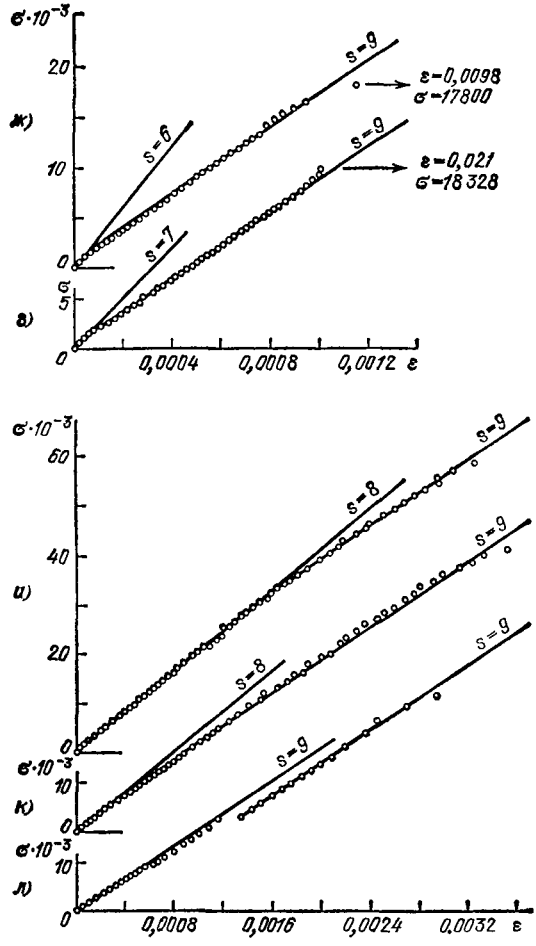


Рис. 3.132. (продолжение). *ж)* опыт № 1285 с поликристаллическим железом 99,85% чистоты, отожженным в течение 48 часов при 1640 К, температура проведения опыта 300 К; *з)* опыт № 1280; материал и условия проведения опыта те же, образец отжигался в течение 24 часов при 1640 К на *ж)* и *з)* стрелка указывает на точку, в которой наступает текучесть, при этом даны соответствующие напряжения и деформация; *и)* опыт № 1270 с холоднокатаной поликристаллической сталью при температуре 300 К; *к)* опыт № 1271 с холоднокатаной поликристаллической сталью при температуре 300 К; *л)* опыт № 1245 с поликристаллическим твердым железом при 300 К. Во всех случаях на осях ординат отложено $\sigma \cdot 10^{-3}$ фунт/дюйм^2.

При просмотре научных работ в связи с написанием книги я нашел многочисленную информацию об экспериментальном определении значений модулей, выполненном в XIX и XX столетиях для материалов, рассмотренных и мною, согласующуюся с обсуждаемым дискретным распределением в соответствии с мультимодульностью. Например, уже в 1784 г. Кулон (Coulomb [1784, 1]) получил значение

модуля упругости при сдвиге для железа (при предполагаемом удельном весе 7,9) в опытах по крутильным колебаниям, равное 7580 кгс/мм², и для латуни — значение 2730 кгс/мм² (при удельном весе 8,6). Для этих материалов, согласно формуле (3.27), получаются модули в нулевой точке, равные соответственно $\mu(0)=$ $=8060$ кгс/мм² и $\mu(0)=3040$ кгс/мм². Первое из них несколько меньше, чем устойчивое значение 8680 кгс/мм² для железа, полученное по формуле (3.28) в соответствии с $s=6$, но второе значительно ниже устойчивого значения для латуни, равного 4660 кгс/мм² и отвечающего $s=9$. Значение 3040 кгс/мм² близко к получаемому $\mu(0)=$ $=3110$ кгс/мм² при $s=11$ устойчивому значению для алюминия, золота и серебра. Таким образом, низкое значение модуля упругости для латуни, полученное Кулоном, породившее многочисленные комментарии в начале XIX столетия, и отличие которого от других значений было слишком велико, чтобы объясняться его ошибкой опыта, опустилось до уровня, соответствующего модели квантования значений упругих постоянных.

Выше, в разделе 3.8, я довольно подробно описал полемику, относящуюся к началу XIX столетия, по поводу разницы между численными значениями модуля упругости E, полученными Хладни и Био. Хладни (Chladni [1817, 1], [1822,1]), следя за частотой продольных колебаний стержней, получал данные, по которым мог быть определен модуль упругости E; Био (Biot [1809,1]), как мы помним, получил значение модуля упругости E для железа при измерении скорости распространения волн в трубе почти километровой длины. Я также отметил [1]), что многими десятилетиями позднее, в середине XIX столетия, полемика была оживлена экспериментами Вертгейма и Бреге (Wertheim et Breguet [1851, 1]), получившими сильно отличающиеся значения E при измерении скоростей волн в трехкилометровой железной проволоке, которые сравнивались со значениями, полученными из опытов с продольными колебаниями куска той же проволоки. В табл. 108 сравниваются значения E, найденные для железа экспериментально, а также средние значения, определенные Дюло (Duleau [1813, 1], [1820, 1]) для железа с квантованным распределением (3.28) при указанных целочисленных значениях индекса s. Очевидно, что получение отличающихся одно от другого значений модуля упругости было обычным явлением, когда изготовление образцов заметно индивидуализировалось в каждой лаборатории. Однако точно учтенные различия (в лучше определенных условиях), т. е. различие современных технологических спецификаций для стабильных материалов создают благоприятную возможность наблюдать существующий теперь больший порядок.

Я привел (Bell [1968, 1]) аналогичные иллюстрации существования множества значений модуля упругости по данным, полученным

[1]) См. раздел 3.32.

Таблица 108

Сравнение значений модуля E для железа, полученных в ранее проведенных исследованиях

s	Расчетные значения E согласно формуле (3.29) Белл (1968) (кгс/мм²)	Вертгейм; Вертгейм и Брере (1851) (кгс/мм²)	Дюло (1811) (кгс/мм²)	Био (1809) (кгс/мм²)	Хладни (1787) (кгс/мм²)
5	25 500	—	—	—	26 000 (вибрационный)
6	20 800	20 869 (квазистатический)	20 900 (квазистатический)	—	—
7	16 900	16 950 (квазистатический)	—	—	—
8	13 850	13 150 (вибрационный)	—	—	—
9	11 300 [а]	—	—	10 600 [б] (по скорости волны)	—
10	9250	9 620 (по скорости волны)	—	—	—

[а] См. данные на рис. 3.130 и 3.131 для современных опытов при s=9.
[б] Био не имел значения плотности для своего чугуна. Его расчеты основаны на значении плотности 7,9.
[в] В скобках указан характер испытания.

Таблица 109

Материал	Количество значений	$\mu(0)$, вычисленное по данным Трюэлайзена 1908 г. (кгс/мм²)	$\mu(0)$, определенное по Беллу в 1968 г. (кгс/мм²)	s	p	Материал	Количество значений	$\mu(0)$, вычисленное по данным Трюэлайзена 1908 г. (кгс/мм²)	$\mu(0)$, определенное по Беллу в 1968 г. (кгс/мм²)	s	p
Al	5	3113	3110	II	0	Ni	I	8321	8580	6	0
Cu	5	5117	5160	8	I	Cd	I	2519	2540	12	0
Ag	I	3222	3100	II	0	Pb	I	742	750	18	0
Au	4	3000	3100	II	0	Латунь	I	3872	3810	10	0
Fe	2	8735	8580	6	0						

Вертгеймом и Кельвином (Kelvin (William Thomson) [1880, 1]) в XIX столетии. Так как открытие квантованного распределения (3.28) было основано на подробном анализе большого числа экспериментальных значений модулей упругости изотропных тел, полученных в XX столетии, интересно сравнить здесь данные Фохта (Voigt [1893, 1]) и Грюнайзена (Grüneisen [1908, 1]) конца XIX—начала XX столетий, которые описаны выше. Такое сравнение для указанного целочисленного индекса s в формуле (3.28) приведено в табл. 109 и 110. Экспериментально определенные Фохтом и Грюнайзеном при комнатной температуре значения были приведены к значениям, соответствующим абсолютному нулю при помощи соотношения (3.27).

Таблица 110

Материал	$\mu(0)$, вычисленное по усредненным данным Фохта 1893 г. (кгс/мм²)	$\mu(0)$ определено по Беллу в 1968 г. (кгс/мм²)	s	p	Материал	$\mu(0)$, вычисленное по усредненным данным Фохта 1893 г. (кгс/мм²)	$\mu(0)$ определено по Беллу в 1968 г. (кгс/мм²)	s	p
Al	2980	3110	11	0	Латунь	4120	4210	9	1
Бронза	4520	4660	9	0	Ni	8340	8580	6	0
Cd	3170	3110	11	0	Ag	3240	3110	11	0
Fe	5540	5720	8	0	Сталь (среднее из шести)	8700	8580	6	0
Au	3100	3110	11	0					
Cu	5210	5160	8	1	Bi	1660	1690	14	0
Mg	1975	2070	13	0	Zn	4750	4660	9	0
					Sn	2400	2540	12	0

В частности, следует заметить, что по данным Грюнайзена значение модуля для латуни соответствует $s=10$ вместо более обычного значения, соответствующего $s=9$, $p=0$, а значение, полученное Кулоном, соответствует $s=11$, $p=0$. Такое же близкое соответствие между экспериментальными значениями модулей сдвига и предсказанными из моего распределения модулей упругостей при сдвиге в нулевой точке для изотропных тел было получено для данных Фохта 1893 г., усредненных по образцам, взятым вдоль различных направлений одного бруса.

Хартман (Hartman [1967,1], [1969,1]) показал, что устойчивое значение модуля упругости при комбинации значений целочисленных параметров $s=9$, $p=0$ для латуни 70-30 α имеет место при содержании меди в составе сплава менее 90%; при приближении к 90% возникает новое устойчивое значение модуля, соответствую-

щее комбинации значений $s=9$, $p=1$. Я показал, что цинк имеет устойчивое значение модуля упругости при $s=9$, $p=0$, в то время как устойчивое значение модуля упругости для меди имеет место при $s=8$, $p=1$.

Очевидно, исследование квантованного распределения постоянных упругости и связанных с ним переходов второго рода для касательного модуля при малых деформациях является основным для понимания деформации кристаллов. От самых ранних экспериментальных определений постоянных упругости и до настоящего времени модули упругости изотропных поликристаллических тел, как можно видеть, подчиняются упоминавшемуся выше квантованному распределению. Этому открытию, однако, еще меньше десяти лет (Bell [1968, 1], [1964, 1], [1965,2], [1967,2]), так что должно пройти еще немало времени, прежде чем будут постигнуты все его разветвления как в механике сплошных сред, так и в атомной механике.

3.45. Анизотропия

Как мы видели, Вертгейму было предложено (Verdet [1861,1]) запланировать распространение своих экспериментальных исследований на анизотропные монокристаллы. После его безвременной смерти в 1861 г. идея прозябала в течение 13 лет. Затем в 1874 г. Г. Баумгартен (Baumgarten [1874,1]) определил модули в опытах на изгиб для известкового шпата и в том же году Фохт (Voigt [1874,1]) в своей докторской диссертации, выполненной в Кенингсберге, описал квазистатические опыты на изгиб и кручение для определения трех постоянных упругости анизотропного кубического кристалла каменной соли.

Бюффон (Buffon [1741,1]) в начале XVIII столетия обратил внимание на важность учета направления волокон при исследовании прочности дерева. Вертгейм лично выполнил (Wertheim et Chevandier [1846,1]) первое детальное исследование постоянных для анизотропных материалов, отбирая образцы древесины вдоль стволов деревьев, а в поперечном сечении — в направлении радиуса и касательной к годичным кольцам.

Конечно, успех, которого достиг Фохт при исследовании анизотропии в течение 36 лет после защиты им докторской диссертации, достигший кульминации в его классическом трактате (Voigt [1910,1]) 1910 г. по этому вопросу, делает интересными размышления по поводу того, кто еще мог иметь такое сочетание настойчивости теоретика и стоицизма экспериментатора, чтобы выполнять сотни вычислений, связанных с тысячами опытов, требовавшихся для определения многочисленных постоянных упругости для различных классов кристаллов. Будучи первооткрывателем, Фохт в особенности был вынужден пережить все неудачи, порой связанные с ошибочными исходными предпосылками, все повторения, знакомые только тем, кто вступал в широкую область новых исследований. Экспери-

ментальные трудности лишь в одном случае требовали повторения приблизительно 2000 измерений для кристаллов топаза и барита — исследование, которое Фохт охарактеризовал как утомительное предприятие.

Первое исследование Фохта, связанное с каменной солью (Voigt [1876,1]), дало для трех постоянных упругости монокристалла, имеющего кубическую анизотропию, следующие значения: $c_{11}=8300$ кгс/мм^2, $c_{44}=5300$ кгс/мм^2 и $c_{12}=1292$ кгс/мм^2. Эта была первая полная определенная таким образом система значений постоянных упругости. Значения были совершенно неверными, потому что данные по квазистатическому кручению были определены в рамках теории, предложенной его учителем — профессором Францем Нейманом, которая была неприменима к анизотропным материалам. Восемью годами позднее (Voigt [1884,1]), в 1884 г., пересчет результатов тех же самых опытов по теории кручения Сен-Венана дал для анизотропных тел $c_{11}=4600$ кгс/мм^2, $c_{44}=1190$ кгс/мм^2 и $c_{12}=1260$ кгс/мм^2. Эти числа особенно важны потому, что атомистическая теория Пуассона — Коши, основанная на концепции центральных сил, предсказывает, что $c_{12}=c_{44}$; условие, несомненно не выполнявшееся для ранних ошибочных результатов, найденных по теории Неймана, но грубо приближенно выполняющееся при расчете по тем же самым данным, но на основе правильной теории Сен-Венана.

С большей тщательностью, проявленной при изготовлении и полировке образцов, и большей точностью в технике эксперимента Фохт повторил (Voigt [1884,1]) все эксперименты по изгибу и кручению каменной соли: 100 опытов первого и 32 — второго вида. Отчасти изменившиеся новые значения постоянных упругости были: $c_{11}=4753$ кгс/мм^2, $c_{44}=1313$ кгс/мм^2 и $c_{12}=1292$ кгс/мм^2, двадцатью пятью годами позднее эти результаты (Voigt [1910,1]) были еще раз слегка изменены на: $c_{11}=4770$ кгс/мм^2, $c_{44}=1320$ кгс/мм^2 и $c_{12}=1290$ кгс/мм^2. Эти величины можно сравнить с итогами, подведенными Хирмоном в 1969 г., которые приведены в таблицах постоянных упругости Ландольт-Бёрнштейна [1]: $c_{11}=4970$ кгс/мм^2, $c_{44}=1295$ кгс/мм^2 и $c_{12}=1285$ кгс/мм^2.

Студент Фохта, Х. Кланг (H. Klang [1881,1]), в 1881 г. определил постоянные упругости плавикового шпата. (В описании работы Кланга Фохт ссылался на С. А. Корномиласа, чью докторскую диссертацию в Тюбингене в 1877 г. по гипсу и слюде он, на основе своих экспериментов, подверг резкой критике. Корномилас, говорил Фохт, был всего лишь одним человеком, экспериментально определившим постоянные упругости в десятилетие, следовавшее за его собственными исследованиями 1874 г. В 1884 г., когда Фохт (Voigt [1884,1]) получил повторно вычисленные и заново пересмот-

[1]) См. Бехман и Хирмон (Bechmann and Hearmon): Ландольт-Бёрнштейн (Landolt-Börnstein [1969, 1]).

ренные результаты по каменной соли, упоминавшиеся выше, он, кроме того, дал повторные вычисления по данным Кланга для плавикового шпата, которые также были неверно интерпретированы по формуле кручения Неймана. После этих первоначальных неудачных попыток в экспериментах и теории Фохт осуществил обширную программу экспериментов и интерпретации их результатов. Например, в 1887 г. он проделал трудную работу (Voigt [1887,1]) по определению девяти постоянных орторомбического топаза и барита ($BaSO_4$). Эти экспериментально найденные значения для двух указанных минералов и даны Хирмоном в таблицах упругих постоянных Ландольт-Бёрнштейна 1966—1969 гг. с указанием на хорошо известные трудности эксперимента, которые были преодолены Фохтом 80 годами ранее [1]). Фохт дал также в 1888 г. значения постоянных упругости для кристаллов кубической сингонии пирита (FeS_2) и сильвита (KCl) и для кристаллов кубической сингонии хлорида натрия — в 1893 г. Определения шести упругих постоянных для кристаллов тригональной сингонии известкового шпата (кальцита) ($CaCO_3$), кварца, турмалина, доломита и железного блеска или гематита (красного железняка) и для кристаллов ромбической сингонии — арагонита ($CaCO_3$) были подвергнуты полному экспериментальному и теоретическому исследованию при включении в его труд [2]) (Voigt [1910,1]) 1910 г.

Как и во всех таких случаях, когда развитие вопроса, в течение ряда лет связанного главным образом с единственной лабораторией, усовершенствование техники эксперимента отмечалось с некоторыми интервалами во времени. Получение маленьких кристаллических брусков различных необходимых ориентаций и измерения в них перемещения при осторожном приложении нагрузок, характер концевых опор, способ измерения перемещения и прикладываемой нагрузки — все это подвергалось тщательному рассмотрению. Проблемы состояния образца, получение достаточно больших кристаллов для выполнения многих измерений на одном и том же куске, методы вырезания и полировки образца, оценка влияния трещин и т. д. представляли собой главные препятствия. Как экспериментатор, понимая трудности, с которыми сталкивался Фохт, я, тем не менее, очень критически настроен по отношению к его методам совершенно произвольной, как мне кажется, оценки трения и других экспериментальных эффектов в виде числовых поправок, которые он вводил в свои данные. Я уже комментировал этот аспект его экспериментирования в разделе, посвященном удару, приведенном выше, и у меня имеются аналогичные замечания, которые я сделаю при рассмотрении его опытов по вязкости, описываемых ниже.

[1]) Значения для топаза в современных таблицах просто взяты непосредственно из результатов экспериментов Фохта 1887 г.

[2]) Эта работа была повторно опубликована в 1928 г. Я просмотрел только оригинальное издание 1910 г.

Определение постоянных упругости c_{ij} в случае обобщенного закона Гука как для трех независимых постоянных c_{11}, c_{12} и c_{44} для кристаллов кубической сингонии, так и для двадцати одной независимой постоянной для кристаллов, обладающих анизотропией наиболее общего вида, требует при квазистатическом исследовании измерения множества линейных перемещений и углов сдвига. Сами по себе, будучи просто затабулированы как экспериментальные результаты, они имеют малое значение и только подчеркивают тот факт, что исследуемое тело не является изотропным. В книгах «Учебник по физике кристаллов» (Lehrbuch de Kristallphysik) Фохта [Voigt [1910,1] или «Математическая теория упругости» Лява (Love [1927,1]) были подвергнуты критике теоретические аспекты проблемы для различных классов кристаллов. Хирмон в своем труде «Введение к прикладной теории упругости анизотропного тела» (Hearmon [1961,1]) в 1961 г. дал вводные соображения о комбинированном экспериментально-теоретическом подходе к проблеме.

Одним современным экспериментальным применением ультразвука является использование его для измерения скоростей продольных и поперечных волн в выбранных направлениях с целью определения того, что принимают за адиабатические значения постоянных упругости для кристаллов различных сингоний. Литература, содержащая эти числа, по большей части полученные при использовании стандартных промышленно изготовленных непортативных машин, воистину огромна. Алан Б. Смит и Ричард У. Дамон (Smith and Damon [1970,1]) в апреле 1970 г., как я отмечал выше, выпустили библиографию публикаций по микроволновому ультразвуку, которая потребовала 25 журнальных страниц, чтобы просто перечислить статьи за два десятилетия. Как отмечалось также нами выше, в 1966 г., с добавлением в 1969 г., Хирмон в Ландольт-Бёрнштейне (Hearmon [1966,1], [1969,1]) дал численные значения из литературы по ультразвуку для большого перечня кристаллов, включая элементы и химические соединения вместе со ссылками на источники, из которых были взяты числа.

В дополнение отметим, что статья Хирмона содержала очень много диаграмм постоянных упругости как функций температуры окружающей среды. Эти температурные данные, также взятые из литературы по ультразвуку, были использованы, чтобы вычислить температурные коэффициенты $T_{c_{pq}}$, определяемые по формуле

$$T_{c_{pq}} = \frac{1}{c_{pq}(300)} \frac{dc_{pq}}{dT}. \tag{3.30}$$

Табулированные значения $T_{c_{pq}}$ для различных элементов и соединений (представляющих собой кристаллы разных сингоний) даны в терминах комнатной температуры для различных диапазонов температуры и в них не учитывается влияние уровня температуры плавления, весьма различного для различных кристаллов. При вве-

дении указанного выше равенства (3.27) я обнаружил, что формула применима также для постоянной упругости c_{44} кристаллов кубической и гексагональной сингоний. В этом случае равенство (3.27) принимает вид [1]

$$\begin{aligned} &c_{44}(T/T_m) = c_{44}(0), && 0 \leqslant T/T_m \leqslant 0{,}06, \\ &c_{44}(T/T_m) = 1{,}03 c_{44}(0)\,(1 - T/(2T_m)), && 0{,}06 \leqslant T/T_m \leqslant 0{,}4. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Как и следовало ожидать, аналогичные результаты получены для температурной зависимости другой сдвиговой постоянной для металлов с кристаллами кубической сингонии: $c' = (c_{11} - c_{12})/2$.

Величине $T_{c_{pq}}$ из равенства (3.30) неправильно придается смысл величины, относящейся к комнатной температуре. При определении через значение в нулевой точке получаем $T_{c_{pq}} = 0$ при $T/T_m \leqslant \leqslant 0{,}06$ и $T_{c_{pq}} = -1{,}03/2T_m$ при $T/T_m > 0{,}06$.

Определение $T_{c_{pq}}$ через гомологическую температуру, конечно, дает во втором случае примерно одинаковое значение, приблизительно равное — 1/2 для всех рассмотренных тел (Bell [1968,1]).

Выше на рис. 3.128 я дал несколько сравнений. Наиболее интересным здесь фактом, если не касаться завершения исследования квантованной структуры значений в нулевой точке модулей изотропных элементов, было то, что из экспериментов при конечных деформациях этих тел (которые будут описаны в следующей главе; см. часть II), я нашел, что температурная зависимость модулей при очень больших деформациях линейная, коэффициентом в которой является выражение вида $(1 - T/T_m)$. Модуль упругости при сдвиге при бесконечно малых деформациях также линейно зависит от температуры; в этой линейной зависимости имеет место другое выражение коэффициента, а именно, $(1 - T/2T_m)$. Это различие имеет интересный и, может быть, серьезный смысл для атомных теорий, от параметров которых при отыскании конечных деформаций на основе дислокационных моделей зависит модуль упругости при сдвиге.

Исследование Фохтом линейной упругости анизотропных тел, начавшееся в 1874 г., привело, наконец, к исходу 60-х гг. XX века к тому же самому заключению, касающемуся нелинейности, которое для изотропного тела было весьма пространно описано выше, в гл. II. Определение коэффициентов сжатия

$$P_{c_{pq}} = \frac{1}{c_{pq}(0)} \frac{dc_{pq}}{dP}$$

при постоянной температуре, несколько значений для которых было дано Хирмоном в 1966 г. в его таблицах Ландольта — Бёрнштейна, началось с упоминавшихся выше опытов Давида Лазаруса (David Lazarus [1949,1]), проведенных в 1949 г. Между 1966 и 1969 г. экспериментальный интерес к упругим постоянным третьего порядка при нелинейной упругости в области малых деформаций был отражен в новом разделе таблиц Ландольта-Бёрнштейна, составленном

Бехманом и Хирмоном (Bechman and Hearmon [1969,1]). Количество постоянных третьего порядка c_{pqr} для различных кристаллических систем, не говоря о дополнительном определении для них температурных зависимостей, таково, что проблема истолкования численных значений на порядок сложнее той, которая возникала из-за громадного множества постоянных второго порядка.

В XX столетии в проблеме отыскания постоянных третьего порядка и оценки того, ка́к можно проделать такое огромное число измерений, чтобы получить желаемое количество от 6 до 56 постоянных, можно видеть исторически интересную во всех подробностях параллель с эволюцией идей и наблюдений Фохта в XIX веке. Отсылая читателя к доступным табулированным постоянным второго и третьего порядков, я подчеркиваю экспериментальную и теоретическую дилемму в интерпретировании данных о скорости волн в неодномерном пространстве в терминах скорости в одномерном. Интерес к супергармоникам, субгармоникам, взаимодействию фононов[2], энергетическому обмену между компонентами ультразвуковых волн и тому подобное позволяют полагать, что важность линейной аппроксимации может уменьшиться в одной из наиболее важных ее крепостей — атомной физике. Развитие нелинейных теорий распространения волн в изотропных и анизотропных телах, совместно с соответствующей теорией отражения волн в телах со свободными и смешанными граничными условиями для материалов как в предварительно напряженном состоянии, так и при нулевых напряжениях характеризуют XX столетие, точно так же, как XIX столетие, как мы теперь видим, характеризовалось использованием в значительной мере линейной аппроксимации.

Между 1891 и 1893 гг. Фохт начал выполнять программу исследования поликристаллических металлов, которая все еще сохраняет значительную важность, поскольку лишь немногие видели в этом достойный объект для продолжения исследования. Используя специально отлитые блоки из 14 различных металлов, включая шесть различных сталей, Фохт вырезал образцы в форме стержней, ориентированных вдоль различных направлений в блоке. Он ставил опыты на изгиб и кручение таким же образом, как с анизотропными кристаллами, чтобы установить, являются или нет эти металлы в поликристаллическом состоянии однородными и изотропными, как это обычно предполагается. Путем выяснения вопроса о том, уменьшаются ли экспериментально найденные значения E и μ в заданном направлении так же, как и средние их значения из определенных для разных направлений, он мог обнаружить неоднородность и анизотропность в случае, если одно из этих свойств или оба они одновременно имели место. Чтобы избежать влияния упругого последействия и минимизировать остаточную деформацию, Фохт производил вибрационные опыты, слегка напоминающие аналогичные, выполнявшиеся Купфером (Kupffer [1860,1]), и также столкнулся отчасти с некоторыми из тех затруднений, что и Купфер.

Он прикреплял массы к образцам. Из-за увеличившейся инерции стали выполнимыми вибрационные измерения, которые иначе было бы невозможно осуществить (вследствие большой скорости протекания процесса.— *А. Ф.*), но возникли новые трудности при истолковании данных. Поскольку частью программы Фохта было исследование коэффициентов демпфирования и их возможной зависимости от направления в одинаковых образцах, потребовались многочисленные небольшие эмпирические предположения, чтобы оценить сопротивление воздуха и т. п.

Для каждого образца, вырезанного из блока, Фохт затабулировал результаты ряда опытов, так что он имел значительное общее количество данных для вычисления окончательных средних значений (Voigt [1893,1]). Фохт комментировал наблюдавшуюся однородность и изотропию каждого материала и дал подробные описания их тепловых, механических и химических историй и тому подобных фактов. Эти условия для кажого из образцов были очень индивидуальными. Бронза, например, была замечательно однородной и изотропной [1]), в то время как другой крайностью было олово, не обладавшее этими свойствами. Он нашел, что алюминий и медь были в достаточной степени изотропными, но слегка неоднородными, тогда как латунь как раз наоборот.

Таблица III

Фохт (1893). Средние значения

Материал	E (гс/мм²)	μ (гс/мм²)	s_2/s	c/c_1
Al	$6{,}56\cdot10^6$	$2{,}578\cdot10^6$	2,55	2,66
Бронза	$10{,}59\cdot10^6$	$4{,}06\cdot10^6$	2,61	2,30
Cd	$7{,}07\cdot10^6$	$2{,}45\cdot10^6$	2,89	1,26
Fe	$12{,}82\cdot10^6$	$5{,}21\cdot10^6$	2,46	3,36
Au	$7{,}58\cdot10^6$	$2{,}85\cdot10^6$	2,66	2,02
Cu	$10{,}85\cdot10^6$	$4{,}78\cdot10^6$	2,27	6,43
Mg	$4{,}261\cdot10^6$	$1{,}710\cdot10^6$	2,49	3,06
Латунь	$9{,}217\cdot10^6$	$3{,}695\cdot10^6$	2,50	3,04
Ni	$20{,}34\cdot10^6$	$7{,}82\cdot10^6$	2,60	2,33
Ag	$7{,}79\cdot10^6$	$2{,}96\cdot10^6$	2,63	2,16
Сталь (среднее по 6 слнткам)	$20{,}87\cdot10^6$	$8{,}217\cdot10^6$	2,54	2,78
Bi	$3{,}19\cdot10^6$	$1{,}24\cdot10^6$	2,58	2,46
Zn	$10{,}30\cdot10^6$	$3{,}88\cdot10^6$	2,66	2,04
Sn	$5{,}407\cdot10^6$	$1{,}726\cdot10^6$	3,13?	—

[1]) Поэтому Фохт использовал это как своего рода норму при исследовании расширения и вязкости тел. Любопытно, что проверка его данных не подтвердила его заключения о превосходстве бронзы в отношении однородностн и изотропности над другими материалами.

Поскольку многие споры в экспериментальной механике сплошных сред концентрируются вокруг изотропиости или анизотропности, однородности или неоднородности и однородности и изотропности поликристаллических тел, я включил в табл. 111 средние значения E и μ, полученные Фохтом из большого числа данных для каждого из еще большего числа образцов, взятых по различным направлениям одного и того же блока. Данные, добавленные к этим из аналогичных более ранних исследований Фохта со стеклом, дают весьма полный свод значений для отдельного куска тела.

Фохт определил упругие податливости и жесткости, отношения значений которых внутри каждого из этих множеств дают количественную меру анизотропности. Я добавил к табл. 111 также и эти отношения, где при изотропности отношение податливостей должно быть 2,50, а отношение гораздо более чувствительных жесткостей 3,00.

3.46. Термоупругость

В гл. II (раздел 2.12) я довольно подробно описал замечательные экспериментальные исследования, явившиеся истоком для этой темы,— тепловые измерения при бесконечно малых упругих деформациях, выполненные Вебером в 1830 г. В гл. IV (раздел 4.39, часть II) я опишу тепловое поведение резины при конечных деформациях, рассмотренное Гафом (Gaugh [1805,1], [1806,1]) в 1805 г. и Джоулем (Joule [1859, 1] см. и [1857, 1, 2]) в 1859 г., и резины и органических тканей — рядом их последователей вплоть до настоящего времени. В гл. IV содержится также описание экспериментальных исследований термопластичности при конечных деформациях, выполненных Тейлором и Фарреном (Taylor and Farren [1925,2]), Тейлором и Квини (Taylor and Quinney [1934,2]) и Диллоном (Dillon [1962,1,2], [1963,2], [1966,2], [1967,2]) в XX столетии. Применительно к области бесконечно малых деформаций интерес к термоупругости имел в основном теоретический характер. Джоуль включил в статью 1859 г. описание деталей, относящихся к увеличению температуры, измеренной термопарой при малых растяжении и сжатии сварочного железа, чугуна, меди, свинца, стекла, большого множества образцов из сырой и сухой древесины, коровьей кожи и китового уса [1]), так же как и результаты экспериментов по тепловым свойствам резины при больших деформациях. Среди статей по экспериментам в механике сплошных твердых сред, вышедших в XIX столетии, эта была одна из наиболее часто цитируемых. Для всех материалов, исследованных Джоулем, кроме сырой древесины лавра и резины, температура, как и ожидалась, уменьшалась с увеличением объема при осевом растягивающем нагру-

[1]) Китовый ус в XIX столетии, конечно, имел некоторое технологическое значение.

жении и увеличивалась при сжатии. Для сырой древесины лавра и резины он наблюдал увеличение температуры в процессе растягивающего нагружения.

Главный интерес для Джоуля представляло сравнение определенных им значений с результатами, полученными на основе развивающихся теоретических идей Вильяма Томпсона (Кельвина), так как опыты были тесно связаны с этими концепциями. Джоуль получил достаточно хорошую для своего времени общую согласованность упомянутых данных, а именно, разница между экспериментом и теоретическим предсказанием при сжатии была 6% для железа, 15% для меди, 9% для свинца, 40% для стекла и 30% для дерева. Эти результаты иллюстрируют максимальные расхождения; имелись также примеры относительно более близкой согласованности эксперимента с теорией. Детальное обсуждение метода, данное Джоулем, при помощи которого он исследовал влияния на результат размера диаметра образца, и его стократное повторение измерений при нагружении и разгрузке для одного и того же уровня нагрузки, действующей на данный образец, делают работу Джоуля экспериментальной классикой, в полном соответствии с ее репутацией.

Джоуль добавил последнюю серию экспериментов, состоявшую в наблюдении изменений температуры при нагружении сжимающей нагрузкой, равной 7 фунтам, и разгрузке с последующими воздействиями на образец растягивающей нагрузки, также равной 7 фунтам, и разгрузки. Результаты, сильно менявшиеся от опыта к опыту, представляли собой усредненные значения четырех множеств инструментально найденных отклонений, равные — 1,40; +1,38; —1,34 и +0,88. Джоуль принял эту нагрузку как минимальную в выполняемых исследованиях.

В 1848 г. Персон (Person [1848,1]) попытался использовать данные Вертгейма по модулям, полученные четырьмя годами ранее, чтобы установить эмпирическую связь между упругими постоянными металлов и их скрытой теплотой плавления. Он предполагал, что отношение модулей упругости для элементов равно отношению значений для них скрытой теплоты плавления. Так, для цинка и олова он получил 2,17 как отношение модулей упругости и 1,97 как отношение значений скрытой теплоты плавления; для цинка и свинца эти отношения соответственно были 4,80 и 5,23; для олова и свинца равнялись 2,20 и 2,65 и для цинка и висмута были равны 2,28 и 2.22 (данные Вертгеймана из работы [1844, 1 (*a*)]).

Нет необходимости подробно рассказывать здесь о попытках Персона объяснить, почему значения отношений не совпадали точно, однако интересно, что он вызвался произвести измерение значений скрытой теплоты плавления для кадмия и серебра, для отношения которых он заранее предсказал значение, исходя из известных ему постоянных упругости для этих элементов. В статье описаны его калориметрические эксперименты. Результаты Персона

согласовывались с его предсказаниями достаточно хорошо для того, чтобы он смог утверждать, что отношения модулей упругости E и значений скрытой теплоты плавления близки друг к другу для попарно рассматриваемых элементов из числа следующих: олово, висмут, свинец, цинк, кадмий и серебро, т. е. для всех испытанных им металлов. Я сравнил значения некоторых отношений, полученные в XX столетии, с результатами Персона и нашел для следующих пар металлов: цинк/свинец 4,28 (5,23), олово/свинец 2,52 (2.42), цинк/олово 1,74 (1,97) и цинк/висмут 2,25 (2,22), что наводит на мысль о том, что предположение, выдвинутое Персоном 120 лет назад, в наши дни может вновь заслуживать внимания [1]).

Вторым после экспериментов Джоуля большим исследованием тепловых эффектов было то, которое выполнил Эрик Эдлунд (Edlund [1861,1], [1865,1]), сразу же после Джоуля, а именно в 1861 и 1865 годах. Находясь под влиянием работы Клаузиуса (Clausius [1849,1]), выполненной на 12 лет раньше, Эдлунд также использовал термопары, чтобы изучать изменения температуры как функцию изменения объема деформируемого тела. Сделав аккуратные ссылки на пионерные работы основоположника термоупругости Вебера и на аналогичные исследования Джоуля, Эдлунд, в очень тщательно поставленных опытах, помещал образцы в оболочки с постоянной температурой и, используя удлиненные проволоки термопары, чтобы избежать влияния циркуляции воздуха и тепла тела экспериментатора, с помощью подзорной трубы снимал показания со значительного расстояния. Он продемонстрировал, что вне зависимости от того прилагалась или снималась нагрузка, повышение и понижение температуры были фактически одинаковыми.

Статья Эдлунда 1861 г. содержала много подробностей, касавшихся его опытов, которые указывали на общие трудности таких исследований термоупругости тел при малых деформациях. Его главным вкладом было обеспечение бóльшей точности, чем в предшествовавших ему наблюдениях. Курьезно то, что, очевидно, не прочитав цитировавшихся им работ, Эдлунд верил, что он был первым, кто экспериментально обнаружил, что, когда объем металла увеличивается под действием внешних сил, температура уменьшается и, когда объем возвращается к исходному значению, температура поднимается. Демонстрация им линейной зависимости

$$x = \pm AP$$

между изменением температуры x и приложенной нагрузкой P была первой экспериментальной попыткой обосновать связь между температурой и деформацией. К 1865 г. в его второй статье зависимость между этими величинами приобрела следующий вид:

$$x = AP + BP^2$$

[1]) В скобки помещены значения отношений, полученные Персоном.

и целью этих продолжавшихся исследований было определение значений постоянных A и B. Эдлунд сформулировал выводы по результатам своих опытов с серебром, сталью, медью, латунью, платиной и золотом, сравнивая данные наблюдений и предсказания; он получил отличия первых от вторых в процентах, соответственно равные: 0,1; 0,16; 6,4; 1,9; 9,0 и 0,86%.

Много внимания тех, кто интересовался тепловыми явлениями, связанными с деформацией, было направлено на то, чтобы избежать трудностей измерений, вызванных тепловым последействием. Я ссылался на эксперименты Томлинсона (Tomlinson [1886,1]), проводившиеся в 80-х гг. XIX века с использованием мертвой нагрузки, Дж. О. Томпсона (Thompson [1891,1]) в 90-х гг. XIX в. и Грюнайзена (Grüneisen [1906,1]) в 1906 г. Во всех этих опытах экспериментаторы были связаны с проблемами, сопутствующими измерениям с большой точностью при нагружениях тел мертвой нагрузкой. Под этот общий заголовок, конечно, попадают тепловое расширение тел при нулевой нагрузке и определение удельной теплоемкости, которые оба представляли интерес для экспериментаторов начала XIX столетия. Точные значения относительного изменения объема и большая современная литература об удельной теплоемкости образуют часть экспериментального фундамента соответствующей области физики.

3.47. Вязкоупругость

Каждому с колыбели известно из повседневного опыта, что звук и видимое движение колеблющейся конструкции затухают со временем. Первым зарегистрированным экспериментом, имевшим целью феноменологическое наблюдение этого поведения в области линейной вязкоупругости, были опыты Кулона в 1784 г. (Coulomb [1784,1]) [1]). Его результаты, которые мы рассматривали выше (раздел 3.4), были даны достаточно подробно, чтобы продемонстрировать проблемы, с которыми столкнулись при продолжении исследований в этой области. Ранний экспериментальный интерес к вязкоупругому демпфированию отчасти был обусловлен желанием преодолеть трудности, связанные с ослаблением колебаний элементов гальванометра при осуществлении других опытов, но некоторые исследователи, подобно Кельвину (Kelvin (William Thompson) [1865,1]) в 1865 г., рассматривали вязкоупругость как проблему, имеющую самостоятельное значение. Кольрауш (Kohlrausch [1863,1]), как и некоторые другие, пытался установить связь между упругим последействием Вебера (Weber [1835,1], [1841,1]) и эффек-

[1]) Как показал Труселл (Truesdell [1960, 1]), Мерсенне (Mersenne [1636; 1]) описал результаты измерений затухания. Такие описания при отсутствии подробностей, характерные для многих очень ранних опытов, с точки зрения экспернментатора, были скорее наводящимн иа размышления, нежели окоичательными.

тами демпфирования при колебаниях. Как хорошо известно, этот предмет (вязкоупругость) превратился в объект большого теоретического значения в работах Больцмана (Boltzmann [1882,1]) и Кельвина и других в конце XIX столетия.

Несомненно, наиболее известной экспериментальной работой XIX столетия была статья [1]) Кельвина (Kelvin (William Thompson) [1865,1]) 1865 г. Эксперименты для его исследования были выполнены Дональдом МакФарлейном, официальным ассистентом профессора по натуральной философии в университете Глазго. Признавая, что работы Кулона послужили толчком к его исследованиям, Кельвин в ряде опытов с крутильным маятником на цилиндрических проволоках изменял веса, моменты инерции и начальные амплитуды; все по образцу опытов Кулона. Однако, в добавление, Кельвин исследовал вязкое ослабление образцов, которые в течение некоторого времени подвергались непрерывным вибрациям, в сравнении с поведением аналогичных образцов, которые в течение такого же отрезка времени оставались в покое. Подобно Кулону, Кельвин вел счет числа циклов, требовавшихся, чтобы уменьшить амплитуду с 20 до 10 единиц. Он обнаружил, что в случае алюминия процесс протекал гораздо быстрее, когда начальная амплитуда была равна 40, чем когда она была равна 20 единицам. Он заметил, что чем выше скорость, тем больше потеря энергии за один размах; он заметил также любопытный факт, что, когда нагрузка увеличивалась, вязкость сначала сильно увеличивалась, но затем день за днем она постепенно уменьшалась, пока не достигала значения, которое имела при малой нагрузке. Проволока, совершавшая непрерывные колебания весь день, показывала намного большее вязкое демпфирование в последующие дни, чем аналогичный, находившийся в состоянии покоя образец. Перемена ролей образцов обнаружила, что этот эффект действительно вызывался продолжительной вибрацией.

Эти немногие наблюдения в XIX столетии, хотя на них и часто ссылались, не продвинули эксперименты в области вязкоупругости намного дальше попыток Кулона в XVIII столетии. Число экспериментальных работ XIX столетия на эту тему, перечисленных в Каталоге научных статей Британского Королевского общества (*British Royal Society Catalog of Scientific Papers*), удивительно мало́, принимая в расчет то внимание, которое привлекала к себе теория вязкоупругости в тот же самый период. К числу отмеченных в упомянутом списке работ относятся экспериментальные работы А. В. Обермайера (Obermayer [1877,1]) в 1877 г., мемуар Игнаца Клеменчича (Klemenčič [1879,1]) 1879 г., опыты Томлинсона (Tomlinson [1886,1]) 1886 г., несколько статей таких, как статья Дьюара (Dewar [1895,1]) 1895 г. и, конечно, хорошо известные статьи Фохта

[1]) Эти результаты были перепечатаны почти без изменений в статье Кельвина «Упругость» в 9-м издании Британской Энциклопедии «*Encyclopaedia Britannica*) в 1880 г. (Kelvin [1880, 1]).

(Voigt [1892,2]) 1892 г. Экспериментальные достижения Фохта следует рассматривать как наиболее значительную попытку проверить основы предмета.

Обермайер (Obermayer [1877,1]) хотел определить коэффициент вязкого трения при течении свежего черного вара, для которого было сделано предположение, что он имеет линейную вязкость, т. е. что существует линейная зависимость, между приложенной силой и скоростью деформации с коэффициентом пропорциональности μ. Его работа с экспериментальной точки зрения была замечательна, как ранняя попытка обосновать линейную вязкость в сплошной твердой среде. Свежий вар был помещен между двумя круглыми пластинами, прижатыми друг к другу известными по величине грузами. Крутящие моменты, углы закручивания и время записывались в процессе того, как пластины поворачивались одна по отношению к другой. Обермайер сравнил свежий вар со старым черным варом и зарегистрировал разные результаты. Конечно, его работа была дальнейшим развитием работ Треска (Tresca [1864,1], [1872, 1, 2, 3]), но она представляла собой дополнительный интерес отчасти из-за предполагаемой аналогии изученного трения с внутренним трением текущего ледникового льда.

В своем исследовании 1879 г. Клеменчич пытался установить связь между логарифмическим декрементом при крутильных колебаниях железной проволоки и ее намагниченностью. Это была еще одна тема, вызывавшая большой интерес в XIX столетии, после того как Вертгейм установил связь между деформацией и намагниченностью в 40-х гг. XIX века. Томплинсон, например, включил исследование действия намагниченности на вязкость, так же как и на упругость, в число многих тем, которые он исследовал экспериментально в 80-х гг. XIX века. Клеменчич отметил, что ранее Штрайнц и Шмидт наблюдали, что для железной проволоки непосредственно после отжига логарифмический декремент за период, равный четырем неделям, уменьшился со значения, равного 0,00432, до 0,00227, что представляет собой значительное изменение. Клеменчич настойчиво подчеркивал полученный им отрицательный результат, который на самом деле прямо противоречил более ранним заявлениям Видемана (Wiedemann [1858,1], [1859,1]) о том, что для железа существует связь между логарифмическим декрементом колебаний и напряженностью магнитного поля. Клеменчич обнаружил, что намагничивание не влияет на затухание крутильных колебаний железной проволоки. В качестве некоторого позитивного результата Клеменчич показал, что вязкость проволоки меняется при изменении температуры и в зависимости от малых значений остаточных деформаций.

Заметка Дьюара (Dewar [1895,1]) в 1895 г., на которую будет ссылка в следующей главе (часть II), содержала попытку разделить твердые тела на те, которые способны течь через отверстие, и те, которые такой способностью не обладают.

Частью большого исследования условий, при которых имеют место изотропность и однородность в поликристаллических брусьях из различных металлов, было определение Фохтом (Voigt [1892, 1, 2]) в 1892 г. логарифмического декремента при изгибных, а также и при крутильных свободных колебаниях. При первых стержень был защемлен на одном конце, в то время как при вторых один конец был защемлен, а к другому был присоединен металлический диск. Фохт сообщил о внимании, которое он уделил правильной пайке и соединению частей, чтобы минимизировать потери в приборе. Он признавал, что такие потери были важным источником ошибок в его результатах. Дальнейшие трудности встретились в связи с сопротивлением воздуха, которые Фохт пытался исключить с помощью поправочных коэффициентов [1]). Он обнаружил, что при крутильных колебаниях терялась дополнительная энергия, связанная с неизбежным изгибом, сопровождавшим колебания.

Фохт начал свое исследование с анализа линейного вязкоупругого тела, свойства которого он хотел исследовать со всей полнотой. В опытах с однородными изотропными телами он хотел сначала удостовериться, будет ли соответствующая постоянная материала для внутреннего трения независимой от частоты, как предполагал Больцман (Boltzmann [1882,1]), или она, как ожидал Фохт, на основе своей линейной теории, зависит от частоты. Из своих опытов он мог определить логарифмический декремент (логарифм отношения двух последовательных амплитуд). Он подразделил материалы для их раздельного исследования на материалы с большим и минимальным затуханием. Для последних он мог пренебречь зависимостью затухания от частоты. В этом случае из линейной теории он мог получить приближенный параметр

$$\alpha = lT/(2\pi^2),$$

где l — логарифмический декремент, а T — период колебаний.

Фохт выбрал фосфористую бронзу для специального исследования, поскольку экспериментальное определение им модулей показало, что она обладает почти идеальной изотропностью и однородностью. Фохт нашел точную зависимость от периода для обеих форм колебаний. В дальнейшем для обозначения величин, связанных с изгибом, используется индекс β, а с кручением — индекс γ. При изгибе изменение периода от 0,537 с до 1,023 с за четыре колебательных движения дало изменение логарифмического декремента от $14{,}40\cdot10^{-4}$ до $6{,}71\cdot10^{-4}$, в то время как величина α_β, несмотря на флуктуации, осталась в основном постоянной со средним значением

$$\alpha_\beta = 37{,}5\cdot10^{-6}.$$

---

[1]) Я уже критиковал произвольные небольшие «регулировки» Фохтом его данных, когда он пытался объяснить предполагаемые, но ненаблюдавшиеся явления, прежде чем он сравнивал свои опытные данные с предсказаниями.

При кручении как l_γ, так и α_γ изменялись в зависимости от периода T, хотя первая величина — в более резко выраженной форме. Латунь дала результаты, в основном аналогичные результатам для бронзы. Для меди как α_β, так и α_γ почти не зависели от париода, хотя l_β и в особенности l_γ сильно изменялись. Поведение никеля было аналогично поведению меди. Поэтому Фохт классифицировал эти два твердых тела как точно соответствующие его простым законам внутреннего трения. С другой стороны, для алюминия, литой стали и кадмия значения логарифмического декремента, полученные Фохтом, не зависели от периода и при изгибе, и при кручении, но и в том и в другом случае α была функцией частоты.

Наконец, для олова и серебра разброс экспериментальных результатов, полученных для разных образцов, был такой, что невозможно было прийти к какому бы то ни было заключению (Voigt [1892,1]).

Во втором большом и очень детальном исследовании бронзы, описанном Фохтом в том же 1892 г. (Voigt [1892,2]), проиллюстрированы такие проблемы, имевшиеся в исследованиях XIX века, как достижимая устойчивость результатов. Он показал, что при кручении логарифмический декремент колебаний в бронзе заметно изменялся в зависимости от периода при несколько лучшем приближении значения α к предсказанному Фохтом. Фохт исследовал и ряд других аспектов проблемы; например, он заметил, что ему не удалось обнаружить влияние продолжительности колебаний на значение логарифмического декремента, о котором сообщал Кельвин (Kelvin [1865,1]). Он сильно интересовался связью между упругим последействием, исследованным Вебером (Weber [1835,1] [1841,1]) и Кольраушем (Kohlrausch [1863,1]), и затуханием колебаний, так же как до него и последний из них.

Фохт обрисовал экспериментальные и теоретические сложности этого аспекта механики сплошной среды, которые до настоящего времени в измененной форме продолжают ставить в тупик его последователей. Кларенс Ценер (Zener [1948,1]) в своей монографии 1948 г. «Упругость и неупругость металлов» (*Elasticity and Anelasticity of Metals*) дал обзор развития вопроса в большей части исследований середины XX столетия. Место, отводимое теории или эмпирической интерпретации, даже в экспериментальных статьях этой области физики намного превосходит то, которое отводится для описания собственно эксперимента или его результатов.

В XX столетии получила распространение более совершенная подвеска образцов на манер примененной Фёрстером (Förster [1937, 1]) и описанной выше, используя которую Кёстер (Köster [1940,1], [1943,1], [1947,1], [1948, 1, 2, 3, 4], Förster und Köster [1937,2]) в последующее десятилетие получал температурную зависимость логарифмического декремента для большинства элементов. В 50-х гг. XX века Колски (Kolski [1953, 1], [1954, 1], [1956, 1], [1959, 1],

[1960,1]) ввел использование коротких импульсов для ряда других материалов и среди них таких, как полиэтилен, полиметилметакрилат, полистирен и (позднее) свинцовые прутки, для которых путем изучения изменения формы импульса после каждого отражения он смог определить вязкость. Для достаточно длинных волновых фронтов, таких, что трехмерные эффекты могли игнорироваться, Колски преуспел в анализе своих результатов для полимеров, подвергающихся малым деформациям в условиях линейности вязкоупругости.

Затухание в кристаллических телах использовалось как средство при исследовании других аспектов физики твердого тела обычно вместе с предположением о линейной вязкости для истолкования полученных результатов. Трелоар[1] (Treloar [1958,1]) в 1958 г. ссылался на эксперименты Гехмана, Вудфорда и Штамбауга, проводившиеся в 1941 г., как на демонстрирующие тот факт, что чистый каучук имеет резонансную кривую, при вынужденных колебаниях близко соответствующую концепции линейной вязкоупругости. Современная ультразвуковая импульсная локационная (эхо) техника способствовала систематизации исследований вязких эффектов в телах и в то же самое время породила ряд новых проблем, связанных с рассеянием и отражением.

В 1967 г. Вилфред Е. Бейкер, Уильям Е. Вулем и Дейна Янг (Baker, Woolam and Young [1967,1]), выполнив эксперименты при различных давлениях воздуха и частотах, провели исследование того, что Кулон (Coulomb [1784,1]) начал, Купфер (Kupffer [1860,1]) попробовал выполнить и Фохт (Voigt [1892,1, 2]) оценил, а именно детальное выделение вкладов самого материала колеблющегося тела и воздуха в наблюдаемое затухание колебаний тонкой консольной балки.

В 50-х гг. XX века Эдвин Р. Фитцжеральд (Fitzgerald; подытожены работы 1957—1966 гг. в [1966,1]), изучая резонансные свойства тел, находящихся под вынуждающим воздействием, обнаружил важное явление: существование резонансных частот, которые зависят от самого материала, но не от размеров образца. В обширных исследованиях этого поведения Фитцжеральд в следующем десятилетии устранил все сомнения, состоявшие в том, что «материальные» резонансы связаны с установкой, вызывающей вынужденные колебания, целиком модифицировав и упростив эксперимент и попрежнему обнаружив наблюдавшееся ранее явление. В резюме Фитцджеральда 1966 г., подводящем итоги десятилетних экспериментальных исследований (Fitzgerald [1966,1]), вошло предлагаемое объяснение этого явления материального резонанса в терминах волновой механики частиц в кристаллических решетках.

Поведение тел как при свободных, так и при вынужденных колебаниях в рамках линейной аппроксимации, обсуждаемой в этом разделе, было предметом экспериментального исследования в течение почти двух столетий и теоретических объяснений в течение

одного. Может быть, что озабоченность Кольрауша в середине XIX столетия, вызванная тем, что казалось ему нелинейным явлением даже при бесконечно малых деформациях являлась в большей мере пророчеством, чем могло осознать большинство лиц в последующие годы.

3.48. Резюме

Когда измерения достаточно грубы, для описания начальной деформации почти всех тел, которые исследовались, может быть использована линейная аппроксимация. Для большинства кристаллических тел, для которых обнаружение существенного отклонения от линейности требует высокой точности измерений, линейная аппроксимация как в теории, так и в эксперименте взяла на себя важнейшую роль в течение последних двух столетий.

Те, кто использовал линейную аппроксимацию и испытал выгоду от ее теоретической простоты, подразделили зависимости между напряжением и деформацией на различающиеся множества, каждое из которых сделалось предметом специального исследования. Описание тел на основе схемы линейной упругости привело к обширной экспериментальной программе определения постоянных упругости для изотропных и анизотропных предположительно однородных сред. Далее, это привело к исследованию зависимости этих упругих постоянных (упругих жесткостей или податливостей) от разнообразных параметров, таких, как температура окружающей среды, скорость изменения напряжений, скорость деформации, предшествующая термическая, химическая и механическая истории и окружающие электрическое и магнитное поля. По большей части численные значения были табулированы и каталогизированы не просто с целью их собирания (хотя на самом деле это иногда и случалось в наше время), но скорее для исследования и сравнения осмысливаемых экспериментальных данных с теоретическими трактовками с подчеркиванием функциональной зависимости от различных параметров.

Экспериментами Кулона, Хладни и Риккати в XVIII столетии начато исследование постоянных упругости, определенных в экспериментах по колебаниям, и в 1809 г. Био получил первое значение модуля, определенное при измерении скорости волн в теле; однако никакие квазистатические методы определения значений модулей между наблюдениями Гука, опубликованными в 1678 г., и первыми такими опытами Дюло в 1813 г. не применялись. То, что измерения Дюло малых деформаций железа доминировали в литературе до 40-х гг. XIX века, есть просто еще одно подтверждение того факта, что в этот период большинство экспериментальных работ, связанных с постоянными упругости, имели небольшое значение. Важным исключением были эксперименты Вика в 1831 г., Вика получил разрешающую способность для деформаций доста-

точно высокую, чтобы его измерения не утратили своего значения и в середине XX столетия.

Обсуждаемая область знаний стала экспериментальной наукой в современном смысле этого слова вместе с исследованиям главной в XIX столетии фигуры в экспериментальной механике сплошных сред, Вертгейма, вклад которого на протяжении очень небольшого числа лет включил в себя: первые обширные серии опытов с хорошо определенными металлами и бинарными сплавами; первые исследования постоянных упругости как функций температуры, а также параметров электрического и магнитного полей; первое исследование постоянных упругости анизотропных тел; первое экспериментальное исследование постоянных упругости различных видов стекла; первое количественное исследование фотоупругости, которое привело к закону, связывающему напряжения и оптические свойства тел с двойным преломлением, позднее известному как «закон Вертгейма»; первое измерение сжимаемости тел, скоростей продольных волн в проволоке и скорости звука в столбе воды и обнаружение того экспериментального факта, что линейная теория упругости изотропных тел гребует определения двух постоянных упругости вопреки почти общепринятой в то время привлекательной атомистической теории, использующей одну постоянную упругости.

При такой относительной простоте линейной теории упругости странно, что существовало так много проблем, вызывавших разногласия, которые продолжались в течение длительных периодов времени. В этой книге я проследил детали полувековой полемики, связанной с коэффициентом Пуассона, суть которой увлекла большое число экспериментаторов и породила некоторые из тончайших экспериментов XIX столетия. Другая полемика началась демонстрацией Больцмана в 1882 г. того, что одномерная теория Сен-Венана соударения стержней 1867 г. просто не соответствует эксперименту. Это привело к дебатам, продолжавшимся почти 90 лет, которые концентрировались не вокруг факта неприменимости теории,— что было признано всеми, кроме авторов элементарных учебников,— но вокруг попыток найти экспериментальное оправдание подходящим образом видоизмененной теории. Осуществление большой части экспериментов на эту тему после Больцмана позволило мне проследить развитие эксперимента, связанного с общими проблемами распространения волн.

Исследования, в основу которых была положена линейная аппроксимация, конечно шли дальше определения численных значений постоянных упругости. Экспериментаторы интересовались линейностью при малых деформациях в термоупругости вязкоупругостью и связью между адиабатическим и изотермическим поведением тел. Интерес первостепенной важности представляли исследования фундаментальных вопросов, касавшихся анизотропии монокристаллов; вопрос возможности существования изотропности в по-

ликристаллах или отсутствия таковой и характер температурной зависимости параметров упругости как для монокристаллов, так и для поликристаллов.

С развитием надежной достаточно широкой экспериментальной основы становится возможным рассмотрение взаимной связи явлений в различных телах и классах тела. Мои собственные экспериментальные исследования в прошедшем десятилетии обнаружили существование квантованного распределения значений постоянных упругости для элементов с унифицированным рядом дискретных состояний. Эти состояния существуют не только для модуля упругости при сдвиге в нулевой точке для линейных изотропных тел, для которого была обнаружена общая закономерность, но также и для модуля упругости E данного тела при заданной температуре окружающей среды. Этот факт был назван мультимодульностью (в оригинале книги — «мультиупругостью».— *А. Ф.*); она существует как квантованные состояния в данном кристаллическом теле в той же форме, в которой встречается среди 60 элементов, подвергнутых исследованию. Отсюда ясно, что существование скачков в значениях постоянных упругости или переходов второго рода в упругости при инфинитезимальных деформациях имеет большое значение: этот факт должен быть учтен при любом исчерпывающем объяснении поведения тел при малых деформациях.

В несколько последних прошедших десятилетий большинство измерений параметров линейности в области упругости проводилось для вторичных целей, чтобы определить численные значения для атомистических моделей теорий расчета. В непрерывном потоке литературы эксперименты хотя и придают некоторое значение нелинейным параметрам, таким, как постоянные третьего рода, в основном продолжают традиции прошлого. Полезность линейной аппроксимации не устраняется тем экспериментальным фактом, что это всегда всего лишь аппроксимация. Однако возможность дальнейших открытий с использованием простейшей аппроксимации ни в коей мере не исчерпана.

ЛИТЕРАТУРА

Для сравнения различных единиц измерения использованы следующие литературные источники: Adams [1821, 1]; Blind [1906, 1]; Kennelly [1928, 1]; Lemale [1875, 1]; Nelkenbrecher [1820, 1]; Tate [1842, 1].

1636 1. Mersenne, Marin: Harmonie Universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique... Paris: Sebastien Cramoisy. Факсимильное переиздание: Paris: Centre Nat. Rech. Sci. (1965).

1676 1. Hooke, Robert: A Description of Helioscopes, and Some Other Instruments. London: John Martyn. Переиздано в Early Science in Oxford (ed. R. T. Gunther), Vol. VIII, Oxford: R. T. Gunther, 1931.

1678 1. Hooke, Robert: Lectures De Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies. London: John Martyn. Переиздано в Early Science in Oxford (ed. R. T. Gunther), Vol. VIII, pp. 331—356. Oxford: R. T. Gunther, 1931.

1687 1. Bernoulli, Jacobus: Letter (in 1687) to G. W. Leibniz. Опубликовано в G. W. Leibniz, Mathematische Schriften (Red. G. E. Gerhardt), Vol. III, Abt. 1, S. 10—13. Heidelsheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung 1855 (переиздано в 1962 г.).

1690 1. Leibniz, Gottfried Wilhelm: Letter to Jacobus Bernoulli. Опубликовано в G. W. Leibniz, Mathematische Schriften (Red. G. E. Gerhardt), Vol. III, Abt. 1, S. 13—20. Heidelsheim: Georg Olms Verlangsbuchhandlung 1855 (переиздано в 1962 г.).

1694 1. Bernoulli, Jacobus (Яков); Curvatura laminae elasticae... Acta Eruditorum Lipsiae. June, 262—276. (Opera Jacobi Bernoulli, 576—600.) См. также Truesdell [1960, 1], pp. 88—96.

1700. 1. Mariotte, Edmé: Traité du Mouvement des Eaux et des Autres Corps Fluides. Nouvelle édition, Paris. Мариотт умер в 1684 г. См. описание жизни, принадлежащее Кондорсе (Condorcet [1799, 1]).

1705 1. Bernoulli, Jacobus (Яков): Veritable hypothèse de la resistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort..., Mémoires Acad. Sci. Paris 1705, 4me ed., Paris, 176—186 (1706) [deuxième 4me ed., Paris, 176—186 (1730). 12me ed., Amsterdam, 230—244 (1707). Opera Jacobi Bernoulli, 976—989.] См. также Truesdell [1960, 1], pp. 105—109.

1720 1. s'Gravesande, Wilhilem Jacob Storm: Physices Elementa Mathematica, Experimentis Confirmata. Sive Introductio ad Philosophiam Newtonianam. Lugduni Batavorum, Vander Aa, Vol. 1. (Второе издание было опубликовано в 1725 г.)

1721 1. Riccati, Jacopo: Отрывки из писем, опубликованы в книге: Paul Heinrich Fuss: Correspondence Mathématique et Physique du XVIIIème Siècle, Vol. 2. St. Petersburg 1843. Переиздано в The Sources of Science, Vol. 2, № 35, pp. 101—102. New York and London: Johnson Reprint Corporation 1968. См. также Truesdell [1960, 1], p. 115.

1725 1. s'Gravesande, Wilhelm Jacob Storm: Physices Elementa Mathematica... Второе издание [см. 1720 г., первое издание].

1729 1. Bülffinger, Georg Bernhard: De solidorum resistentia specimen. Commentarii Academiae Scientiarum, Petrop. 4, 140—155.

1. Musschenbroek, Pieter van: Physicae Experimentales et Geometricae de Magnete, Tuborum Capillarium Vitreorumque Speculorum Attractione, Magnitudine Terrae, Cohaerentia Corporum Firmorum Dissertationes. Apud Samuelem Luchtmans, Lugduni Batavorum.

1739 1. Musschenbroek, Pieter van: Essai de Physique, Vol.1 (переведено P. Massuet). Leyden.

1741 1. Buffon, Georges Louis Leclerc, Comte de: Expériences sur la force du bois. Sécond Mémoire. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris, pp. 292—334.

1742 1. Duhamel du Monceau, Henri Louis: Reflexions et expériences sur la force des bois. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris, pp. 335—370.

1751 1. Bernoulli, Daniel: De sonis multifariis quos laminae elasticae diversimode edunt disquisitiones mechanico-geometricae experimentis acusticis illustratae et confirmatae. Commentarii Academiae Scientiarum, Petrop. 13 (1741/1743), 167—196. См. также [1770, 1].

1765 1. D'Arcy, Patrick: Mémoire sur la durée de la sensation de la vue. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris, 37, 700—718. Переиздано: Amsterdam: J. Schreuder (1773).

1770 1. Bernoulli, Daniel: Examen physico-mechanicum de motu mixto qui laminis elasticis a percussione simul imprimitur. Novi Commentarii Academiae Petropol. 15, 361—380.

1773 1. Coulomb, Charles Augustin: Sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture, Mémoires de Mathématique et de Physique, Acad. Sci. Paris 7, 343—382.

1774 1. Gauthey, Emiland Marie: Mémoire sur la charge que peuvent porter les pierres. Observations sur la Physique, sur l'Histoire Naturelle et sur les Arts, Vol. 4, Paris.

1775 1. Belidor, Bernard Forest de: La Science de Ingénieurs dans la Conduite des Travaux de Fortification et d'Architecture Civile. Nouvelle édition à la Haye. P. F. Gosse.

1780 1. Coulomb, Charles Augustin: Recherches sur la meilleure manière de fabriquer les aiguilles aimantées. Mémoires de Mathématique et de Physique. Acad. Sci. Paris 9, 165—264.

1782 1. Riccati, Giordano: Delle vibrazione sonore dei cilindri. Memorie Mathematica e Fisica Società Italiana 1, 444—525.

1784 1. Coulomb, Charles Augustin: Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal. Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, pp. 229—269. [Переиздано в Mémoires de Coulomb, Vol. 1, Collections de Mémoires Relatifs à la Physique, publiés par la Société Française de Physique, Paris: Gauthier-Villars (1884), pp. 63—103.]

1787 1. Chladni, Ernst Florens Friedrich: Entdeckungen über die Theorie des Klanges. Leipzig: Weidemanns, Erben und Reich.

1799 1. Condorcet, Marie Jean Antoine Nicolas Caritat: Éloge de Mariotte. Éloges des Académiciens de l'Académie Royale des Sciences, Paris 1, 74—91.

1802 1. Chladni, Ernst Florens Friedrich: Die Akustik. Leipzig.

1805 1. Gough, John: A description of a property of Caoutchouc, or India rubber; with some reflections on the cause of the elasticity of this substance. Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester, Second series 1, 288—295. [Так же в Phil. Mag. 24, 39—43 (1806).]

1806 1. Gough, John: См. Phil. Mag. 24, 39—43. Это фактически статья, опубликованная в [1805, 1].

1807 1. Young, Thomas: A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts, Vols I and II. London.

1809 1. Biot, Jean Baptiste: Expériences sur la propagation du son à travers les corps solides et à travers l'air, dans des tuyaux très-allongés. Mémoires de Physique et de Chemie de la Société d'Arcueil 2, 405—423.

1811 1. Benzenberg, D.: Auszug aus einem Schreiben des D. Benzenberg an den Herausgeber über seine und Biot's Schallversuche. Annalen der Physik und Chemie, erste Serie 37, 221—225.
1. Léhot, Désormes, and Clément: Versuche über den Widerstand, welchen Luft in langen Röhren in ihrer Bewegung leiden soll. Annalen der Physik und Chemie, erste Serie 39, 142—149. Также в J. de Physique 73, 36—40.
1813 1. Duleau, Alphonse Jean Claude Bourguignon: Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé. См. Duleau [1820, 1].
1814 1. Munke, Georg Wilhelm: Über die Fortpflanzung des Schalles durch Wasser. Annalen der Physik und Chemie (Gilbert's) 48, 66—104.
1815 1. Dupin, Pierre Charles François: Expériences sur la flexibilité, la force l'élasticité des bois. Journal de l'École Royale Polytechnique 10, 137—211.
1816 1. Biot, Jean Baptiste: Dédication à M. Berthollet. Traité de Physique Expérimentale et Mathématique 1, I-XXIV, Paris.
1. Brewster, Sir David: On the communication of the structure of doubly-refracting crystals to glass, muriate of soda, fluor spar, and other substances by mechanical compression and dilatation. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 156—178.
1. Laplace, Pierre Simon (Marquis) de: Sur la vitesse du son dans l'air et dans l'eau. Annales de Chimie et de Physique 3, 238—241. Также в Phil. Mag. 49, 260—262 (1817).
1817 1. Barlow, Peter: Essay on the Strength and Stress of Timber. London. См. также Rennie [1818, 1].
1. Chladni, Ernst Florens Friedrich: Neue Beiträge zur Akustik. Leipzig.
1818 1. 1. Rennie, George: Account of experiments made on the strength of materials. (Letter to Thomas Young, M. D.; read 12 February, 1818.) Phil. Trans. Roy. Soc. London, 118—136.
1819 1. (Duleau) Cauchy, Augustin Louis (докладчик совместно с Poisson, ом и Girard'ом): Analyse d'un mémoire intitulé: Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé. Annales de Chimie et de Physique, deuxième série 12, 133—148.
1820 1. Duleau, Alphonse Jean Claude Bourguignon: Essai Théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé. Paris. (Дюло представил мемуар во Французскую Академию 28 июня 1819 г.; Коши 9 августа 1819 г. прочитал анализ, написанный Коши, Пуассоном и Жираром.)
1. Nelkenbrecher, Johann Christian: J. C. Nelkenbrechers allgemeines Taschenbuch der Munz-, Maass und Gewichtskunde, 13te Verlag, J. P. Schellenberg, Redakteur. Berlin: Sanderschen Buchhandlung.
1. Savart, Félix: Mémoire sur la communication des mouvements entre les corps solides. Annales de Chimie et de Physique 14, 113—172.
1821 1. Adams, John Quincy: Report upon Weights and Measures. Philadelphia: Abraham Small.
1822 1. Chladni, Ernst Florens Friedrich: Remarques conçernant le Mémoire de M. Savart sur les communications des mouvements vibratoires entre les corps solides, imprimé dans les Annales de Chimie et de Physique, tome XIV, Juin. Annales de Chimie et de Physique, deuxième serie 20, 74—78.
1. Pouillet, Claude Servais Mathais Marie Roland: Extrait des séances de l'Académie Royale des Sciences: Séance du lundi 26 Août. Annales de Chimie et de Physique, deuxième serie 21, 77—79.
1. Robison, John: Strength of materials. A System of Mechanical Philosophy, Vol. 1, pp. 369—495. Edinburgh.
1. Savart, Félix: Mémoire sur les vibrations... См. [1824, 1].
1. Tredgold, Thomas: A Practical Essay on the Strength of Cast Iron. London. См. [1842, 1].
1823 1. Leslie, Sir John: Elements of Natural Philosophy. Edimburgh (sic.).
1824 1. Hodgkinson, Eaton: On the transverse strain, and strength of materials (представлено в 1822 г.). Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester, second series 4, 225—289.

1. Savart, Félix: Mémoire sur les vibrations des corps solides, considérées en général. Annales de Chimie et de Physique, deuxième série 25, Part I, 12—50; Part II, 138—178; Part III, 225—269. (Представлено в Академии 22 апреля 1822.)
1. Tredgold, Thomas: Experiments on the elasticity and strength of hard and soft steel. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Part I, 354—359. См. также [1822, 1].

1826 1. Babbage, Charles: On electrical and magnetic rotations. Phil. Trans. Roy. Soc. London. Parts II and III, 494—528.
1. Bevan, Benjamin: Account of an experiment on the elasticity of ice. (В письме к д-ру Томасу Юнгу, прочитанному перед Королевским Обществом 27 апреля 1826 г.) Phil. Trans. Roy. Soc. London, Part III, 304—306.
1. Cauchy, Louis Augustin: Mémoire sur le choc des corps élastiques. Bulletin de la Société Philomatique, Paris, 180—182 (Décembre).
1. Dulong, Pierre Louis: Untersuchungen über das Brechungsvermögen der elastischen Flüssigkeiten. Annalen der Physik und Chemie, zweite Serie 6, 393—424.
1. Navier, Claude Louis Marie Henri: Expériences sur la résistance de divers substances à la rupture causée par une tension longitudinale. Annales de Chimie et de Physique, 33, 225—240.
1. Young, Thomas: Note by Dr. Young. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Part III, 306.

1827 1. Poisson, Siméon Denis: Note sur l'extension des fils et des plaques élastiques Annales de Chimie et de Physique, deuxième série 36, 384—387.

1828 1. Cagniard de Latour, Charles: Note sur l'élasticité des cordes métalliques. La Globe 6, № 19, 107—108, Paris. (Переведено и опубликовано в Англии в the Edinburgh Journal of Science 8, 201—203 (1828).)

1829 1. Girard P. S.: Mémoire sur la posé des conduites d'eau... См. [1831, 1].
1. Lagerhjelm, Pehr: Schreiben des Hrn Lagerhjelm an den Herausgeber, in Betreff seiner Untersuchungen über die Cohaesion u. s. w. des Eisens. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 17, 348—351.
1. Poncelet, Jean Victor: Cours de Mécanique Industrielle, Metz. (См. название второго издания [1841, 1].)
1. Savart, Félix: Mémoire sur la réaction de torsion des lames et des verges rigides. Annales de Chimie et de Physique 41, 373—397.

1830 1. Cauchy, Augustin Louis: Mémoire sur la torsion et les vibrations tournantes d'une verge rectangulaire. Mémoires de l'Academie des Sciences, Paris, 9, 119—124. (Представлено в Академию 9 февраля 1829.)
1. Coriolis, Gustave Gaspard: Expériences sur la résistance du plomb à l'écrasement, et sur l'influence qu'a sur sa dureté une quantité inappréciable d'oxide. Annales de Chimie et de Physique 44, 103—111.
1. Karsten, Carl Johann Bernhard: Manuel de la Métallurgie du Fer 1, Metz. deuxième édition, traducteur F. J. Culmann (первое издание: 1816).
1. Savart, Félix: Recherches sur l'élasticité des corps qui crystallisent régulièrement. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences 9, 405—453.
1. Weber, Wilhelm: Über die specifische Wärme fester Körper, insbesondere der Metalle, Annalen der Physik und Chemie, zweite Serie 20, 177—213.

1831 1. Gerstner, Franz Joseph: Handbuch der Mechanik, Vol. 1. Leipzig: Herbig.
1. Girard, P. S.: Mémoire sur la posé des conduites d'eau dans la ville de Paris, tableaux et discussions d'expériences entereprises à ce sujet sur la dilatabilité de la fonte de fer. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institute de France 10, 405—456.
1. Hodgkinson, Eaton: Theoretical and experimental researches to ascertain the strength and best forms of iron beams. Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester, second series 5, 407—544.
2. Hodgkinson, Eaton: On the chain bridge at Broughton. Memoire

of the Literary and Philosophical Society of Manchester, second series 5, 384—397; 545—553, См. и Приложение (Appendix).
3. Hodgkinson, Eaton: On the forms of the catenary in suspension bridges. Memoirs of the Literary and Philosophicy Society of Manchester, second series 5, 354—383.
1. Vicat, Louis Joseph: Ponts suspendus en fil de fer sur le Rhône, Rapport. Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires; premier serie, premier semester 1, 93—144.

1832 1. Gerstner, Franz Anton (Ritter) von: Über die Festigkeit der Körper. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 26, 269—279.

1833 1. Gerstner, Franz Joseph: Handbuch der Mechanik. Vol. I, Mechanik fester Körper.
1. Poisson, Siméon Denis: глава, названная: Choc longitudinal des verges élastiques. Traité de Mécanique 2, 331—343, Paris.
1. Navier, Claude Louis Marie Henri: Resumé des Leçons données à l'École des Ponts et Chaussées, sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Part I, contenant les leçons sur la résistance des matériaux et sur l'établissement des constructions en terre, en maçonnerie et en charpente; deuxième edition, Paris. (См. [1851, 1], [1864, 1].)
1. Vicat, Louis Joseph: Note sur l'allongement progréssif du fil de fer soumis à divers tensions. Annales de Chimie et de Physique, deuxième série 54, 35—40.
2. Vicat, Louis Joseph: Recherches expérimentales sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture on l'affaissement d'une certaine classe de solides. Annales des Ponts et Chaussées. Mémoires, premier série 6, deuxième semester, 201—286.

1834 1. Vicat, Louis Joseph: Note sur l'allongement progressif du fil de fer soumis à divers tensions. Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires, premier série, premier semester 40—44. (См. также [1833, 1, 2].)

1835 1. Weber, Wilhelm: Ueber die Elasticität der Seidenfäden. Annalen der Physik und Chemie, zweite Serie, 34, 247—257.

1837 1. Barlow, Peter: A Treatise on the Strength of Timber, Cast Iron, Malleable Iron, and Other Materials; with rules for application in architecture, construction of suspension bridges, railways, etc. London: J. Weale.
1. Savart, Félix: Recherches sur les vibrations longitudinales. Annales de Chimie et de Physique, deuxième série 65, 337—402.

1838 1. Colladon, Jean Daniel, and Jacques Charles François Sturm: Mémoire sur la compression des liquides. Académie des Sciences, Mémoires présentés par divers savants, deuxième série 5, 267—347. (Эта работа была представлена во Французскую Академию в 1827 г.)

1839 1. Hodgkinson, Eaton: On the relative strength and other mechanical properties of cast iron obtained by hot and cold blast J. Franklin Inst. 24, 184—196, 238—257.
1. Leblanc, Félix: Expériences sur la résistance du fil de fer et la fabrication des cables. Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires, premier série, deuxième semester, 300—334.

1841 1. Karmarsch, Karl: Ueber die Festigkeit und Elastizität der Darmsaiten. Dingler's Polytechnisches Journal 81, 427—432.
1. Masson, Antoine Philibert: Sur l'élasticité des corps solides. Annales de Chimie et de Physique, troisième série, 3, 451—462.
1. Poncelet, Jean Victor: Introduction à la Mécanique Industrielle, Physique ou Expérimentale. Metz (deuxième édition). (Первое издание этой книги появилось в 1829 под названием: Cours de Mécanique Industrielle. См. [1829, 1].)
1. Weber, Wilhelm: Ueber die Elastizität fester Körper. Annalen der Physik und Chemie, zweite Serie 54, 1—18.
1. Wertheim, Guillaume: Paquet cacheté addressé par M. Wertheim en 1841... (См. [1842, 2].)

1842 1. Colladon, Jean Daniel: Nouvelles expériences sur la propagation du son dans l'eau. L'Institut, No. 401.
1. Giulio, Carlo Ignazio: Sur la torsion des fils métalliques et sur l'élasticité des ressorts en hélices. Mémoires de l'Académie de Turin 4, 329—384.
1. Regnault, Henri Victor: Note sur la dilatation du verre. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 4, 64—67.
1. Tate, William: The Modern Cambist, 4th edition. London: Effington Wilson.
1. Tredgold, Thomas: Practical Essay on the Strength of Cast Iron and Other Metals (fourth edition). London 1842—1846.
1. Wertheim, Guillaume: Recherches sur l'élasticité et la ténacité des métaux. Extrait. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 15, 110—115.
2. Wertheim, Guillaume: Paquet cacheté addressé par M. Wertheim en 1841, et dont le dépôt a été accepté par l'Académie dans sa séance du 19 juillet. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 15, 115—117.
1843 1. Hodgkinson, Eaton: Experiments to prove that all bodies are in some degree inelastic, and a proposed law for estimating the deficiency. Report of the 13th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, Cork, 23—25. См. также [1846, 1]. (Опубликовано в Лондоне в 1844 г.)
1844 1. Babinet, et al.: Rapport sur deux Mémoires de M. Wertheim, intitulés: *Recherches sur l'élasticité. Compt. Rend Acad. Sci. Paris 18*, 921—932.
1. Baudrimont, A.: Sur des procédés méchaniques destinés à donner la mesure d'intervalles de temps très courts. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 19, 1454—1455. (Дополнение к работе Pouillet [1844, 1] Note sur un moyen...)
1. Hodgkinson, Eaton: Experimental inquiries into the falling-off from perfect elasticity in solid bodies. Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, Section 2, Transactions, 25—27.
1. Pouillet, Claude Servais Mathais Roland: Note sur un moyen de mesurer des intervalles de temps extrêmement courts, comme la durée du choc des corps élastiques, celle du débandement des ressorts, de l'inflammation de la poudre, etc., et sur un moyen nouveau de comparer les intensités des courants électriques, soit permanents, soit instantanés. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 19, 1384—1389. (Опубликовано также в Германии: Über ein Mittel zur Messung äußerst kurzer Zeiträume, wie die Dauer des Stoßes elastischer Körper, der Auslösung von Springfedern, der Entzündung von Schießpulver usw., und über ein neues Mittel, die Intensität elektrischer Ströme, permanenter wie instantaner, zu messen. Annalen der Physik und Chemie, 3te Serie 4, 452—459 (1845). См. также D'Arcy [1765, 1] и Baudrimont [1844, 1].
1. Wertheim, Guillaume: Recherches sur l'élasticité. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 12.
(a) Première Mémoire: De l'élasticité et de la cohésion des métaux, 385—454. (Представлено 18 июля 1842 г.)
(b) Deuxième Mémoire: De l'élasticité de la cohésion des alliages, 581—610. (Представлено 8 мая 1843 г.)
(c) Troisième Mémoire: De l'influence du courant galvanique et de l'électromagnetisme sur l'élasticité des métaux, 610—624. (Преставлено 22 июля 1844 г.) Опубликовано также в Германии: Untersuchungen über die Elasticität. Annalen der Physik und Chemie, Leipzig, Ergänzungsband 11/11, 1—114 (1848).
2. Wertheim, Guillaume: Recherches sur l'élasticité. Troisième Mémoire. Extrait. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 19, 229—231.
3. Wertheim, Guillaume: Note sur l'influence des basses températures sur l'élasticité des métaux. (Extrait par l'auteur). Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 19, 231—233.

1845 1. Pouillet, См. [1844, 1].
1. Sullivan, William: On currents of electricity produced by the vibration of wires and metallic rods. Phil. Mag., third series 27, 261—264.
1. Wertheim, Guillaume: Note sur l'influence des basses températures sur l'élasticité des métaux. Annales de Chimie et de Physique 15, 114—120. (Представлено в 1844 г.)
2. Wertheim, Guillaume, and Jean Pierre Eugène Napoléon Chevandier: Note sur l'élasticité et la cohésion des différentes expèces de verre. (См. [1847, 3].)
1846 1. Hodgkinson, Eaton: Experimental Researches. Добавлена как вторая часть к 4-му изданию книги Тредгольда (Tredgold, Th.) Practical Essay on the Strength of Cast Iron. London.
1. Weber, Eduard: Art. Muskelbewegung. Wagner's Handwörterbuch der Physiologie, Vol. 3, Abt 2. (Ссылка дана в работе Вундта: Wundt [1858,1].)
1. Wertheim, Guillaume, and Jean Pierre Eugène Napoléon Chevandier: Sur les propriétés mécaniques du bois. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 23, 663—674. (Резюме представлено в Академию в 1845 г.; см. также Wertheim [1847, 2] и Chevandier and Wertheim [1848, 1].) (Опубликовано также в Германии: Über die mechanischen Eigenschaften des Holzes. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), Ergänzungsband II, 481—496 (1848).)
1847 1. Hopkins, William: Report on the geological theories of elevation and earthquakes. Report of the British Association for the Advancement of Science 33—92.
1. Regnault, Henri Victor: Relations des expériences... pour déterminer les principales lois et les données numériques qui entrent dans les calculs des machines à vapeur. Septième Mémoire: De la compressibilité des liquides. Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris 21, 429—464. См. также [1842, 1].
1. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur l'élasticité et la cohésion des principaux tissues du corps humain. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 21, 385—414. (Представлено в 1846 г.)
2. Wertheim, Guillaume: Rapport sur un Mémoire de MM. Eug. Chevandier et Wertheim ayant pour objet la recherche expérimentale des propriétés mécaniques du bois. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 24, 537—541.
3. Wertheim, Guillaume, and Jean Pierre Eugéne Napoléon Chevandier: Note sur l'élasticité et la cohésion des différentes expèces de verre. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 19, 129—138. (Представлено во Французскую Академию 2 июня 1845 г.) (Опубликовано также в Германии: Über die Elasticität und Cohäsion verschiedener Glassorten. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), Ergänzungsband II, 115—118 (1848).)
1848 1. Chevandier, Jean Pierre Eugène Napoléon, and Guillaume Wertheim: Mémoire sur les Propriétés Mécaniques du Bois. (Pamphlet), Paris. (Представлено во Фраицузскую Академию в 1846 г.; доложено академической комиссией в 1847 г.; см. Wertheim [1846, 1]; [1847, 2].)
1. Person, C. C.: Relation entre le coéfficient d'élasticité des métaux et leur chaleur latente du fusion; chaleur latente de cadmium et de l'argent. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 23, 265—277.
1. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 23, 52—95.
2. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur la vitesse du son dans les liquides. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 23, 434—475. См. также [1851, 7].
3. Wertheim, Guillaume: Note sur la torsion des verges homogènes. (resume de auteur) Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 27, 649—650.
4. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur les sons produits par le courant électrique. Annales de Chimie et de Physique, 3-ème serie 23, 302—327.
1849 1. Clausius, Rudolf Julius Emmanuel: Ueber die Veränderungen, welche in den bischer gebräuchlichen Formeln über das Gleichgewicht und die Be-

wegung elastischer fester Körper durch neuere Beobachtungen nothwending geworden sind. Annalen der Physik und Chemie, zweite Serie 76, 46—67.

1. Iron Commission Report: Report of a Commission appointed by the English government to conduct a study on the use of iron and cast iron in the construction of railroads and bridges. Members of the Commission: John Wrottesley, Robert Willis, Henri James, George Rennie, William Cubitt, and Eaton Hodgkinson. Whitehall, 26 July, 1849. (См. перевод на французский язык с перепечатки доклада, осуществленной в 1851 г.)
1. Wertheim, Guillaume: Note sur la torsion des verges homogènes. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 25, 209—215.

1850 1. Baudrimont, A.: Expériences sur la ténacité des métaux malléables, faites aux températures, 0, 100 et 200 dégrés. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 30, 304—311.
1. Fairbairn, William: An experimental inquiry into the strength of wrought-iron plates and their riveted joints as applied to ship-building and vessels exposed to severe strains. Phil. Trans. Roy. Soc. London 140, 677—725.
1. Kirchhoff, Gustav Robert: Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) 40, 51—88.
1. Wertheim, Guillaume: Ueber die Hauptresultate seiner Untersuchungen der allgemeinen Gesetze des Gleichgewichtes und Bewegung der festen und flüssigen Körper. Sitz. ber., Math.-Naturw. Cl. Kaiserl. Akad. Wiss., Wien 5, Hefte 6—10, pp. 19—31.
2. Wertheim, Guillaume: Remarques à l'occasion du Mémoire de M. Baudrimont sur la ténacité des métaux. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 30, 507—508.

1851 1. (Iron Commision Report) Rapport d'une commission nommée par le gouvernement anglais, pour faire une enquête sur l'emploi du fer et de la fonte dans les constructions dépendant des chemins de fer. (Traducteur par Busche.) Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires, troisième série, premier semester, 193—220. (См. [1849, 1].)
1. Navier, Claude Louis Marie Henri: Resumé des Lecons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées, sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines (Третье издание с примечаниями Сен-Венана.) (См. Navier [1833, 1], [1864, 1].)
1. Wertheim, Guillaume, et Louis François Clément Breguet: Expériences sur la vitesse du son dans le fer. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 32, 293—294. См. также: Wertheim [1851, 10].
2. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur les vibrations sonores de l'air. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 31, 385—432.
3. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur les vibrations des plaques circulaires. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 31, 5—19. (Представлено во Французскую Академию 1 октября 1849 г.)
4. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps solides et dans les liquides. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 31, 19—36. (Представлено во Французскую Академию 10 декабря 1849 г.)
5. Wertheim, Guillaume: Sur les effects optiques de la compression du verre. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 32, 144—145. (Запечатанный пакет со статьей получен 23 декабря 1850 г. и открыт 27 января 1851 г.)
6. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur les vibrations sonores de l'air. (Extrait.) Compt. Rend. Acad. Sci Paris 32, 14—16. (Представлено во Французскую Академию 6 января 1851 г.) См. также [1856, 1].
7. Wertheim, Guillaume: Description d'un appareil pour la détermination de la vitesse du son dans les gaz. (Extrait.) Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 32, 16. (Эта заметка была прочтена Французской Академии 6 января 1851 г.)
8. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur la polarisation chromatique

produite par le verre comprimé. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 32, 289—292. (Резюме прочтено Фраицузской Академии 25 февраля 1851 г.)
9. W e r t h e i m, Guillaume: Cauchy, Augustin Louis; Henri Victor Regnault; et Jean Marie Constant Duhamel: Rapport sur divers Mémoires de Wertheim, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 32, 326—330.
10. W e r t h e i m, Guillaume: Note sur la vitesse du son dans les verges. Annales de Chimie et de Physique, troisième serie 31, 36—39.

1852 1. K u p f f e r, Adolf Theodore: Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme. Annalen der Physik und Chemie, zweite Serie 86, 310—314. (См. также Бюллетень физико-математического класса Петербургской Академии наук. Санкт-Петербург 10, 193. (Bulletin de la Classe Physico-math. de l'Académie, St. Petersburg 10, 193).)
1. W e r t h e i m, Guillaume: Note sur des courants d'induction produits par la torsion du fer. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 35, 702—704.
2. W e r t h e i m, Guillaume: Deuxième note sur la double réfraction artificiellement produite dans les cristaux du système regulier. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 35, 276—278.
3. W e r t h e i m, Guillaume: Remarques à l'occasion d'une note récente de M. Garnier sur les chaleurs specifiques des corps composés. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 35, 300—301.

1853 1. H o d g k i n s o n, Eaton: On the elasticity of stone and crystalline bodies. Report of the British Association for the Advancement of Science, 23rd Meeting, held at Hull, in September 1853, 36—37.
1. K u p f f e r, Adolf Theodore: Recherches expérimentales sur l'élasticité des métaux. Mémoires de l'Académie de St. Petersburg, Sciences Mathématiques, Physiques et Naturelles, sixième séries 7, 232—305. (Мемуары Санкт-Петербургской академии наук, математика, физика и естествознание, шестая серия, 7, 232—305.)
1. S a i n t — V e n a n t, Adhémard Jean Claude Barré de: Mémoire sur la torsion des prismes. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 36, 1028—1031.

1854 1. K u p f f e r, Adolf Theodore: Untersuchungen über die Flexion elastischer Metallstäbe. Bulletin de la Classe Physico-Mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg 12, 161—167. (Бюллетень физико-математического класса императорской Санкт-Петербургской академии наук 12. 161—167.)
1. S o r e t, J. Louis: Recherches sur l'élasticité et la cohésion des corps solides. Extrait des Mémoires de M. Wertheim et de M. Kupffer. Archives des Sciences Physiques et Naturelles, Genève 25, 40—58.
1. W e r t h e i m, Guillaume: Mémoire sur la double réfraction temporairement produite dans les corps isotropes, et sur la relation entre l'élasticité mécanique et entre l'élasticité optique. Annales de Chimie et de Physique, troisième serie 40, 156—221. (Опубликовано также в Англии: On the double refraction temporarily produced in isotropic bodies. Phil. Mag. 8, fourth series, 241—263) См. также [1851, 5].
2. W e r t h e i m, Guillaume: Mémoire sur la capillarité. (Представлен во Французскую Академию в 1854 г.) (См. [1861, 1].)

1855 1. W e r t h e i m, Guillaume: Mémoire sur la torsion. (Представлена во Французскую Академию 19 февраля 1855 г. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 40, 411—414. (См. [1857, 1].)

1856 1. C o x, Homersham: The deflection of imperfectly elastic beams and the hyperbolic law of elasticity. Trans; Cambridge Phil. Soc. 9, Part II, 177—190.
1. S a i n t - V e n a n t, Adhémard Jean Claude Barré de: Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements transversaux et longitudinaux qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes. Journal de Mathématiques de Liouville, deuxième série 1, 89—189.

2. Saint-Venant, Adhémard Jean Claude Barré de: Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général. Académie des Sciences, Paris, Mémoires Presentés par Divers Savants, deuxième série 14, 233—560.
1. Wertheim, Guillaume: Remarques à l'occasion d'une Note de M. Zamminer sur le mouvement vibratoire de l'air dans les tuyaux. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 42, 493—494.

1857 1. Joule, James Prescott: On the thermo-electricity of ferruginous metals, and on the thermal effects of stretching solid bodies. Proc. Roy. Soc. (London) 8, 355—356 (June 1857).
2. Joule, James Prescott: On the thermal effects of longitudinal compression of solids. Proc. Roy. Soc. (London) 8, 564—565 (June 1857).
1. Thomson, Sir William (Lord Kelvin): On the thermo-elastic and thermo-magnetic properties of matter. Quarterly Journal of Mathematics, Cambridge, 1, 57—77.
1. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur la torsion, Première Partie. (Представлено во Французскую Академию Наук в феврале 1855 г.) Annales de Chimie et de Physique, troisième sèrie 50, 195—321.
2. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur la torsion, Deuxieme Partie. Annales de Chimie et de Physique, troisième série 50, 385—431. См. также [1852, 1].

1858 1. Biot, Jean Baptiste: Sur le charlatanisme. Mélanges Scientifiques et Litteraires. Paris 2, 69—86. (Эта статья появилась в 1808 г. в Mercury de France, Mélanges ... была опубликована в 1858 г. самим Био (Biot).)
2. Biot, Jean Baptiste: Discours sur l'ésprit d'invention et de recherche dans les sciences. Mélange Scientifiques et Littéraires, Paris 2, 87—95.
1. Clapeyron, E. (Benoit Paul Émile): Mémoire sur le travail des forces élastiques dans un corps solide élastique déformé par l'action de forces extérieures. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 46, 208—212.
1. Rankine, W. J. M.: A Manual of Applied Mechanics. London, 8 vols.
1. Wiedemann, Gustav Heinrich: Über die Torsion. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 103, 563—577.
1. Wundt, Wilhelm Max: Die Lehre von der Muskelbewegung. Braunschweig.

1859 1. Faraday, Michael: On certain conditions of freezing water, etc. Researches in Chemistry and Physics. London: Taylor and Francis, pp. 372—374.
1. Joule, James Prescott: On some thermo-dynamic properties of solids. Phil. Trans. Roy. Soc. London 149, 91—131.
1. Karmarsch, Karl: Ueber die absolute Festigkeit der Metalldrähte. Polytechnisches Centralblatt, Leipzig 1272—1276.
1. Kirchoff, Gustave Robert: Ueber das Verhältnis der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von federhartem Stahl. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 108, 369—392.
1. Volkmann, Alfred Wilhelm: Ueber die Elasticität der organischen Gewebe. Archiv für Anatomie, Physiologie und Wissenschaftliche Medizin, 293—313.
1. Wiedemann, Gustav Heinrich: Ueber die Biegung. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 107, 439—448.

1860 1. Kupffer, Adolf Theodore: Recherches Expérimentales sur l'Élasticité des Métaux, Vol. 1. St. Pétersbourg. См. также [1854, 1].
1. Kupffer, Adolf Theodore: Étet du Personnel. Bulletin de l'Académie Impériale de Sciences de St. Pétersbourg 11, supplément 1, 15—16 (1 juillet, 1860).
1. Morin, Arthur Jules et Henri Édouard Tresca: Détermination du coefficient d'élasticité de l'aluminium. (Extrait des Annales du Conservatoire des Arts et Métiers, № 2). Ann. Mines, cinquième série, 18, 63—66.
1. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur la compressibilité cubique de quelques corps solides et homogènes. Compt. Rend. 51, 969—974. (Опубликовано также в Англии: On the cubical compressibility of certain solid ho-

mogeneous bodies. Phil. Mag., fourth serie 21, 447—451 (1861).) См. также [1852, 3].
2. Wertheim, Guillaume: Remarques au sujet d'une communication de M. Cavaillé-Coll sur les tuyaux d'orgues. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 50, 309—311.
1861 1. Edlund, Erik: Untersuchung über die bei Volumveränderung fester Körper entstehended Wärme-Phänomene, sowie deren Verhältniss zu der dabei geleisteten mechanischen Arbeit. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 114, 1—40.
1. Verdet, Marcel Émile: Notices sur les travaux scientifiques de M. Guillaume Wertheim, membre de la Société Philomathique de Paris, redigée sur la demande de la Société. L'Institut 29, Nos. 1432, 1433, 1434, сноски на стр. 198—201; 205—209 и 213—216.
1. Wertheim, Guillaume: Mémoire sur la capillarité. Annales de Chimie et de Physique 63, 129—201. (Представлено во Французскую Академию в 1854 г.)
1862 1. Morin, Arthur Jules: Résistance des Matériaux, 3ème edition; Extrait. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 54, 235—239.
1863 1. Kohlrausch, Friedrich: Ueber die elastische Nachwirkung bei der Torsion. Annales der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 119, 337—368.
1. Okatow, Michail: Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatatiion bei Stahlstäben. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 119, 11—42.
1. Poggendorff, Johann Christian: Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der Exacten Wissenschaften, Band. 2, SS. 1302—1303. Leipzig. (О Гийоме Вертгейме.)
1. Winkler, Emil: Die Elasticitäts und Festigkeitscoefficienten Civilingenieur 405—436.
1864 1. Fizeau, Hippolyte Louis: Recherches sur la dilatation et la double refraction du crystal de roche échauffé. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 58, 923—932. (См. также: Untersuchungen über die Ausdehnung und Doppelbrechung des erhitzten Bergkrystalls. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 123, 515—526.)
1. Navier, Claude Louis Marie Henri: De la résistance des corps solides; Première section. Resumé des Leçons données à l'Ecole des Ponts et Chaussées, sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Troisième édition avec des Notes et des Appendices par M. Barré de Saint-Venant. Paris: Dunod. (См. [1833, 1], [1851, 1].)
1. Tresca, Henri Edouard: Mémoire sur l'écoulement des corps solidés soumis à de fortes pressions. (Extrait par l'auteur). Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 59, 754—758.
1865 1. Edlund, Erik: Quantitative Bestimmung der bei Volumveränderung der Metalle entstehenden Wärmephänomene und des mechanischen Wärme-Aequivalents, unabhängig von der inneren Arbeit des Metalls. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 126, 539—579.
1. Thomson, Sir William (Lord Kelvin): On the elasticity and veiscosity of metals. Proc. Roy. Soc. (London) 14, 289—297. См. также [1878, 1], [1880, 1].
1866 1. Everett, Joseph David: Account of experiments on the flexural and torsional rigidity of a glass rod, leading to the determination of the rigidity of glass. Phil. Trans. Roy. Soc. London 156, 185—191.
1. Schmulewitsch, Jacob: Ueber das Verhalten des Kautschuks zur Wärme und zur Belastung. Vierteljahresschr. Naturforsch. Ges. Zürich 11—12, 201—224.
1. Zöppritz, Karl: Berechnung von Kuppfer's Beobachtungen über die Elasticität schwerer Metallstäbe. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff), zweite Serie 129, 219—237. См. также Soret [1854, 1].
1867 1. Everett, Joseph David: Account of experiments on torsion and flexure

for the determination of rigidities. Phil. Trans. Roy. Soc. London 157, 139—153. См. также [1868, 1].

1. Saint-Venant, Adhémard Jean Claude Barré de: Mémoire sur le choc longitudinal de deux barres élastiques de grosseurs et de matières semblables ou différentes, et sur la proportion de leur force vive qui est perdue pour la translation ultérieure; et généralement sur le mouvement longitudinal d'un système de deux ou plusieurs prismes élastiques. J. Math. Pures Appl., deuxième série 12, 237—376.

1868 1. Everett, Joseph David: Account of experiments on torsion and flexure for the determination of rigidities. Phil. Trans. Roy. Soc. London 158, 363—370. (Также в Proc. Roy. Soc. (London) 15, 356 (1867); 16, 248 (1868).)

1869 1. Cornu, A. (Marie Alfred): Méthode optique pour l'étude de la déformation de la surface extérieure des solides élastiques. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 69, 333—337.

1870. 1. Kohlrausch, Friedrich: Über den Einfluß der Temperatur auf die Elasticitätscoefficienten einiger Metalle, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augustus-Universität, Göttingen 257—262.

2. Kohlrausch, Friedrich, und F. E. Loomis: Ueber die Elasticität des Eisens, Kupfers, und Messings, insbesondere ihre Abhängigkeit von der Temperatur. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 141, 481—503.

1. Saint-Venant, Adhémard Jean Claude Barré de: Rapport sur un complément, présenté par M. Tresca le 7 fevrier 1870 à son Mémoire du 27 novembre 1864 relatif à l'écoulement des corps solides malléables poussés hors d'un vase cylindrique par un orifice circulaire. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 70, 368—369.

2. Saint-Venant, Adhémard Jean Claude Barré de: Preuve, théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance au cisaillement et à l'extension ou à la compression dans le mouvement continue de déformation des solides ductiles au delà des limites de leur élasticité. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 70, 309—311.

1871 1. Schneebeli, Heinrich: Ueber den Stoss elastischer Körper und eine numerische Bestimmung der Stosszeit. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 143, 239—250.

1. Tresca, Henri Édouard: Étude sur la torsion prolongée au delà de la limite d'élasticité. (Extrait par l'auteur). Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 73, 1104—1105.

2. Tresca, Henri Édouard: Résultats des expériences de flexions faites sur des rails en fer et en acier au delà de la limite d'élasticité. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 73, 1153—1155.

1872 1. Hopkinson, John: On the rupture of iron wire by a blow. Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society 11, 40—45. (Также в Original Papers of John Hopkinson, Vol. II, Scientific Papers, ed. by B. Hopkinson; pp. 316—320; Cambridge, England (1901).)

2. Hopkinson, John: Further experiments on the rupture of iron wire. Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society 11, 119—121. (Также в Original Papers... (см. выше), стр. 321—324.)

1. Kohlrausch, Friedrich Wilhelm Georg: Leitfaden der praktischen Physik, zweite Verlag. Leipzig: B. G. Teubner Verlag. (Первое издание в 1870 г.; издания от 1 до 9 были озаглавлены так, как указано выше, издания от 10 до 19 имели название Lehrbuch der praktischen Physik. (Я лично использовал издание 1905 г.). Сжатый вариант появился в 1900 г. под названием: Kleiner Leitfaden der praktischen Physik.) Перевод на английский язык см. [1886, 1].

1. Schneebeli, Heinrich: Stossversuche mit Kugeln aus verschiedenem Metall. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 145, 328—331.

1. Tresca, Henri Édouard: Mémoire sur l'écoulement des corps solides. Mémoires présentés par Divers Savants à l'Académie des Sciences, Paris, deuxième série 20, 75—135.

2. Tresca, Henri Édouard: Mémoire sur le poinçonnage des métaux et des matières plastiques. Mémoires présentés par Divers Savants, l'Académie des Sciences, Paris, deuxième série 20, 619—828. (Представлено во Французскую Академию в марте 1869.)
3. Tresca, Henri Édouard: Mémoire complémentaire sur le poinçonnage des métaux et des matières plastiques. Mémoires présentés par Divers Savants à l'Académie des Sciences, Paris, deuxième série 20, 829—838.

1874 1. Baumgarten, G.: Die Elasticität von Kalkspathstäbchen. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 152, 369—397.
1. Exner, Franz: Über die Abhängigkeit der Elasticität des Kautschuks von der Temperatur. Sitz. ber. Math.-Naturwiss. Cl. Kaiserl. Akad. Wiss., Wien 69, Abt. II, 102—114.
1. Thurston, Robert Henry: A note on the resistance of materials. Trans. Am. Soc. Civil Engrs. 2, Supplement, 239—240.
1. Voigt, Woldemar: Doctoral dissertation, Königsberg.

1875 1. Everett, Joseph David: Illustrations of the C. G. S. System of Units. (см. Everett [1891, 1], 4th edition).
1. Lemale, Alex Guislain: Monnaies, Poids, Mesures et Usages Commerciaux de tous les Etats du Monde, deuxième édition. Paris: Hachette Cie; Havre; A. Lemale, Ainé.

1876 1. Pochhammer, Leo: Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder. Journal für reine und angewandte Mathematik (Crelle) 81, 327—336.
1. Voigt, Woldemar: Bestimmung der Elasticitätsconstanten des Steinsalzes. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 7, 1—53.

1877 1. Bauschinger, Johann: Ueber die Erhöhung der Elasticitätsgrenze der Metalle. Dingler's Polytechnisches Journal 224, 1—13, 129—134.
1. Obermayer, A. von: Ein Beitrag zur Kenntniss der zähflüssigen Körper. Sitz. ber Math.-Naturw. Cl. Kaiserl. Akad. Wiss., Wien 75, 665—678.
1. Tyndall, John: Six Lectures on Light. Second edition. New York.

1878 1. Cornu, A. (Marie Alfred), and J. B. Baille: Étude de la résistance de l'air dans la balance de torsion. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 86, 571—574.
1. Saint-Venant, Adhémard Jean Claude Barré de: Des paramètres d'élasticité des solides, et de leur détarmination expérimentale. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 86, 781—785.
1. Thomson, Sir William (Lord Kelvin): On the thermoelastic, thermomagnetic, and pyroelectric properties of matter. Phil. Mag., fifth serie 5, 4—27.
2. Thomson, Sir William (Lord Kelvin): Elasticity. Edinburgh: Adam and Charles Black. (Препринт работы [1880, 1].)
1. Thurston, Robert Henry: Salisbury Iron. Its Composition, Qualities and Uses. Salisbury, Connecticut, U. S. A.
1. Winkler, Emil: Deformationsversuche mit Kautschuk-Modellen Civilingenieur 24, 81—100. Более ранний обзор работ по упругости и прочности многих твердых тел см. Winkler [1863, 1].

1879 1. Bauschinger, Johann: Ueber die Quercontraction und Dilatation bei der Längenausdehnung und Zusammendrückung prismatischer Körper. Civilingenieur, Leipzig 25, 81—124.
1. Bertrand, Joseph Louis François: Éloge de Jean-Victor Poncelet. Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris 41, I—XXV.
1. Klemenčič, Ignaz: Beitrag zur Kenntniss der inneren Reibung in Eisen. Sitz. ber. Math.-Naturw. Cl. Kaiserl. Akad. Wiss., Wien 78, Abt. II, 935—942.
1. Mallock, Arnulph: The measurement of the ratio of lateral contraction to longitudinal extension in a body under strain. Proc. Roy. Soc. (London) 29, 157—161.

1880 1. Amagat, Émile Hilaire: Sur le déformation des tubes de verre sous de fortes pressions. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 90, 863—864 (Avril 1880).

1. Buchanan, John Young: Preliminary note on the compressibility of glass. Trans. Roy. Soc. Edinburgh 29, 589—598.
1. Imbert, A.: Recherches Théoriques et Expérimentales sur l'Élasticité du Caoutchouc. Lyon.
1. Thomson, Sir William (Lord Kelvin): Elasticity. Encyclopaedia Britannica, ninth edition, page 796. (Переиздано в Thomson, Sir William, Elasticity and Heat. Edinburgh: Adam and Charles Black (1880).) См. также [1865, 1], [1878, 1].
1881 1. Bauschinger, Johann: Ueber die Veränderung der Elastizitätsgrenze und des Elasticitätsmoduls verschiedener Metalle. Civilingenieur 27, 289—348.
2. Bauschinger, Johann: Experimentelle Prüfung der neueren Formeln für die Torsion prismatischer Körper. Civilingenieur 27, 115—130.
1. Klang, Herrmann: Die Elasticitätsconstanten des Flußspathes, Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann) 12, 321—335.
1882 1. Boltzmann, Ludwig: Einige Experimente über den Stoss von Cylindern. Sitz. ber. Math.-Naturw. Cl. Kaiserl. Akad. Wiss., Wien 84, Abt. II, 1225—1229.
1. Fischer, (Friedrich) Hugo Robert: Untersuchungen über das Verhalten des Phosphorbronzedrahtes bei der Beanspruchung durch Zugkräfte. Dingler's Polytechnisches Journal 245, 64—75.
1. Hertz, Heinrich Rudolph: Ueber die Berührung fester elastischer Körper. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) 92, 156—171.
1. Miller, Andreas: Untersuchung über den Einfluß der Temperatur auf Außerungen von Molekularkräften. Sitz. ber. Math.-Physik. Cl. Akad. Wiss., München 12, 377—462.
1. Müller, Ernst: Ueber bleibende und elastische Formänderungen der Rohseide. Civilingenieur 28, 631—640.
1. Voigt, Woldemar: Ueber das Verhältnis der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von isotropem Glas. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann), Neue Folge 15, 497—513.
1883 1. Tomlinson, Herbert: The influence of stress and strain on the action of physical forces. Phil. Trans. Roy. Soc. London 174, Part 1, 1—172.
1. Voigt, Woldemar: Die Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann), Neue Folge 19, 44—65.
1884 1. Amagat, Émile Hilaire: Sur la valeur du coefficient de Poisson relative au caoutchouc. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 99, 130—133. См. также [1880, 1].
1. Bach, Carl: Festigkeit und Dehnung von Treibriemenleder. Zeitschritf des Vereins deutscher Ingenieure 28, 740—742.
1. Coulomb. (См. [1784, 1].)
1. Fischer, Hugo: Experimentelle Untersuchungen über die Zugfestigkeit und Zugelasticität von Metalldrähten. Civilingenieur 30, 392—410.
1. Hausmaninger, Victor: Versuch über den Stoss von Kautschuckcylindern. Sitz. ber. Math.-Naturw. Cl. Kaiserl. Akad. Wiss., Wien 88, Abt. II, Nos. 1—5, 768—781.
1. Voigt, Woldemar: Neue Bestimmungen der Elasticitätsconstanten von Steinsalz und Flusspath. Sitz. ber. Akad. Wiss., Berlin 989—1004.
1885 1. Considère, Armand Gabriel: Mémoire sur l'emploi du fer et l'acier dans les constructions. Annales des Ponts et Chaussées, Mémoire. No. 34, sixième serie, tome 9, premier semester. Paris Vve Ch. Duned, pp. 574—775. (См. немецкий перевод [1888, 1].)
1. Hausmaninger, Victor: Zur Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Körper. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 25, 189—202. (См. также в Sitz. ber. Akad. Wiss., Berlin 49—62 (1885).)
1886 1. Bauschinger, Johann: Über die Veränderung der Elasticitätsgrenze und der Festigkeit des Eisens und Stahls durch Strecken und Quetschen, durch Erwärmen und Abkühlen und durch oftmal wiederholte Beanspruchung. Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k.

polytechnischen Schule, München, Hefte 7—14 (1877—1886); Heft 13, SS. 1—115.
1. Hamburger, Max: Untersuchungen über die Zeitdauer des Stosses von Cylindern und Kugeln. Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge 28, 653—665.
1. Kohlrausch, Friedrich: An Introduction to Physical Measurements. (Переведено со второго немецкого издания Томасом Хатчинсоном Уаллером и Генри Ричардсоном Проктором) New York: D. Appleton und Company.
1. Pulfrich, Carl: Ueber die elastische Nachwirkung eines Kautschukschlauches und deren Einfluß auf die Constante μ. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 28, 87—107.
1. Todhunter, Isaac, and Karl Pearson: A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, Vol. I. Cambridge: University Press. (Vol. II, части I и II были впервые опубликованы в 1893.) Тома I и II были переизданы издательством Dover Publications, Нью Йорк (1960).
1. Thomlinson, Herbert: Internal Friction of Metals. Phil. Trans. Roy. Soc. London 177, Part II, 802—807.
1. Unwin, William Cawthorne: «On the change of the elastic limit and strength of iron and steel, by drawing out, by heating and cooling, and by repetition of loading». (Перевод резюме статьи Баушингера (J. Bauschinger), Mitteilung aus dem Mechanischtechnischen Laboratorium der K. Hochschule in München, 1886, S. 1—115.) Proc. Inst. Civil. Engrs, 87, 463—465.
2. Unwin, William Cawthorne: The employment of authographic records in testing materials. J. Soc. Arts 1885—1886, 34, 336—347.

1887. 1. Bach, Carl von: Elasticität von Treibriemen und Treibseilen. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 31, 221—225.
1. Kennedy, Alexander Blackie William: The use and equipment of engineering laboratories. Proc. Inst. Civil Engrs, session 1886—1887, 88, Part II, 1—80.
1. Voigt, Woldemar: Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Beryll und Bergkrystall. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 31, 474—501.

1888 1. Amagat, Émile Hilaire: Sur la vérification expérimentale des formules de Lamé et la valeur du coefficient de Poisson. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 106, 479—482 (février 1888).
2. Amagat, Émile Hilaire: Recherches sur l'élasticité du cristal. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 107, 618—620 (Octobre 1888).
1. Cantone, Michele: Nuovo metodo per la determinazione delle due constanti di elasticità. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, Roma. Scienze fisiche, matematiche e naturali, quarto series 4, Note 1, 220—227; Note II, 292—297. (См. также в том же томе статью Cantone: Ricerche intorno alle deformazioni dei condensatori. Note I, 344—353; Note II, 471).
1. Considère, Armand Gabriel: Anwendung von Eisen und Stahl bei Konstruktionen. Перевод с французского на немецкий (E. Hauff); Wien (См. [1885, 1].)
1. Mercadier, Ernest Jules: Sur la détermination des constants et du coefficient d'élasticité dynamique de l'acier. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 107, 27—29. См. также [1889, 1].
1. Voigt, Woldemar: Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Topaz und Baryt. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 34, 981—1028.
1. Weyrauch, Jacob Johann von: Die Festigkeitseigenschaften und Methoden der Dimensionsberechnung von Eisen- und Stahlconstructionen. Leipzig: Teubner Verlag.

1889 1. Amagat, Émile Hilaire: Compressibilité du mercure et élasticité du verre. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 108, 228—231 (Février 1889).
2. Amagat, Émile Hilaire: Recherches sur l'élasticité des solides. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 108, 1199—1202 (Juin 1889).
3. Amagat, Émile Hilaire: Détermination direct (c'est-à-dire sans faire usage d'aucune formule) de la compressibilité du verre du cristal et des mé-

taux jusqu'a 2000 atm. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 108, 727—730 (Avril 1889).
1. Chree, Charles: The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application. Trans. Cambridge Phil. Soc. 14, 250—369.
1. Le Chatelier, André: Influence de la température sur les propriétés mécaniques du fer et de l'acier. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 109, 58—61.
1. Mercadier, Ernest Jules Pierre: Études expérimentales sur l'élasticité dynamique et statique des fils métalliques. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 108, 344—346.
1. Tacke, Eduard: Über den Wert der s'Gravesande'schen Methode zur Bestimmung der Elasticitätscoefficienten dünner Drähte. Greifswald: J. Abel.
1890 1. Amagat, Émile Hilaire: Variation de l'élasticité du verre et du cristal avec la température. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 110, 1246—1249 (Juin 1890).
1. Bertrand, Joseph Louis François: Éloge historique de Pierre-Charles-François Dupin. Éloges Académiques, Paris pp. 221—246.
1. Kowalski, Joseph von: Elasticität und Festigkeit des Glases bei höheren Temperaturen. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 39, 155—158.
1. Le Chatelier, André: Les lois du recuit et leur conséquences au point de vue des propriétés mécaniques des métaux. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 110, 705—708. См. также [1889, 1].
1. Stradling, Georg: Ueber s'Gravesande's Verfahren zur Bestimmung des Elasticitätsmoduls. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 41, 330—333.
1891 1. Everett, Joseph David: Illustrations of the C. G. S. System of Units, fourth edition. London and New York: Macmillan and Co. (первое издание в 1875 г.).
1. Kirkaldy, William G.: Strength and Properties of Materials with Description of the System of Testing. London.
1. Martens, Adolf: Investigations on the influence of heat on the strength of iron. Translated and abstracted by George Rudolph Bodmer. Proc. Inst. Civil Engrs, London 104, 209—224 (1890—1891). Оригинал на немецком языке опубликован в Mittheilungen aus den Koeniglischen technischen Versuchanstalten zu Berlin, S. 159 (1890).
1. Thompson, Joseph Osgood: Ueber das Gesetz der elastischen Dehnung: Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 44, 555—576.
1. Voigt, Woldemar: Ueber einen einfachen Apparat zur Bestimmung der thermischen Dilatation fester Körper, speciell der Krystalle. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 43, 831—834.
1892 1. Beare, Thomas Hudson: Notes from an engineering laboratory; elastic tests of iron and steel. Engineering 53, 276—278, 310—311.
1. Love, Augustus Edward Hough: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. (Четвертое издание было опубликовано в 1927 г. и перепечатано в 1944 г. New York: Dover.)
1. Voigt, Woldemar: Bestimmung der Constanten der Elasticität und Untersuchung der inneren Reibung für einige Metalle. Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 38, 1—87.
1. Voigt, Woldemar: Über die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Krystalle. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 47, 671—693.
1893 1. Amagat, Émile Hilaire: Mémoire sur l'élasticité et la dilatabilité des fluides jusqu'aux très hautes pressions. Annales de Chimie et de Physique 29, 505—574.
1. Hartig, Ernst Karl: Der Elasticitätsmodul des gerades Stabes als Funktion der spezifischen Beanspruchung. Civilingenieur 39, 113—138.
1. Todhunter, Isaac, and Karl Pearson: A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, Vol. II, Parts I and II (1893). Cambridge: University Press. (Том I впервые был опубликован в 1886 г.

Четвертое издание обоих томов осуществлено перепечаткой в 1960 г., New York: Dover).

1. Voigt, Woldemar: Bestimmung der Elasticitätsconstanten einiger quasi-isotroper Metalle durch langsame Schwingungen von Stäber. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 48, 674—707.
2. Voigt, Woldemar: Ueber ein von Wertheim aufgestelltes Gesetz für die Elasticitätsconstanten fester Körper. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 49, 396—400.
3. Voigt, Woldemar: Bestimmung der Constanten der thermischen Dilatation und des thermischen Druckes für einige quasi-isotrope Metalle. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 49, 697—708.

1894 1. Auerbach, Felix: Über die Härte- und Elasticitätsverhältnisse des Glasses. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 53, 1000—1038.
1. Bach, Carl: Elasticität und Festigkeit. Berlin: J. Springer. (Имелось 6 изданий этой книги между 1894 г. и 1911 г.)
1. Bock, Adalbert Michael: Ueber das Verhältnis der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von verschiedenen Metallen als Funktion der Temperatur. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 52, 607—620.
1. Rayleigh, Lord (John William Strutt, 3rd): Theory of Sound. London: Macmillan.
1. Stromeyer, C. E.: Experimental determinations of Poisson's ratio. Proc. Roy. Soc. (London) 55, 373—383.
1. Winkelmann, Adolph August, und Friedrich Otto Schott: Über die Elasticität and über die Zug- und Druckfestigkeit verschiedener neuer Gläser in ihrer Abhängigkeit von der chemischen Zusammensetzung. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 51, 697—746.

1895 1. Dewar, Sir James: Note on the viscosity of solids. Proc. Chem. Soc. 10, 136—138.
1. Noyes, Mary Chilton: The influence of heat and the electric current upon Young's modulus for a piano wire. Phys. Rev. 2, 277—297.
1. Le Premier Siècle de l'Institut de France, 1795—1895, 2 Vols. (autheur: le Compte de Franqueville) Paris.

1896 1. Noyes, Mary Chilton: The influence of heat, of the electric current, and of magnetization upon Young's Modulus. Phys. Rev. 3, 432—447.

1897 1. Bach, Carl: Allgemeines Gesetz der elastischen Dehnungen. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 41, особенно стр. 248—252.
1. Mehmke, Rudolf: Zum Gesetz der elastischen Dehnungen. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 42, 327—338.
1. Winkelmann, Adolph August: Ueber die Änderung des Elasticitätscoefficienten des Platins mit wachsender Temperature. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 63, 117—123.

1898 1. Brillouin, Marcel: Les écarts apparents de la loi de Hocke. Poinçons et couteaux de pendules, chaines, vis calantes. Annales de Chimie et de Physique, 7-ème série, 13, 231—264.
2. Brillouin, Marcel: Théorie des déformations permanentes des métaux industriels, Annales de Chimie et de Physique, 7-ème série, 13, 377—404.
1. Haweis, Hugh Reginald: Old Violins and Violin Lore. London and New York. Я не абсолютно уверен в дате первой публикации этого тома. На стр. 13 предисловия, написанного в 1898 г., Haweis говорит: «Я может быть буду прощен, если завершу это предисловие следующими словами, которые произнес в Королевском обществе в 1872 г.». По-видимому, книга была переиздана в 1922 г.
1. Pulfrich, Carl: Über einen Interferenzmeßapparat. Zeitschrift für Instrumentenkunde 18, 261—267.

1899 1. Shakespear Gilbert Arden: The application of an interference-method to the investigation of Young's modulus for wires, and its relation to eshanges of temperature and magnetization; and a further application of the same method to the study of the change in dimensions of iron and steel wires by magnetization. Phil. Mag., London, fifth series 47, 539—556.

1. Straubel, Constantin Rudolph: Ueber die Elasticitätszahlen und Elasticitätsmoduln des Glasses. Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge 68, 369—413.

1900 1. Benton, John Robert: Abhängigkeit des spezifischen Torsionswiderstandes einiger Metalldrähte von der Spannung. Annalen der Physik and Chemie, vierte Serie 3, 471—491.

1. Searle, George Frederick Charles: Apparatus for measuring the extension of a wire. Proc. Cambridge Phil. Soc. 10, 318—323.

1901 1. Benton, John Robert. Determination of Poisson's ratio by means of an interference apparatus. Phys. Rev. 12, 36—42.

1. Kohlrausch, Friedrich Wilhelm Georg, und Eduard August Grüneisen: Über die durch sehr kleine elastische Verschiebungen entwickelten Kräfte. Sitz. ber. Königl.-preuss. Akad. Wiss., Berlin, 1086—1091.

1. Schaefer, Clemens: Ueber der Einfluss der Temperatur auf die Elasticität der Metalle. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 5, 220—233.

1. Voigt, Woldemar. Zur Festigkeitslehre. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 4, 567—591.

1902 1. Bach, Carl von: Elasticität und Festigkeit, 4te edition. Berlin: J. Springer. (Первое издание было опубликовано в 1889 г. Между 1984 и 1911 г. было шесть изданий этой книги.)

1. Schaefer, Clemens: Ueber den Einfluß der Temperatur auf die Elasticität der Elemente. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 9, 665—676.

2. Schaefer, Clemens: Ueber die Elasticitätszahlen einiger Stoffe mit niedrigem Schmelzpunkt. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 9, 1124—1127.

1. Schüle, Wilhelm: Die Biegungslehre gerader Stäbe mit veränderlichem Dehnungskoeffizienten. Dingler's Polytechnisches Journal 317, 149—154.

1903 1. Duhem, Pierre Maurice Marie: L'Évolution de la Mécanique. Paris.

1. Morrow, J.: On an instrument for measuring the lateral contraction of tie-bars, and on the determination of Poisson's ratio. Phil. Mag. 6, 417—424.

1. Perot, A.: Sur les efforts développés dans le choc d'éprouvettes entaillées. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 137, 1044—1046 (Juillet-Décember, 1903).

1904 1. Buchanan, John Young: On the compressibility of solids. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 73, 296—310.

1. Dewar, Sir James, and Robert Asholt Hadfield: Action de la température de l'air liquide sur les propriétés mécaniques du fer de ses alliages. Annales de Chimie et de Physique, 8-ème série 4, 556—574.

1. Mallock, Arnulph: On a direct method of measuring the coefficient of volume elasticity of metals. Proc. Roy. Soc. (London) 74, 50—52.

1. Perot, A., et Henri Michel Lévy: Sur la fragilité des métaux. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 138, 474—476.

2. Perot, A., et Henri Michel Lévy: Sur la fragilité de certains aciers. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 139, 1198—1200.

1905 1. Chree, Charles: Note on the determination of the volume elasticity of elastic solids. Proc. Roy. Soc. (London) 74, 518—523.

1. Horton, Frank: On the modulus of torsional rigidity of quartz fibers and its temperature coefficient. Proc. Roy. Soc. (London) 74, 401—402.

1. Kohlrausch, Friedrich Wilhelm Georg: Lehrbuch der praktischen Physik, Leipzig. (См.: Kohlrausch [1872, 1].)

1906 1. Blind, August: Maß-, Münz- und Gewichtswesen, Leipzig: G. J. Göschen (Это том 288 в серии книг, озаглавленных Sammlung Göschen.)

1. Born, Max: Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum, unter verschiedenen Grenzbedingungen. Doctoral dissertation. 13 Juni, Göttingen.

1 Grüneisen, Eduard August: Über das Verhalten des Gusseisens bei

kleiner elastischer Dehnung. Deutsche Physikalische Gesellschaft 8, 469—477.

1907 1. Grüneisen, Eduard August: Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen. 1. Der dynamisch und statisch gemessene Elastizitätsmodul. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 22, 801—851.
1. Henning, Fritz: Über die Ausdehnung fester Körper bei tiefer Temperature. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 22, 631—639.
1. Holborn, Ludwig, and Siegfried Valentiner: Eine Vergleichung der optischen Temperaturskale mit dem Stickstoffthermometer bis 1600°. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 22, 1—48.
1. Leber, E.: Ueber den gegenwärtigen Stand der Schlagbiegeprobe mit eingekerbten Stäben. Stahl und Eisen 27, особенно страницы 1121—1125, 1160—1164.
1. Richards, Theodore William (в сотрудничестве с W. N. Stull, F. N. Brink and F. Bonnet, Jr.): The Compressibilities of the Elements and Their Periodic Relations, Carnegie Institution of Washington, Publication No. 76.
1. Scheel, Karl Franz Friedrich Christian: Versuche über die Ausdehnung fester Körper, insbesondere von Quartz in Richtung der Hauptachse, Platin. Palladium und Quartz bei der Temperatur der flüssigen Luft. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 9, 3—23.
2. Scheel, Karl Franz Friedrich Christian, and Wilhelm Heuse: Bestimmung der Ausdehnung des Platins zwischen —183° und Zimmertemperatur mit dem Komparator und dem Fizeauschen Apparat. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 9, 449—459.
1. Walker, Henry: The variation of Young's modulus under an electric current. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 27, 343—356 (November 1906 to July 1907).

1908 1. Chwolson, Orest Danilovich: Traité de Physique 1 (перевод E. Davaux с русского и немецкого изданий). Paris.
Хвольсон О. Д. Курс физики, тт. 1—5. Берлин 1923 г. и т. 6 дополнительный (ч. 1, 2), Берлин 1926 г. (тт. 1—3 — пять изданий, т. 4 — три издания, т. 5 — два издания (первые четыре тома первыми изданиями выходили в 1892—1896 гг.).
1. Grüneisen, Eduard August: Torsionmodul, Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation und kubische Kompressibilität. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 25, 825—851.
1. Searle, George Frederick Charles: Experimental Elasticity. Cambridge University Press.
1. Sears, J. E. On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends. Part I. Proc. Cambridge Phil. Soc. 14, 257—286.
1. Thiesen, Max Ferdinand: Die Zustandsgleichung der Metalle Verh. Deut. Phys. Ges. 10, 410—417.
1. Walker, Henry: The variation of Young's modulus under an electric current (Part II). Proc. Roy. Soc. Edinburg 28, 652—675 (November 1907—July 1908).

1909 1. Poynting, J. Henry: On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears and on the lengthening of loaded wires when twisted. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 82, 546—559.
1. Royal Society of London, Catalogue of Scientific Papers (1800—1900) Subject Index, Vol. II, Mechanics, Cambridge.

1910. 1. Andrade, Edward Neville da Costa: The viscous flow in metals and allied phenomena. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 84, 1—12.
1. Grüneisen, Eduard August: Ueber die thermische Ausdehnung der Metalle. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 33, 33—64.
2. Grüneisen, Eduard August: Ueber den Einfluß von Temperatur und Druck auf Ausdehnungskoeffizient und spezifische Wärme der Metalle. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 33, 65—78.
3. Grüneisen, Eduard August: Einfluß der Temperatur auf die Kompre-

ssibilität der Metalle. Annalen der Physik und Chemie, vierte Serie 33, 1239—1274.

1. Unwin, William Cawthorne: The Testing of Materials of Construction, 3rd edition, London: Longmans, Green & Co. См. также [1886, 2].
1. Voigt, Woldemar: Lehrbuch der Krystallphysik (особенно Kapitel VII, S. 716—763). Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. (Переиздано в 1928 г.)

1911 1. Walker, Henry: The variation of Young's modulus under an electric current. Part III. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 31, 186—250.

1912 1. Poynting, J. Henry: On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted, and on the pressure of distorsional waves in steel. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 86, 534—561.
1. Sears, J. E.: On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends. Part II. Trans. Cambridge Phil. Soc. 21, 49—105.

1914 1. Colonnetti, Gustavo: Esperienze sulla elasticità a trazione del rame. Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali 23. (См. стр. 165—171, 225—231, 421—427.)
1. Desch, Cecil H.: Abstract of paper by Colonnetti [1914, 1] J. Inst. Met. No. 2, 272—273.
1. Hopkinson, Bertram: A method of measuring the pressure produced in the detonation of explosives or by the impact of bullets. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 213, 437—456.
1. Lea, Frederick Charles, and O. H. Crowther: The change of the modulus of elasticity and of other properties of metals with temperature. Engineering 98, 487—489.

1915 1. Richards, Theodore William: Concerning the compressibilities of the elements, and their relations to other properties. J. Am. Chem. Soc. 37, No. 7, 1643—1657 (July-December, 1915).

1921. 1. Bach, Carl, and Richard Wilhelm Baumann: Festigkeitseigenschaften und Gefügebilder der Konstruktionsmateriallen. Berlin: J. Springer.
1. Jessop, H. T.: On Cornu's method of determining the elastic constants of glass. Phil. Mag., sixth series 42, 551—568.
1. Nelson, Harley A.: Stress-strain measurements on films of drying oils, paints and varnishes. Proceedings of the 24th Annual Meeting of the American Society for Testing and Materials 21, 1111—1138. См. также [1923, 1, 2].
1. Timoshenko, Stephen Prokofievitch: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Phil. Mag., sixth series 41, 744—746.

1922 1. Lea, Frederick Charles: The effect of temperature on some of the properties of metals. Engineering 113, 829—832.
1. McCollum, Burton, and O. S. Peters: A new electrical telemeter. U. S. Bur. Standards Technological Papers, No. 221, 17, 737—777 (1922—1924).
1. Whittemore, H. L.: Resume of impact testing of materials, with bibliography. Symposium on Impact Testing of Materials, American Society of Testing Materials 6—36.

1923 1. Baumann, Richard Wilhelm: см. Landolt, Hans Heinrich: Landolt-Börnstein's Physikalisch-Chemische Tabellen, Band. 1. Richard Börnstein, Redakteur, SS. 79—93, Berlin: J. Springer.
1. Nelson, Harley A.: Physical properties of varnish films indicated by stress-strain measurements. Proc. of the 26th Annual Meeting of the American Society for Testing and Materials 23, Part I, Committee Report 290—299.
2. Nelson, Harley A., and George W. Rundle: Further studies of the physical properties of drying-oil, paint and varnish films; Proc. Am. Soc. Testing Materials 23, Part II: Technical Papers: pp. 356—368.
1. Portevin, Albert, and François Le Chatelier: Sur un phénomène observé lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 176, 507—510.

1924 1. Richards, Theodore William: Compressibility, internal pressure and change of atomic volume. J. Franklin Inst. 198, 1—27 (July 1924).

1. Wagstaff, John Edward Pretty: Experiments on the duration of impacts, mainly of bars with rounded ends, in elucidation of the elastic theory. Proc. Roy. Soc. (London), Ser A 105, 544—570.
1925 2. Taylor, Sir Geoffrey Ingram, and W. S. Farren: The heat developed during plastic extension of metals. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 107, 422—451. (Также в Taylor [1958, 1], paper No. 6, pp. 85—108.)
1927 1. Love, Augustus Edward Hough: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4th edition. (Первая публикация в 1892 г. См. также Dover, New York, перепечатано с 4-го издания (1944 г.) (Имеется перевод на русский язык: А. Ляв. Математическая теория упругости: Перевод с четвертого английского издания Б. В. Булгакова и В. Я. Натанзона.— М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, Главная редакция общетехнической литературы и полиграфии, 1935.)
1928 1. Kennelly, Arthur Edwin: Vestiges of Pre-Metric Weights and Measures Persisting in Metric-System Europe. New York: Macmillan Co.
1. Riekert, P. von: Tafeln der Elastizitätskonstanten und Festigkeitszahlen. Mechanik der elastischen Körper, SS. 623—627. In: Handbuch der Physik, H. Geiger and Karl Scheel. Redakteuren, Vol. 6. Berlin: J. Springer.
1930 1. Sayre, Mortimer Freeman: Elastic behavior of spring materials. Proceedings of the Thirty-third Annual Meeting of the American Society for Testing and Materials 30, Part II, Technical Papers, pp. 546—558.
1931 1. Bridgman, Percy Williams: The Physics of High Pressure. New York: The Macmillan Co.; также: London: G. Bell & Sons, Ltd. (1949).
1. Coker, Ernest George, and Louis Napoleon George Filon: A Treatise on Photo-Elasticity. Cambridge University Press. Издан перевод на русский язык: Кокер Э., Файлон Л. Оптический метод исследования напряжений.— М.: ОНТИ, 1936.
1. Eaton, Erik C.: Resistance strain gage measures stresses in concrete. Engineering News-Record 107, 615—616 (Oct. 15, 1931).
1. Everett, Franklin L.: Strength of materials subjected to shear at high temperatures. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs 53, APM-53-10, 117—134. (Из диссертации на соискание степени доктора философии, выполненной в Мичиганском университете под руководством проф. С. П. Тимошенко.)
1. Goens, Karl Anton Erich: Über die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von Stäben mit Hilfe von Biegeschwingungen. Annalen der Physik und Chemie, 5ste Serie 11, 649—678.
1. Hanson, Daniel, and M. A. Wheeler: The deformation of metals under prolonged loading. Part I: The flow and fracture of aluminium. J. Inst. Metals, London 45, 229—264.
1932 1. Honegger, E.: The modulus of elasticity of steel at high temperature. Brown Boveri Review 19, 143—147.
1934 1. Balamuth, Lewis: A new method for measuring elastic moduli and the variation with temperature of the principal Young's modulus of rocksalt between 78°K and 273°K. Phys. Rev., second series 45, 715—720. (January — June 1934).
1. Sayre, Mortimer Freeman: Plastic behavior in light of creep and elastic recovery phenomenon. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs 56, 559—561.
1. Schaefer, Clemens, and Ludwig Bergmann: Laue-Diagramme mit optischen Wellen. Sitz. ber. Akad. Wiss., Berlin 152—153.
2. Schaefer, Clemens, and Ludwig Bergmann: Neue Interferenzerscheinungen an schwingenden Piezoquarzen. Sitz. ber. Akad. Wiss., Berlin 192—193.
2. Taylor, Sir Geoffrey Ingram, and H. Quinney: The latent energy remaining in a metal after cold working. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 143, 307—326. (См. также Taylor [1958, 1]. paper No. 19, pp. 310—328).
1935 1. Carlson, Roy Washington: Five years improvement of the elastic-wire strain meter. Engineering News-Record 114, 696—697 (May 16, 1935).
1. Chalmers, Bruce: An interference extensometer and some observations

on the elasticity of lead. Proc. Phys. Soc. 47, 352—370. См. также Sayre [1934, 1].

1. Fues, Erwin, and Hanfried Ludloff: Weitere Untersuchungen über die Beugungserscheinungen an schwingenden Kristallen. (II. Theoretischer Teil.) Sitz. ber. Akad. Wiss., Berlin, Phys.-Math. Kl., 225—239.
1. Köster, Werner: Eigenschaftsveränderungen irreversibler Ternärer Eisenlegirungen durch Wärmebehandlung. Arch. Eisenhüttenw. 8, No. 11, Gruppe E, No. 439, 491—498 (Mai, 1935).
1. Schaefer, Clemens and Ludwig Bergmann: Weitere Untersuchungen über die Beugungserscheinungen an schwingenden Kristallen (I. Experimenteller Teil) Sitz. ber. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl., 222—225. См. также [1934, 2].
1. Sichel, Ferdinand J. M.: The elasticity of isolated resting skeletal muscle fibers. J. Cellular and Comparative Physiology 5, 21—41.

1936 1. Chalmers, Bruce: Micro-plasticity in crystals of tin. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 156, 427—443.
1. Fuchs, Klaus: The elastic constants and specific heats of the alkali metals. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A 157, 444—450.
1. Goens, E. (Karl Anton Erich), and J. Weerts: Hauptelastizitätskonstanten des Einkristalls von Kupfer, Gold und Blei. Physikalische Zeitschrift 37, 321—326.
1. *Jones, Paul G., and Frank Edwin Richart: The effect of testing speed* on strength and elastic properties of concrete. Proceedings of the Thirty-ninth Meeting of the American Society for Testing and Materials 36, Part II, Technical Papers. 380—391.
1. Prowse, W. A.: The development of pressure waves during the longitudinal impact of bars. Phil. Mag., seventh series 22, 209—239.
1. Rose, Fred C.: The variation of the adiabatic elastic moduli of rocksalt with temperature between 80°K and 270°K. Phys. Rev., second series 49, 50—54 (January — June 1936).

1937 1. Chalmers, Bruce: Precision extensometer measurements on tin. J. Inst. Metals, London 61, 103—118.
1. Förster, Fritz: Ein neues Meßverfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls und der Dämpfung. Z. Metallk. 29, 109—115.
2. Förster, Fritz, and Werner Köster: Elastizitätsmodul und Dämpfung in Abhängigkeit vom Werkstoffzustand. Z. Metallk. 29, 116—123.
1. Murnaghan, Francis D.: Finite deformation of an elastic solid. Am. J. Math. 59, 235—260.

1938 1. Clark, Donald Sherman, and G. Datwyler: Stress-strain relations under tension impact loadings. American Society of Metals, Proceedings of the 4lst Annual Meeting 38, Part II, 98—111.
1. Powers, Treval Clifford: Measuring Young's modulus of elasticity by means of sonic vibrations. Proceedings of the Thirty-eighth Annual Meeting of the American Society for Testing and Materials 38, 460—467. См. также Jones and Richart [1936, 1].
1. Prager, W.: On isotropic materials with continuous transition from elastic to plastic state. Proc., 5th International Congress of Applied Mechanics (Cambridge), pp. 234—237.

1939 1. Bender, Ottmar: Elastizitätsmessungen an Alkalimetall-Einkristallen in tiefer Temperatur. Ann. Physik und Chemie, fünfste Ser. 34, 359—376.
1. Guillet, Léon: Contribution à l'étude du module d'élasticité des alliages métallurgiques 36, 497—521.
1. Meisser, Otto Franz: Die Ausbiegung schlanker, gerader Stäbe bei Beanspruchung auf Knickung und ihre meßtechnische Verwendung für statische Elastizitätsmoduluntersuchungen. Physikalische Zeitschrift 40, 551—556.

1940 1. Fanning, R., and W. V. Bassett: Measurement of impact strains by a carbon-strip extensometer. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs 62, A-24 — A-28.

1. Goens, Karl Anton Erich: Über die Temperaturabhängigkeit der Hauptelastizitätskonstanten des Einkristalls von Kupfer, Gold, Blei, Aluminium bei tiefen Temperaturen. Annalen der Physik und Chemie, fünfste Ser., 38, 456—465.
1. Köster, Werner: Elastizitätsmodul und Dämpfung von Eisen und Eisenlegierungen. Arch. Eisenhüttenwes. 14, No. 6, Gruppe E, No. 836, 271—278 (December, 1940).
1. Smith, Cyril Stanley: Proportional limit tests on copper alloys. Proceedings of the Forty-third Annual Meeting of the American Society for Testing Materials 40, 864—872. (Discussions by A. R. Anderson, M. F. Sayre, L. B. Tuckerman et al., pp. 873—874).

1941 1. Nadai, Arpad Ludwig, and Michael Joseph Manjoine: High speed tension tests at elevated temperatures, Parts II and III. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs 63, A-77 — A-91.
1. Prager, W. A new mathematical theory of plasticity. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, A 5, 215—226.
1. Smith, Cyril Stanley, and R. W. van Wagner: The tensile properties of some copper alloys. Proc. Am. Soc. Testing Materials 41, 825—845.

1942 1. Prager, W.: Fundamental theorems of a new mathematical theory of plasticity. Duke Math. J. 9, 228—233.

1943 1. Bridgman, Percy Williams: Recent work in the field of high pressures. Am. Sci. 31, 1—35. (См. также Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 140, pp. 3506—3539).
1. Köster (Koester), Werner: Die Querkontraktionszahl im periodischen System. Z. Elektrochem. 49, 233—237.

1944 1. Everett, Franklin L., and Julius Miklowitz: Poisson's ratio at high temperatures. J. Appl. Phys. 15, 592—598.
1. Szymanowski, W. T.: Rapid determination of elastic constants of glass and other transparent substances. J. Appl. Phys. 15, 627.

1945 1. MacGregor, C. W., and J. C. Fisher: Tension tests at constant true strain rates. J. Appl. Mech. (Transactions of the American Society of Mechanical Engineers) 12, No. 4, A-217—A-227 (December 1945).

1946 1. Firestone, Floyd Auburn: The supersonic reflectoscope an instrument for inspecting the interior of solid parts by means of sound waves. J. Acoust. Soc. Am. 17, 287—299.
2. Firestone, Floyd Auburn, and Julian R. Frederick: Refinements in supersonic reflectroscopy. Polarized sound. J. Acoust. Soc. Am. 18, 200—211.

1947 1. Huntington, Hillard Bell: Ultrasonic measurements on single crystals. Phys. Rev. 72, 321—331.
1. Köster (Koester), Werner: Elastizität fester Körper. FIAT Rev. Ger. Sci., Abt. I, SS. 119—125, Wiesbaden.

1948 1. Bridgman, Percy Williams: General survey of certain results in the field of high pressure physics. Лекция, прочитанная при вручении Нобелевской премии в Стокгольме 11 декабря 1946. Напечатана в J. Wash. Acad. Sci. 38, 149—166 (May, 1948). (См. также в Bridgman [1964, 1], Vol. VI, paper No. 164, pp. 3873—3890.)
1. Clark, Donald S., and Pol E. Duwez: Discussion of the forces acting in tension impact tests of materials. J. Appl. Mech. 15, 243.
1. Davies, R. M.: A critical study of the Hopkinson Pressure Bar. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 240, 375—457.
1. Dudzinski, N., J. R. Murray, B. M. Mott, and Bruce Chalmers: The Young's modulus of some aluminum alloys. J. Inst. Metals 74, 291—310.
1. Galt, John Kirtland: Mechanical properties of NaCl, KBr, KCl, Phys. Rev. 73, 1460—1462.
1. Grover, S. F., W. Munro, and Bruce Chalmers: The moduli of aluminum alloys in tension and compression. J. Inst. Metals 74, 310—314. Дополнение к статье Дудзинского и др. (Dudzinski [1948, 1]).

1. Köster (Koester), Werner, and Walter Rauscher: Beziehungen zwischen dem Elastizitätsmodul von Zweistofflegierungen und ihrem Aufbau. Z. Metallk. 39, No. 4, 111—120.
2. Köster, Werner: Die Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls reiner Metalle. Z. Metallk. 39, No. 1, 1—9.
3. Köster, Werner: Über eine Sondererscheinung im Temperaturgang von Elastizitätsmodul und Dämpfung der Metalle Kupfer, Silber, Aluminium und Magnesium. Z. Metallk. 39, No. 1, 9—12.
4. Köster, Werner: Betrachtungen über den Elastizitätsmodul der Metalle und Legierungen. Z. Mettalk. 39, No. 5, 145—158.

1. Warnock, F. V., and J. B. Brennan: The tensile yield strength of certain steels under suddenly applied loads. The Instituion of Mechanical Engineers. Applied Mechanics Proceedings 159 (War Emergency Issue No. 37), 1—10.

1. Zener, Clarence: Elasticity and Anelasticity of Metals. The University of Chicago Press.

1949 1. Hughes, Darrell Stephen, Walter Lewis Pondrom, and R. L. Mims: Transmission of elastic pulses in metal rods. Phys. Rev. 75, 1552—1556.

1. Lazarus, David: The variation of the adiabatic elastic constants of KCl, NaCl, CuZn, Cu, and Al with pressure to 10 000 bars. Phys. Rev. 76, second series 545—553.

1. McReynolds, Andrew Wetherbee: Plastic deformation waves in aluminum. Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers 185, 32—45 (January 1949).

1. Muhlenbruch, Carl W.: Elastic and fracture toughness studies of a stainless steel. Proc. Am. Soc. Testing and Materials 49, 738—753.

1. Warnock F. V. and D. B. C. Taylor: The yield phenomenon of medium carbon steel under dynamic loading. Applied Mechanics, Proceedings of the Insitution of Mechanical Engineers 161, 165—175.

1951 1. Bell, James Frederick: Propagation of plastic waves in pre-stressed bars. Technical Report No. 5, U. S. Naval Contract. The Johns Hopkins University (June, 1951).

1952 1. Garofalo, Frank; P. R. Malenock, and G. V. Smith: The influence of temperature on the elastic constants of some commercial steels. American Society for Testing Materials, Symposium on Determination of Elastic Constants, Special Technical Publication, No. 129.

1. Mindlin, Raymond David, and George Herrmann: A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod. Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics, Ann Arbor, Michigan, pp. 187—191.

1. Partington, James Reddick: An Advanced Treatise on Physical Chemistry, Vol. 3. London-New York-Toronto: Longmans, Green & Co.

1. Richards, John T.: An evaluation of several static and dynamic methods for determining elastic moduli. American Society for Testing Materials, Symposium on the Determination of Elastic Constants, Special Technical Publication, No. 129.

1. Ripperger, Eugene Ashton: Longitudional impact of cylindrical bars. Proc. Soc. Exp. Stress Anal. 10, No. 1, 209—226.

1. Ripperger, Eugene Ashton: A technique for elastic wave measurements. Technical Report, No. 12, N6-ONR-251 Task Order 12, Stanford University.

1. Truesdell, Clifford Ambrose: The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. J. Rational Mech. Anal. 1, 125—300. Corrections and Additons, J. Rational Mech. Anal. 2, 596—616 (1953), and 3, 801 (1954). Переиздание статьи после исправлений с предисловием и примечаниями: Continuum Mechanics, Part I, Internat. Sci. Review Ser. New York-London-Paris: Gordon & Breach (1966).

1953 1. Kolsky, Herbert: Stress Waves in Solids. Oxford, England: Clarendon

Press, См. также [1963, 1] переиздание в изд-ве Dover. (Имеется перевод на русский язык: Г. Кольский. Волны напряжения в твердых телах: Перевод с английского В. С. Ленского.— М.: ИЛ, 1955.)

1. Ripperger, Eugene Ashton: The propagation of pulses in cylindrical bars — an experimental study. Proceedings, First Midwestern Conference on Solid Mechanics, University of Illinois, pp. 29—39 (April 1953).
1. Timoshenko, Stephen Prokofievitch: History of Strength of Materials. New York: McGraw-Hill. (Имеется изданне на русском языке: С. П. Тимошенко. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений: Перевод с английского В. И. Контовта под редакцией А. Н. Митинского.— М.: Гостехиздат, 1957.)

1954 1. Curtis, Charles William: Second mode vibrations of the Pochhammer—Chree frequency equation. J. Appl. Phys. 25, No. 7, p. 928.
1. Kolsky, Herbert: The propagation of longitudinal elastic waves along cylindrical bars. Phil. Mag., seventh series 45, 712—726.
1. Zwikker, Cornelis: Physical Properties of Solid Materials. London and New York: Pergamon Press. (Second edition, 1955).

1955 1. Truesdell, Clifford Ambrose: Hypo-elasticity. J. Rational Mech. Anal. 4, No. 1, 83—133. Перепечатано в Foundations of Elasticity Theory. Int'l Sci. Rev. Ser. New York: Gordon & Breach (1965).
1. Zucker, Charles: Elastic constants of aluminum from 20°C to 400°C. J. Acoust. Soc. Am. 27, No. 2, 318—320.

1956 1. American Society for Testing Materials. 58th Annual Meeting, Atlantic City, New Jersey, U. S. A., June 27, 1955: Symposium on Impact Testing, ASTM. Special Technical Publication, No. 176.
1. Bell, James Frederick: Determination of dynamic plastic strain through the use of diffraction gratings. J. Appl. Phys. 27, No. 10, 1109—1113.
1. Davies, R. M.: Stress waves in solids. Surveys in Mechanics, The G. I. Taylor 70th Anniversary Volume, pp. 64—138. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, G. K. Batchelor and H. Bondi, editors. Cambridge University Press.
1. Driscoll, David E.: Reproducibility of Charpy Impact Test. American Society for Testing Materials, Special Technical Publication, No. 176, 70—75.
1. Frocht, M. M. and Paul D. Flynn: Studies in dynamic photoelasticity. J. Appl. Mech. 23, No. 1, 116—122. (См. в: Frocht, M. M.: Photoelasticity: The Selected Scientific Papers of M. M. Frocht (Pergamon Press, 1969), peper No. 17, pp. 301—317. Имеется перевод на русский язык монографии-двухтомника этого же автора, посвященного фотоупругости: М. М. Фрохт. Фотоупругость — поляризационно-оптический метод исследования напряжений: Перевод с английского М. Ф. Бокштейна, Ю. Ф. Красонтовича, А. К. Прейсс под редакцией проф. Н. И. Пригоровского.— М.: Гостехиздат, т. I, 1948; т. II, 1950.
1. Kolsky, Herbert: The propagation of stress pulses in viscoelastic solids. Phil. Mag., eighth series 1, No. 7, 693—710.
1. Lauriente, Michael, and Robert B. Pond: Effect of growth imperfections on the strength of aluminum single crystals. J. Appl. Phys. 27, No. 8. 950—954 (August 1956).

1957 1. Miklowitz, Julius, and C. R. Nisewanger: The propagation of compressional waves in a dispersive elastic rod. Part II: Experimental results and comparison with theory J. Appl. Mech. 24, 240—244.
1. Ripperger, Eugene Ashton, and H. Norman Abramson: Reflection and transmission of elastic pulses in a bar at a discontinuity in cross section. Proceedings of the Third Midwestern Conference on Solid Mechanics (Ann. Arbor, Michigan), pp. 135—145. University of Michigan Press.
1. Skalak, Richard: Longitudinal impact of a semi-infinite circular elastic bar. Trans. A. S. M. E., J. Appl. Mech. 24, 59—64.

1958 1. Fox, George, and Charles William Curtis: Elastic strain produced by

sudden application of pressure to one end of a cylindrical bar. II. Experimental observations. J. Acoust. Soc. Am. 30, 559—563.

1. Taylor, Sir Geoffrey Ingram: The Scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor, Vol. I: Mechanics of Solids, edited by George K. Batchelor, at the University Press, Cambridge, England.
1. Treloar, L. R. G.: The Physics of Rubber Elasticity, second edition. Oxford: Clarendon Press. (Имеется перевод этой книги на русский язык, изданный издательством ИЛ в 1953 г. под названием «Физика упругости каучука».)

1959 1. Kolsky, Herbert: The mechanical testing of high polymers. Progress in Non-Destructive Testing, 2, pp. 29—59. London: Heywood & Co. Ltd.
1. Thomas, D. A., and Benjamin Lewis Averbach: The early stages of plastic deformation in copper. Acta Met. 7, 69—75.

1960 4. Bell, James Frederick: The initial development of an elastic strain pulse propagating in a semi-infinite bar. U.S. Army Ballistics Research Laboratory Technical Report, No. 6, The Johns Hopkins University (November 1960).
1. Curtis, Charles William: Propagation of an elastic strain pulse in a semi-infinite bar. International Symposium on Stress Wave Propagation in Materials, pp. 15—44. New York: Interscience Publishers, Inc. См. также [1954, 1] и Fox and Curtis [1958, 1].
1. Kolsky, Herbert: Viscoelastic waves. International Symposium on Stress Wave Propagation in Materials. Proceedings, pp. 55—90. New York: Interscience Publishers, Inc.
1. Papirno, Ralph, and George Gerard: Dynamic stress-strain phenomena and plastic wave propagation in metals. American Society for Metals, 42nd Annual Convention, Philadelphia, Pennsylvania, Proceedings, pp. 381—406.
1. Roberts, John Melville, and Norman Brown: Microstrain in zinc single crystals. Trans. Met. Soc. Am. Inst. Mech. Engrs 218, 454—463 (June 1960).
1. Todhunter, Isaac, and Karl Pearson: A History of the Theory of Elasticity and the Strength of Materials, Dover edition. (Тома были впервые опубликованы в 1886—1893 гг.).
1. Truesdell, Clifford Ambrose: The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638—1788: Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia, Vol. X et XI, Seriei Secundae. Zürich: Orell Füssli.

1961 1. Handbook of Chemistry and Physics, 43rd edition, Cleveland, Ohio: The Chemical Rubber Publishing Co. (1961—1962).
1. Hearmon, R. F. S.: An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity. Oxford, England: Oxford University Press.
1. Heinrichs, Joseph A.: An experimental study of 0,483 inch diameter aluminum bars under constant velocity impact. Master's essay. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

1962 7. Bell, James Frederick, and Albert Stein: The incremental loading wave in the pre-stressed plastic field. J. de Mécanique 1, No. 4, 395—412.
1. Dillon, Oscar W., Jr.: An experimental study of the heat generated during torsional oscillations. J. Mech. Phys. Solids 10, 235—244.
2. Dillon, Oscar W., Jr.: Temperature generated in aluminum rods undergoing torsional oscillations. J. Appl. Phys. 33, No. 10, 3100—3105 (October 1962).
1. Larsen, Egon: The Cavendish Laboratory: A Nursery of Genius. London: E. Ward; New York: F. Watts.
1. Stein, Albert: An experimental study of incremental plastic wave propagation. Master's essay. The John Hopkins University, Baltimore, Maryland.

1963 1. Dillon, Oscar W.: Experimental data on aluminum as a mechanically unstable solid. J. Mech. Phys. Solids 11, 289—304.
2. Dillon, Oscar W.: Coupled thermoplasticity. J. Mech. Phys. Solids 11, 21—33.

1. Kolsky, Herbert: Stress Waves in Solids. New York. Dover Publications, Inc. См. [1953, 1].
1. Paul, William, and Douglas M. Warschauer, editors: Solids under Pressure, New York — San Francisco — Toronto — London: McGraw-Hill Book Co., Inc.

1964. 1. Bell, James Frederick: A generalized large deformation behaviour for face-centred cubic solids — high purity copper. Phil. Mag; 10, No. 103, 107—126.
2. Bell, James Frederick: Theory vs. experiment for finite amplitude stress waves. Symposium, Society for Engineering Science (November 1964) См. Bell [1967, 4].
1. Bridgman, Percy Williams: Collected Experimental Papers of P. W. Bridgman. Vols I to VII. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

1965 2. Bell, James Frederick: Generalized large deformation behaviour for face-centred cubic solids: Nickel, aluminum, gold, silver, and lead. Phil. Mag. 11, No. 114, 1135—1156.
1. Flynn, Paul D.: Dynamic Photoelasticity using a dual-beam polarscope and ultrahigh-speed photography. Kurzzeitpolographie, Proceedings of the 7th International Congress on High-Speed Photography, pp. 351—357, Zurich, September 12—18.

1966 2. Bell, James Frederick: The relevance of dynamic finite distortion research to high energy rate forming processes. Proceedings: International Symposium on High Energy Rate Forming, Prague, pp. 1—12.
2. Dillon, Oscar W., Jr.: The heat generated during torsional oscillations of copper tubes. Intern. J. Solids and Structures 2, 181—204.
1. Fitzgerald, Edwin R.: Particle Waves and Deformation in Crystalline Solids. New York—London — Sydney: Interscience Publishers.
1. Hearmon, R. F. S.: Die elastischen Konstanten nicht-piezoelektrischer Kristalle. Landolt-Börnstein, Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaften und Technik. Neue Serie. Gruppe III: Kristall- und Festkörperphysik. Band 1. Elastische, piezoelektrische, piezooptische und elektrooptische Konstanten von Kristallen, SS 1—37. (Название на английском языке: The elastic constants of non-piezoelectric crystals. Landolt-Börnstein, Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology. New Series. Group III: Crystal and Solid State Physics. Vol. 1. Elastic, Piezoelectric, Piezooptic and Electrooptic Constants of Crystals). Berlin — Heidelberg — New York: Springer.
1. Sharpe, William N.: The Portevin — le Chatelier effect in aluminum single crystals and polycrystals. Ph. D. dissertation. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

1967 1. Baker, Wilfred, William E. Woolam, and Dana Young: Air and internal damping of thin cantilever beams. Intern. J. Sci. 9, 743—766.
1. Basinski Z. S., and S. Saimoto: Resistivity of deformed crystals. Can. J. Phys. 45, 1161—1176.
2. Bell, James Frederick: An experimental study of instability phenomena in the initiation of plastic waves in long rods. Proceedings, Symposium on the Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, San Antonio, Texas, September 1967, pp. 10—20. New York: Springer. (Proceedings опубликованы в 1969 г.)
2. Dillon, Oscar W., Jr.: Plastic deformation waves and heat generated near the yield point of annealed aluminum. Proceedings, Symposium on the Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, San Antonio, Texas, September 1967, pp. 21—60. New York: Springer.
1. Hartman, William Francis: The applicability of the generalized parabolic deformation law to a binary alloy. Ph. D. dissertation. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
1. Troisième Centenaire de l'Académie des Sciences. 1666—1966. 2 Vols. Paris: Gauthier-Villars.

1968. 1. Bell, James Frederick: The Physics of Large Deformation of Crystalline Solids. Springer Tracts in Natural Philosophy. Vol. 14. Berlin-Heidelberg-New York: Springer.
1. Hardie, D., and R. N. Parkins: A study of the errors due to shear and rotary inertia in the determination of Young's modulus by flexural vibrations. Brit. J. Appl. Phys., second series 1, 77—85.
1. Hart, S.: Comments on the paper: A study of the errors due to shear and rotary inertia in the determination of Young's modulus by flexural vibrations. Brit. J. Appl. Phys., second series 1, 1763—1766.
1. Strutt, Robert John (4th Baron Rayleigh): Life of John William Strutt, Third Baron Rayleigh. Republication by the University of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin. (Первое опубликование в издательстве: Edward Arnold Co. (1924).)
1. Truesdell, Clifford Ambrose: Essays in the History of Mechanics «Berlin-Heidelberg-New York: Springer.
1969 1. (Bechmann and Hearmon) Landolt-Börnstein: The third-order elastic constants. (См. Hearmon [1966, 1] где дано полное название Group III, Vol. 2. (Том 2 дополняет и расширяет содержание тома 1 и включает дополнительные области: электрооптические постоянные и нелинейные диэлектрические чувствительности кристаллов, стр. 102—123.)
1. Bilello, John, and Marvin Metzger: Microyielding in polycrystalline copper. Trans. Met. Soc. A. I. M. E. 245, 2279—2284. (October1969).
1. Hartman, William Francis: Propagation of large amplitude waves in annealed brass. Intern. J. Solids Structures 5, 303—317. Pergamon Press.
1. (Hearmon) Landolt-Börnstein: The elastic constants of non piezoelectric crystals. Group III, vol. 2, pp. 1—37. (См. полное название в Hearmon [1966, 1].)
1. Liu, John Moyu: Some optical experiments in the study of acoustic waves in solids. Master's essay. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland (June 1969).
1. Maguire, John R.: On the dynamic plasticity of aluminum polycrystals at very high temperatures. Master's essay. The Johns Hopkins University. Baltimore, Maryland.
1. Palmer, C. Harvey: Differential optical strain gauge for torsion measurements. Appl. Opt. 8, 1015—1019.
2. Palmer, C. Harvey: Differential angle measurements with moire fringes. Opt. Technol. 1, 150—152.
1. Percival, C. M., and J. A. Cheney: Thermally generated stress waves in a dispersive elastic rod. Exptl. Mech. 9, No. 2, 49—57 (February, 1969).
1. Schultz, A. B. Dynamic behavior of metals under tensile impact. Part III: Annealed and cold worked materials. U. S. Air Force Materials Laboratory, Ohio: Technical Report AFML-TR-69-76, Part II, (June 1969).
1970 1. Brammer, J. A. and C. M. Percival: Elevated-temperature elastic moduli of 2024 aluminum obtained by a laser-pulse technique. Exptl. Mech. 10, No. 5, 245—250 (June 1970).
1. Sachse, Wolfgang: The effects of deformation rate on the attenuation behavior during loading, unloading and microplastic reloading of single crystals of aluminum. Ph. D. dissertation. The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.
1. Smith, Alan B., and Richard W. Damon: A bibliography of microwave ultrasonics. IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics SU-17, No. 2, 86—111 (April 1970).
1972 3. Bell, James Frederick: Material stability and second order transitions for crystals under finite strain. Manuscript.
4. Bell, James Frederick: An experimental study of the reflection of finite waves at a plastic-elastic boundary. Manuscript.
1. Palmer, C. Harvey, and Bruce Z. Hollmann: Transmission of incoherent light between Ronchi grids. Applied Optics 11, 780—785.

О ПЕРЕВОДЕ НЕКОТОРЫХ ТЕРМИНОВ

КОММЕНТАРИИ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Термин «*multiple elasticities*» означает то, что для многих кристаллических материалов в зависимости от их термомеханической предыстории устойчивым является одно из нескольких значений модуля упругости, каждое из которых соответствует целочисленным значениям некоторого параметра, входящего в формулу для модуля упругости. Так, μ — модуль упругости при сдвиге при значениях напряжений, близких к нулю, определяется по формуле

$$\mu(0) = \left(\frac{2}{3}\right)^{s/2+p/4} A$$

($s = 1, 2, 3, 4, \ldots$; $p = 0$ или 1, $A = 2{,}89 \cdot 10^4$ кгс/см^2).

Этот термин переведен как «*мультимодульность*».

Итак, под мультиупругостью, названной нами мультимодульностью, понимается множественность значений одной и той же константы упругости. Переходу от одного дискретного значения модуля к другому дано название «*first order transition*» («*переход первого порядка*»).

Такое множество значений модулей упругости и соответствующее ему множество кривых $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ вблизи $\sigma = 0$ автор описал как «*quantized distribution of deformation modes*»; это отпределение переведено в разных местах книги так: «*множество квантованных значений модулей упругости*», или «*квантованные значения модулей*», илн «*квантованное распределение форм деформации*».

Обиаружено, кроме того, что по мере роста напряжения и соответственно деформации при некотором уровне последней возникает явление, которому присвоено название *second order transition*; оно состоит в том, что происходит квантованный переход от одного зиачення касательного модуля, соответствующего некоторому целочисленному значению параметра s, к другому значению касательного модуля, отвечающему иному целочисленному значению s. Так, модуль E определяется по формуле

$$E = d\sigma/d\varepsilon = 2(1+\nu) \cdot 1{,}03 \cdot (2/3)^{s/2+p/4} A (1 - T/2T_m)$$

(ν — коэффициент Пуассона, T_m — температура плавлеиия, T — температура окружающей среды при опыте). На русский язык этот термии переведен как «*переход второго порядка*». Таким образом, это — квантованный разрыв в зиачениях первой производной функции $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ [или $\tau = \tau(\gamma)$] при некотором ненулевом уровне деформации; последнему автор присвоил название «*second transition strain*», переведенное дословно как «*деформация второго перехода*». Аналогичному разрыву в значениях второй производной той же функции дано название «*third order transitions*» («*переход третьего порядка*»).

Термин «*response function*», обозначающий функциональиую зависимость между деформацией и напряжением в ряде мест, переведен дословно как «*функция отклика*»; в других же случаях — как зависимость между деформацией и напряжением. В литературе на русском языке для этого же понятия применяются и такие термины, как управляющая фуикция, определяющая функция, функция состояиия. Разумеется, во всех этих определениях термин «функция» использован

не строго,— не всегда обеспечивается однозначность отображения напряжений в деформации.

При обсуждении макромеханизма возникновения пластического течения в моноκристалле автор использует термин «*resolved shear*», подразумевая под ним составляющую касательного напряжения в растягиваемом моноκристаллическом образце, действующую в плоскости, а в ней — вдоль линий, наиболее предрасположеиных при данной взаимной ориентации направлеиия растяжения и кристаллографических *плоскостей монокристалла к возникновенню в них скольжения* по достижении этим напряжением предельного значения. Обсуждаемый термин переведеи как «*определяющее касательное напряжение*».

Термин же «*resolved shear strain*» означает деформацию сдвига, энергетически соответствующую определяющему касательному напряжению, поэтому этот термии переведен как «*определяющий сдвиг*».

Согласно указанному выше терминологическое сочетаиие «*the response function for the resolved shear deformation*» переведено как «*функция отклика для определяющего сдвига*», что означает зависимость определяющего касательного напряжения от определяющего сдвига.

Термины «*first* (I), *second* (II) *and third* (III) *stages of finite deformation*» относятся к трем участкам функции отклика определяющего сдвига (соответствующий график дан на рис. 4.74, см. II часть) и переведены как «*первая* (I), *вторая* (II) *и третья* (III) *стадии конечных деформаций*».

Большое место в идейном отношении в книге занимает предложеииая автором параболическая аппроксимация функции отклика, соответствующая третьей стадии конечных деформаций

$$\tau = \beta\,(\gamma - \gamma_b)^{1/2},\quad \beta = \beta_0\,(1 - T/T_m),\qquad \beta_0 = (2/3)^{r/2}\mu\,(0)\,B_0\,(\overline{m})^{-3/2}$$

в случае сдвига и

$$\sigma = (2/3)^{r/2}\mu\,(0)\,B_0\,(1 - T/T_m)\,(\varepsilon - \varepsilon_b)$$

в случае осевой деформации ($r = 1, 2, \ldots$), $B_0 = 0{,}0280$ — безразмерная универсальиая констаита. Безразмерный коэффициент $\overline{m}$, полученный из отношения, связывающего определяющее касательное иапряжение в монокристаллическом образце с иормальным напряжением при растяжении или сжатии в поликристаллическом образце, назван автором «*aggregate ratio*». Этот термин переведен как «*коэффициент поликристалличности*».

Целочисленный параметр r, входящий в показатель степени в формуле для β_0, назван термином «*index of mode*»; этот термин переведен дословно как «*индекс формы*» (имеется в виду форма графика функции отклика определяющего сдвига в третьей стадии конечиой деформации).

Термии «*constitutive equation*», которому в русском языке соответствует несколько терминов, переведен как «*уравнение состояния*» (другие названия, встречающиеся в литературе на русском языке: *определяющее уравнение*, *физическое уравнение*).

Емким термииам на английском языке «*radial loading*» и «*nonradial loading*» на русском соответствуют термины «*простое нагружение*» и «*сложное нагружение*». В английском термине дается указание на «*путь нагружения*» (*path of loading*). Если в пространстве параметров нагрузки путем нагружения является луч (радиус-вектор), имеющий началом начало координат, то загружение радиальное, во всех иных случаях — нерадиальное. Пожалуй, неплохо было бы ввести эти термины и в русскую терминологию.

Термии «*simple deformation*» переведен как «элементариая деформация»: под последней подразумевается одна из следующих деформаций: чистое растяжение (сжатие), чистое кручеиие, чистый изгиб стержня.

В оригинале книги часто используются термины «*infinitesimal deformation*» и «*infinitesimal modulus*». В обоих случаях сохранеиы эти термины и в переводе: «инфинитезимальная деформация», «иифинитезимальный модуль». Означают эти термииы бесконечно малые дефомации и модуль упругости при бесконечно малых напряжениях.

Термин «*third order elastic constants*» переведен как «постоянные упругости *третьего* порядка». При этом имеется в виду, что это компоненты тензора *третьего* ранга, входящего в уравнение состояния электроупругости, связывающее тензоры второго и первого рангов. Кстати сказать стоило бы подчеркнуть, что константы упругости в обобщенном законе Гука, связывающем тензоры второго ранга, являются элементами тензора четвертого ранга.

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В конце каждого примечания в скобках указывается номер страницы, к которой оно относится.

Предисловие редактора перевода

[1] Всего Энциклопедия содержит 54 тома и издана в 78 книгах, вышедших в свет с 1955 по 1982 г. Все тома разбиты на одиннадцать групп. В первую группу (математические методы) входят 1-й и 2-й тома; во вторую группу (принципы теоретической физики) — тома 3-й (в трех книгах), 4-й и 5-й (в двух книгах); в третью группу (механическое и тепловое поведение материи) — тома 6-й, 6-й,а (в четырех книгах), 7-й (в двух книгах), 8-й (в двух книгах), 9-й, 10-й, 11-й (в двух книгах) и 12-й — 15-й; в четвертую группу (электрическое и магнитное поведение материи) — тома 16-й, 17-й, 18-й (в двух книгах) и 19-й — 20-й. В пятую группу (оптика) входят тома 24-й, 25-й (в пяти книгах) и 26-й — 29-й; в шестую группу (рентгеновские и корпускулярные лучи) — тома 30-й — 34-й; в седьмую группу (атомная и молекулярная физика) — тома 35-й, 36-й и 37-й (две книги); в восьмую группу (физика атомного ядра) — тома 38-й (в двух книгах), 39-й, 40-й, 41-й (в двух книгах) и 42-й — 45-й; в девятую группу (космические лучи) — 46-й том (в двух книгах); в десятую группу (геофизика) — тома 47-й, 48-й и 49-й (в шести книгах). Последнюю одиннадцатую группу (астрофизика) составляют тома 50-й — 54-й. С 1955 по 1960 г. включительно вышло 44 книги, с 1961 по 1970 г.— 21 книга, с 1971 по 1980 г.— 8 книг и с 1981 г.— 5 книг (из них две книги, обещанные издательством быть изданными (том 25-й, часть 2,*d* и том 43-й), я не видел).

Общим редактором всей Энциклопедии является С. Флюгге. Кроме того, каждая книга имеет своего титульного редактора.

Энциклопедией охвачены практически почти все области физики в самом широком смысле слова, начиная от физики атомного ядра и кончая астрофизикой. Энциклопедия в каждой книге содержит несколько крупных статей, относящихся к различным частям той ветви физики, которой посвящен том. Обычно каждая такая статья написана одним — тремя авторами, являющимися крупными специалистами в соответствующей области знаний. В конце каждой статьи дается библиография, а в конце каждой книги — именной и предметный указатели. Статьи опубликованы на языке оригинала — немецком, или английском, или французском. Некоторые тома изданы на двух языках — английском и немецком. В 1958 г. появился том VI, носящий название «Упругость и пластичность». В нем содержится шесть статей: Классическая теория упругости (авторы И. Н. Снеддон (Jan Naismith Sneddon) и Д. С. Берри (Denis Stanley Berry)) — 126 стр., Фотоупругость (Г. Джессоп (Herbert T. Jessop)) — 102 стр., Математические теории неупругого континуума (А. Фрейденталь (Alfred M. Freidenthal) и Х. Гейрингер (Hilda Geiringer))—205 стр., Реология (М. Рейнер (M. Reiner)) — 117 стр., Разрушение (Г. Ирвин (George R. Irwin)) — 40 стр. и Усталость (А. Фрейденталь)— 23 стр.

В начале 1970-х гг. под тем же номером VI, но с прибавлением буквы «а» (VIa) вышли четыре книги (VIa/1, VIa/2, VIa/3 и VIa/4), носящие общее название «Механика твердого тела» (Mechanics of Solids). Титульным редактором всех этих четырех книг является К. Трусделл. Фактически эти четыре книги дополнили и в определенной мере перекрыли содержание тома VI. Книгой с номером VIa/1 и является настоящая книга. Три остальные книги с номером VIa имеют следующее содержание.

Книга VIa/2 (1972): Линейная теория упругости (М. Е. Гартон (Morton E. Gurton)) — 295 стр., Линейная термоупругость (Д. Е. Карлсон (Donald E. Carlson)) — 49 стр., Теоремы существования в теории упругости (Г. Фикера (Gaetano Fichera)) — 43 стр., Граничные задачи теории упругости с односторонними ограничениями (Г. Фикера) — 34 стр., Теория оболочек и пластин (П. М. Нагди (P. M. Naghdi)) — 216 стр., Теория стержней (С. Антман (Stuart S. Antman)) — 63 стр.

Книга VIa/3 (1972): Линейная теория вязкоупругости (М. Лейтман (Marshall J. Leitman) и Г. М. К. Фишер (George M. C. Fischer)) — 123 стр., Теория упругой устойчивости (Р. Кнопс (R. J. Knops) и Е. Уилкес (E. W. Wilkes)) — 178 стр., Рост и затухание волн в твердых телах (П. Чен (Peter J. Chen)) — 100 стр., Идеальная пластичность (Х. Гейрингер) — 131 стр. и Предмет математической теории пластичности (Тсуан Ву Тинг (Tsuan Wu Ting)) — 56 стр.

Книга VIa/4 (1972): Распространение волн в нелинейных вязкоупругих твердых телах (Ж. Нунциато (Jace W. Nunziato), Э. Уалш (Edward K. Walsh), К. Шулер (Karl W. Schuler), Л. Баркер (Lynn M. Barker)) — 108 стр., Волны в твердых телах (Р. Тарстон (R. N. Thurston)) — 200 стр.

Особенностью книг VIa/2, VIa/3 и VIa/4 является то, что в них излагается современное состояние соответствующих ветвей теории, в то время как в книге VIa/1 дается картина развития экспериментальных исследований в области механики твердых деформируемых тел от первых работ до начала 1970-х гг. (*К стр. 7.*)

[2] В I томе обзора Тодхантера и Пирсона (работы 1—1631) содержатся девять глав (I — Семнадцатое и восемнадцатое столетия — от Галилея до Жирара (стр. 1—79), II — Различные исследования, выполненные между 1800 и 1822 гг. (стр. 80—132), III — Различные исследования, выполненные между 1820 и 1830 гг.; Навье, Жермен, Пагани и др. (стр. 133—207), IV — Пуассон (стр. 208—318), V — Коши (стр. 319—376), VI — Различные исследования, выполненные в десятилетие 1830—1840 (стр. 377—543), VII — Ламе и Клапейрон, Ламе (стр. 544—626), VIII — Различные исследования, выполненные в десятилетие 1840 — 1850, включая исследования Бланше, Стокса, Вертгейма (обсуждено 60 работ Вертгейма на 31 страницах книги) и Гафтона (стр. 627—832), IX — Исследования Сен-Венана до 1850 г. (стр. 833—872). Во II томе (часть I: работы 1—1191): X — Сен-Венан, исследования, выполненные между 1880 и 1886 гг. (стр. 1—286), XI — различные исследования, выполненные между 1850 и 1860 гг. (стр. 287—762); (Часть II: работы 1192—1818): XII — Старшие немецкие упругисты (стр. 3—184), XIII — Буссинеск (стр. 185—357), XIV — Сэр Уильям Томсон (лорд Кельвин) (стр. 358—490). (*К стр. 9.*)

[3] Отдельные статьи из упомянутых выше книг томов VI и VIa физической энциклопедии были переведены на русский язык и изданы в нашей стране. К числу их относятся следующие: Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости: Пер. с англ. А. И. Смирнова/Под ред. Э. И. Григолюка.— М.: Физматгиз, 1961; Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой среды: Пер. с англ. А. И. Смирнова/Под ред. Э. И. Григолюка.— М.: Физматгиз, 1962; Фикера Г. Теоремы существования теории упругости: Пер. с англ. Т. Д. Вентцель/Под ред. С. Г. Михлина — М.: Мир, 1940 (из серии библиотеки сборника «Математика»; в эту книгу вошли обе статьи Г. Фикера, помещенные в книгу VIa/2 Энциклопедии). (*К стр. 10.*)

I. ВВЕДЕНИЕ

[1] В русском языке нет трех терминов, соответствующих оттенкам английских терминов experimenter, experimentalist и experimentist, в связи с чем наряду с русскими приведены и английские термины.) (*К стр. 23.*)

[2] Имеются в виду ученые-теоретики механики и математики. (*К стр. 23.*)

[3] По-видимому, имеются в виду перемещения. (*К стр. 31.*)

[4] Имеется изданный русский перевод книги: С. П. Тимошенко. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории тео-

рии упругости и теории сооружений: Перев. с англ. В. Н. Контовта под ред. А. Н. Митинского.— М.: Гостехиздат, 1957. (*К стр. 34.*)

II. НЕЛИНЕЙНОСТЬ ПРИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

2.4. Предшественники Дюпена в XVIII веке: Бюффон (1741), Дюамель (1742) и Готэ (1774).

[1] Дословно fudge является восклицанием, характеризующим бессмыслицу (неупорядоченность). (*К стр. 45.*)

2.5. Детали экспериментов Дюпена с деревянными балками (1815).

[1] Соотношение, введенное П. Дюпеном, получено из уравнения гиперболы в главных осях $(x_1/a)^2-(y_1/b)^2=1$ после перехода к осям x и y согласно зависимостям $x_1=x+a$, $y_1=y$. Соотношение между a, b, пролетом балки l, прогибом f посередине пролета и x_* — разностью между f и прогибом в одной четверти пролета получается из (2.4), если положить

$$y\,|_{x=x_*}=l/4, \quad y\,|_{x=f}=l/2,$$

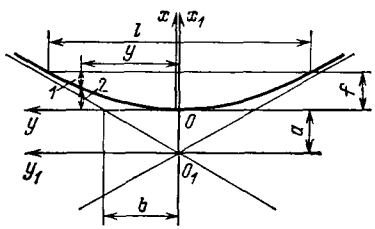
то

$$a=\frac{f^2-4x_*^2}{2(4x_*-f)}, \quad b^2=\frac{l^2}{64}\,\frac{(f^2-4x_*^2)^2}{fx_*(4x_*-f)(f-x_*)}.$$

Уравнение (2.4) приобретает вид

$$\frac{16\,fx_*(f-x_*)}{(4x_*-f)\,l^2}\,y^2=x^2+\frac{(f^2-4x_*^2)\,x}{4x_*-f}.$$

На рисунке: *1* — прогиб в текущем сечении, *2* — текущая ордината точки упру-



гой линии, отсчитанная от уровня точки упругой линии в сечении с максимальным прогибом. (*К стр. 49.*)

2.7. «Закон Герстнера» для стальной фортепианной струны (1824).

[1] Переход от формулы (2.8) к (2.9) осуществлен следующим образом. Для отыскания деформации E, при которой напряжение максимально, используется условие

$$\frac{dp}{de}=0, \qquad A-2Be=0,$$

отсюда

$$e=E=\frac{A}{2B}. \qquad \text{(а)}$$

Максимальное напряжение находится по формуле

$$P=p\,|_{e=E}=A\,\frac{A}{2B}-B\,\frac{A^2}{4B^2}=\frac{A^2}{4B}.$$

Рассматривается отношение

$$\frac{p}{P}=\frac{Ae-Be^2}{A^2/(4B)}=\frac{4B}{A}\,e-\frac{4B^2}{A^2}\,e^2,$$

или при учете (а) получается квадратное уравнение

$$\frac{p}{P}=\frac{2}{E}e-\frac{e^2}{E^2}, \text{ или } e^2-2Ee+E^2\,\frac{p}{P}=0,$$

откуда $e=E\,(1-\sqrt{1-p/P})$. (*К стр. 63.*)

2.10. Эксперименты по устойчивости остаточной деформации в железной проволоке: Леблан (1839).

[1] По-видимому, наименьшая из двух длин образцов проволоки (2м) превышала ту предельную длину, начиная с которой в отрезке проволоки отражена характерная статистическая ситуация дефектов так, что при дальнейшем увеличении длины изменения прочности не происходит. Вообще же говоря, если брать отрезки, меньшие по длине, чем отмеченная предельная длина, то у более коротких образцов прочность должна была бы быть более высокой. Незначительное же отличие в большую сторону прочности образцов проволоки длиной 26 м (разрушающая нагрузка 668 кгс) от прочности образца проволоки длиной 2 м (660 кгс) является, должно быть, чисто случайным и представляет собой следствие недостаточного количества опытов для установления статически устойчивого среднего значения прочности. (*К стр. 70.*)

2.12. Первые эксперименты, связанные с термоупругостью: опыты Гафа (1805) и Вильгельма Вебера (1830); открытие Вебером упругого последействия (1835).

[1] Формула (2.11) применима лишь к конкретным данным эксперимента Вебера; в ней числовые величины имеют размерность и представлены в определенных единицах измерения. Первый член в правой части дан в мм; первый член в знаменателе дроби имеет размерность времени и дается в тех же единицах, что и T, а числитель дроби имеет размерность (длина (в мм)$\times$(время (в тех же единицах, что и T)). (*К стр. 82.*)

2.13. Большая деформация струн из кетгута: Кармарш (1841).

[1] Поскольку должна была соблюдаться пропорциональность между разрывным усилием и количеством нитей в струне, казалось бы, следовало говорить о соответствии разрывного усилия п л о щ а д и поперечного сечения струны, а не д и а м е т р у струны. (*К стр. 89.*)

2.14. Эксперименты по упругости и прочности основных тканей человеческого тела: Вертгейм (1846—1847).

[1] Здесь различие в трактовке определяется несовершенством используемой терминологии. Что означает рост упругости? Если лишь повышение предела упругости (это наиболее правильная трактовка термина), и модуль упругости не изменяется (об изменении значения модуля следует говорить особо), то жесткость кости в упругой области не изменяется вовсе, хотя сама область упругой работы материала расширяется. Однако, по-видимому, здесь под ростом упругости подразумевается увеличение модуля упругости; в таком случае это утверждение согласуется с представлением физиков, поскольку это и есть увеличение жесткости. (*К стр. 98.*)

2.15. Дальнейшие экспериментальные исследования по упругости органических тканей: сравнение функций отклика для живых и мертвых образцов. Вундт (1858), Фолькман (1859).

[1] Формулировка на латинском языке закона Гука в том ее виде, который был дан самим автором. В дословном переводе на русский язык эта формулировка звучит так: каково удлинение — такова сила. А. Н. Крылов в своем предисловии к книге Н. И. Мусхелишвили «Некоторые основные задачи математической теории упругости» (Изд-во АН СССР, Л., 1933), желая сохранить стиль XVII века и в русском переводе дал такую формулировку «яко растяжение — тако сила». (*К стр. 103.*)

2.17. Эксперименты по релаксации напряжений в стекле и латуни: исток нелинейной вязкоупругости. Кольрауш (1863).

[1] Синус-электрометр — один из первых типов электрометров (приборов, предназначенных для измерения малых разностей потенциалов), появившийся в середине XIX века. (*К стр. 115.*)

[2] В оригинале это значение, по-видимому, вследствие опечатки, указано равным 1,347. (*К стр. 117.*)

2.18. Об изменении объема при пластических деформациях: опыты Баушингера (1879).

[1] Большая погрешность при использовании формулы (2.23) возникает не вследствие наличия в ней *отношения больших величин*, а вследствие наличия *малой разности больших величин*, требующей для получения достаточной точности результата вычислять уменьшаемое и вычитаемое (в рассматриваемом случае — только уменьшаемое) с гораздо большей точностью.

Применительно к вычислению коэффициента Пуассона ν по найденным значениям E и μ имеем следующее. Коэффициент Пуассона выражается через E и μ так: $\nu=E/(2\mu)-1$. Пусть точные значения E и μ таковы: $E=2\,000\,000$ кгс/см^2, $\mu=769\,230$ кгс/см^2, при этом $E/(2\mu)=1{,}3$, а $\nu=0{,}3$. Положим теперь, что при определении E и μ допущена ошибка, равная 1%, но в разных направлениях. $E=2\,020\,000$ кгс/см^2, $\mu=761\,538$ кгс/см^2, тогда отношение $E/(2\mu)=1{,}32626$, т. е. при вычислении этого отношения допущена погрешность, равная $[(1{,}32626-1{,}3)/1{,}3]\cdot 100=2{,}02\%$. Приближенное же значение $\nu=0{,}32626$ отличается от точного на $[(0{,}32626-0{,}3)/0{,}3]\cdot 100=8{,}75\%$. Совершенно очевидно, что потеря точности в основном происходит не вследствие наличия в формуле для ν отношения близких (большие они или малые вообще не является существенным) по значению величин, а вследствие наличия разности близких по значению величин. (*К стр. 127.*)

2.20. Уменьшение модулей с увеличением остаточной деформации: эксперименты Вертгейма (1844—1848), Кельвина (1865), Томлинсона (1881) и Фишера (1882) с металлами.

[1] В подрисуночной (рис. 2.39) подписи оригинала имеется опечатка — вместо длины проволоки 300 футов указана длина 30 метров. (*К стр. 139.*)

2.22. Первое точное инструментальное наблюдение нелинейности металлов при инфинитезимальных деформациях: Джозеф Томпсон (1891).

[1] Касательный модуль получается путем дифференцирования зависимости $\sigma=\sigma(\varepsilon)$. Для получения же касательного модуля путем использования значения производной от функции $\varepsilon=\varepsilon(\sigma)$, нужно вычислить величину обратную этой производной. (*К стр. 153.*)

2.23. Нелинейный закон Хартига; общая функция отклика в случае малых деформаций твердых тел (1893).

[1] В оригинале книги в формуле (2.32) в показателе степени пропущен множитель σ при n. (*К стр. 157.*)

[2] Формула (2.35) не соответствует формуле (2.34). (*К стр. 158.*)

2.24. Закон Баха — Шюле (1897): переоткрытие параболической функции отклика Якова Бернулли (1695) и Ходкинсона (1824).

[1] В списке литературных источников статьи Я. Бернулли, опубликованной в 1695 г. нет; либо эта работа пропущена в списке, либо здесь неправильно указан год ее издания. (*К стр. 161.*)

[2] В оригинале не указан способ загружения балки, принятый Шюле. По-видимому, это—сосредоточенная сила, приложенная в середине пролета. (*К стр. 165.*)

2.25. Эксперименты Грюнайзена (1906) с использованием интерферометра, установившие законы Хартига для инфинитезимальных деформаций металлов.

[1] В русском переводе упомянутой книги С. П. Тимошенко эта цитата находится на стр. 425. Здесь дан перевод непосредственно с английского оригинала этой книги. (*К стр. 169.*)

[2] Бифилярный — буквально двухнитный; напомним, что Кельвин испытывал в своих опытах две длинные проволоки, одна из которых служила температурным эталоном. (*К стр. 174.*)

2.26г. Исчерпывающее изучение одного из твердых тел в опытах с образцами, подвергавшимися элементарной деформации.

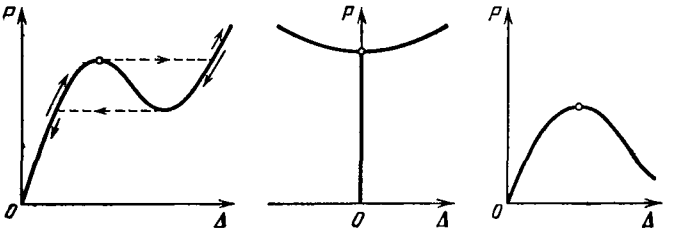
[1] По-видимому допущена опечатка и вместо 1849 следует иметь в виду 1949. (*К стр. 185.*)

2.27. Некоторые современные исследования по нелинейности при инфинитезимальной деформации в кристаллических твердых телах.

[1] Дословный перевод на русский язык английского термина «Multiple elasticites» — «многочисленные упругости» заменен более адекватным по смыслу «мультимодульность», при этом имеется ввиду неединственность значения одного и того же модуля упругости. (*К стр. 205.*)

2.29. Резюме.

[1] Здесь допущены неточности в вопросе о потере устойчивости и о колебаниях. При исследовании потери устойчивости конструкции в области упругой работы материала обнаружение критических точек требует использования нелинейного аппарата лишь в случае, если критической является предельная точка. Однако и в этих случаях нелинейность, которую учитывают, имеет геометрический характер (рис. *а*). Учитывать геометрическую нелинейность приходится и в тех случаях,



когда критической является точка бифуркации (рис. *б*), но только при исследовании закритического поведения системы, а не для обнаружения критической точки. Лишь, если критической является предельная точка, а диаграмма имеет вид, изображенный на рис. *в*, то материал, начиная с некоторого уровня напряжений, работает неупруго.

Супер- и субгармонические колебания принадлежат не к негармоническим малым колебаниям, а к нелинейным колебаниям, возникающим в системах с нелинейной восстанавливающей силой (которая может быть и не связана с нелинейностью физического закона для материала колеблющейся системы) при гармонической вынуждающей силе. Эти колебания являются гармоническими; первые из них происходят с частотой $m\omega$, а вторые — с частотой ω/n; здесь ω — частота вынуждающего воздействия, а m и n — целые числа. Супер- и субгармонические колебания происходят наряду с гармоническими с частотой ω. При этом амплитуда субгармонических колебаний может быть и не малой и даже превосходить амплитуду первой гармоники. (*К стр. 212.*)

III. МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ (ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ)

3.1. Пионеры XVII века: Гук и Мариотт.

[1] В отечественной литературе термин обобщенный закон Гука используется в ином смысле,— применительно к линейным зависимостям между компонентами напряжений, с одной стороны, и деформаций, с другой в условиях трехмерного и двумерного напряженных состояний. (*К стр. 217.*)

[2] В оригинале по недоразумению вместо слова минимальная приведено — максимальная. (*К стр. 217.*)

3.2. Эксперименты до 1780 г.: Риккати, Мусшёнбрук, Гравесанд, Кулон; введение Эйлером концепции модуля упругости.

[1] По-видимому имеются в виду перемещения. (*К стр. 223.*)

[2] Обсуждаемый здесь вопрос в механике стержневых систем относится к числу элементарных. В первый момент времени, когда закрепленная по концам проволока длиной l прямолинейна и к ней в средней точке прикладывается сила P, перпендикулярная оси проволоки, система мгновенно изменяема. По отношению

к малому провисанию f нити в точке приложения к ней силы P удлинение нити является величиной второго порядка малости. Для определения усилий в таких системах в принципе необходимо рассматривать равновесие в деформированном их состоянии. Задача становится геометрически нелинейной. Поэтому совершенно очевидно, что говорить о линейности зависимости перемещения f точки приложения силы или удлинения 2δ нити от силы P недопустимо. В связи с геометрической нелинейностью системы она статически неопределима и наряду с уравнением равновесия приходится использовать уравнение совместности деформаций. Зависимость P от f имеет вид

$$P=\frac{8EF}{l^3}f^3.$$

Представим себе теперь, что к проволоке уже была приложена сила P_1, вызвавшая ее провисание f_1; при этом угол, составляемый осью провисшей проволоки с первоначальным направлением оси равен α_1.

После этого приложим силу P_2 в этой же точке и по тому же направлению, что и сила P_1. Сила P_2 вызовет усилие N_2, провисание f_2, поворот оси проволоки на угол α_2 и удлинение половины длины проволоки на δ_2. Тогда

$$P_2=f_2\frac{8EF\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)}{\sqrt{l^2+4f_1^2}}.$$

Эта зависимость между P_2 и f_2 нелинейная, поскольку угол α_2 зависит от P_2. Система с малой погрешностью становится линейной, если угол α_1 достаточно велик, чтобы по сравнению с ним можно было бы пренебречь углом α_2.

В результате, выражая $\sin\alpha_1$ через f_1 и l получим

$$P_2=\frac{32EFf_1^2}{(l^2+4f_1^2)^{3/2}}f_2.$$

Таким образом, метод Гравесаида для определения модуля E начинает работать, и то как приближенный, лишь после того, как угол α_1 достиг достаточно большого значения, чтобы по сравнению с ним можно было пренебречь углом α_2. Если учесть нелинейность зависимости $\sigma=\sigma(\varepsilon)$, то метод Гравесанда позволяет находить касательный модуль с некоторой погрешностью, начиная от достаточно высокого уровня напряжений. (*К стр. 225.*)

3.4. Первое определение значения модуля упругости, выполненное Кулоном, и его эксперименты по вязкости и пластичности (1784).

[1] Блестящим примером сопоставления результатов аналитического решения с экспериментальными фигурами Хладни может служить статья С. Игучи (S. Iguchi. Die Eigenschwingungen und Klangfiguren der vierseitig freien rechteckigen Platte. Ingenieur Archiv, 1953, B. 21, № 5, 6, S, 303. (*К стр. 235.*)

[2] В каждом из экспериментов, результаты которых представлены в табл. 3.37 и 3.38, проволока подвергалась нескольким циклам нагружения и разгрузки. Каждый такой цикл в одном эксперименте назван опытом. Например, в первом эксперименте — 9 опытов, причем последний опыт содержит неполный цикл, т. е. содержит лишь нагружение, завершившееся разрушением; разгрузки не было. Весь угол, при котором произошло разрушение, истолкован как остаточный угол, хотя и он на самом деле содержал упругую долю (возврат). Во втором столбце каждой из этих таблиц указано число оборотов при закручивании от положения, образовавшегося после предшествовавшей разгрузки. В третьем столбце даны углы закручивания, получаемые в результате нагружения в данном опыте; отсчитанные от первоначального положения, имевшегося до первого опыта. В четвертом столбце указана дополнительная остаточная деформация, образовавшаяся в результате данного опыта (данного цикла нагружения и разгрузки). Значения полной остаточной деформации, помещенные в пятом столбце, представляют собой сумму значений остаточных деформацнй во всех предыдущих опытах (предыдущих циклах нагружения и разгрузки). Наконец, в шестом столбце — упругая деформация, обнаруживаемая в процессе разгрузки в данном опыте (она же, разумеется — полная упругая деформация). (*К стр. 237.*)

[3] По-видимому имеется в виду сравнение начальных амплитуд, необходимых для того, чтобы уменьшение каждой из них на 10% происходило после одинакового числа колебаний. (*К стр. 238.*)

[4] Точнее следует сказать так: «...возрастание упругой области на один градус дополнительного закручивания оказывалось примерно обратно пропорциональио полному углу закручивания». (*К стр. 239.*)

3.5. Об определении значений констант упругости.

[1] См. наше примечание [1] к стр. 127. (*К стр. 243.*)

3.6. Эксперименты Хладни по продольным колебаниям стержней (1787).

[1] Скорость v распространения в стержне звука, модуль продольной упругости E и плотность ρ материала связаны следующей зависимостью

$$v = \sqrt{E/\rho}.$$ (*К стр. 246.*)

3.7. Оценка фактов и мифов о модулях в лекциях Юнга по натуральной философии (1807).

[1] *post hoc* — начало фразы на латинском языке, которая в полном виде такова: *post hoc, ergo propter hoc.* В дословном переводе фраза представляется в следующем виде: *после этого, значит по причине этого.* Это изречение понимается в таком смысле: неправильно считать, что если случайно какое-то событие произошло после некоторого другого, то оно явилось его следствием.

Приводя указанную фразу автор книги хочет подчеркнуть, что некоторые открытия, совершенные после выхода в свет двухтомника Т. Юнга, вовсе не обязательно явились результатом прочтения книг Юига автором открытия, хотя в этих книгах такое открытие в той или иной форме уже содержалось. Причина такого утверждения в путанности изложения в книгах Юнга. (*К стр. 249.*)

[2] Имеется в виду длина образца. (*К стр. 251.*)

[3] Единицы измерений в приведенном тексте Комментария, помещенные в круглые скобки, в оригинале не указаны. (*К стр. 256.*)

3.9. Введение Альфонсом Дюло квазистатических измерений при изучении линейной упругости (1813).

[1] Поскольку поперечное сечение представляло собой равносторонний треугольник, момент инерции площади поперечного сечения в обоих типах положения балки (все три случая расположения на ребре и все три случая расположения на грани) оставался одним и тем же, равным $\sqrt{3}\,a^4/96$, и, т. о., теоретическое значение прогиба должно было быть в точности во всех случаях одинаковым. Наблюденное Дж. Беллом отличие (рис. 3.15) объясняется различной практической реализацией (в двух разных положениях — на ребре и на грани) одной и той же теоретической схемы опирания. (*К стр. 271.*)

[2] Отличие результата, найденного Дюло экспериментальио, от полученного на основе формулы Эйлера определяется и тем, что среди образцов, подвергшихся испытанию, некоторое количество (образцы с малым отношением длины к размеру поперечного сечения) было таких, к которым формула Эйлера вовсе неприменима. (*К стр. 272.*)

3.16. Первые эксперименты Вертгейма по определению коэффициента Пуассона, доказавшие неприменимость атомистической теории Пуассона — Коши для описания напряженно-деформированного состояния кристаллических тел (1848).

[1] Имеется в виду, что теоретика может удовлетворить красота самой теория иезависимо от меры адекватности ее природе. (*К стр. 326.*)

[2] См. примечание [1] редактора перевода к стр. 127. (*К стр. 333.*)

3.17. Успех Вертгейма в первом определении частоты стоячих волн в столбах жидкости (1848).

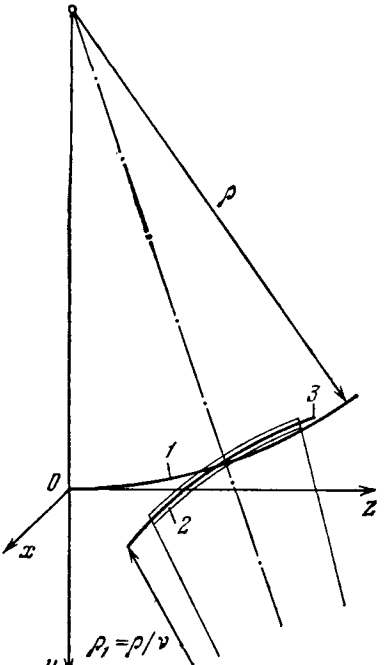
[1] Свободное поле — поле в однородной изотропной среде, свободной от границ. Практически это поле, в котором эффект границ пренебрежимо мал в рассматриваемой части области. (*К стр. 334.*)

3.18. Вертгейм о колебаниях пластин и «глубоком тоне» колеблющихся стержней.

[1] Возможно, что при применявшемся способе возбуждения продольных колебаний посредством приложения к образцу вдоль его оси периодически изменяющейся силы (так можно трактовать процесс натирания образца) имел место параметрический резонанс, выражавшийся в возникновении и нарастании поперечных колебаний. При изменении способа возбуждения продольных колебаний — использовании однократного продольного удара — поперечные колебания исчезли. (*К стр. 338.*)

[2] В оригинале сказано «...на одной стороне балки с прямоугольным поперечным сечением, а *2* и *3* — на узкой стороне сечения». (*К стр. 339.*)

[3] Поскольку в оригинале книги Белла пояснение об относительном расположении иглы, пластины и стержня в обоих случаях — и применительно к рис. 3.30, *1*, *2*, *3* и к рис. 3.30, *4* и *5* одинаково, вследствие чего не было необходимости их различать, то, по-видимому, в одном из этих случаев следует иметь в виду иное взаимное расположение указанных объектов, а именно — игла параллельна оси стержня (или совпадает с ней по направлению), а пластина перпендикулярна оси стержня. В этом случае, будь пластина неподвижной, игла оставляла бы на ней след, известный в механике как фигура Лиссажу (Lissajous). (*К стр. 339.*)



3.20. Эксперименты Кирхгофа по непосредственному определению коэффициента Пуассона (1859).

[1] В оригинале, по-видимому, допущена описка — сказано, что «...центральное сечение прибора теперь было свободно». (*К стр. 347.*)

[2] К сожалению, в оригинале настоящей книги не указан материал всех остальных, кроме двух последних, образцов, однако из оригинала статьи М. Окатова следует, что все образцы были стальными. Вместе с тем для двух последних образцов не указана форма их поперечных сечений. (*К стр. 347.*)

3.21. Эксперимент Корню (1869), в котором использовалась оптико-интерференционная техника для определения коэффициента Пуассона.

[1] Приведем рисунок, взятый из нашей книги (Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела, Т. II, М.: Наука, 1978), иллюстрирующий зависимость, использованную Корню. На этом рисунке: *1* — ось балки (окружность радиуса ρ), подвергнутой чистому изгибу; *2* — испытавшее деформацию первоначально прямоугольное поперечное сечение балки (в опытах Корню отношение высоты поперечного сечения к ширине было намного меньше единицы); *3* — нейтральная линия (окружность радиуса $\rho_1=\rho/\mu$) в поперечном сечении, представляющая собой след антикластической поверхности на плоскости поперечного сечения. Линии *1* и *3* — линии главных кривизн нейтральной поверхности балки. Отношение радиусов $\rho/\rho_1=\nu$ равняется коэффициенту Пуассона. (*К стр. 350.*)

[2] См. примечание [1] редактора перевода к стр. 127. (*К стр. 355.*)

3.25. Эксперименты Бока по изучению зависимости значения коэффициента Пуассона от уровня температуры (1894).

[1] Коэффициентами уменьшения упругих характеристик E и μ при увеличении температуры являются соответственно величины $1-\alpha_t$ и $1-\beta_t$. Зависимость между ν, μ и E применительно к некоторой исходной температуре и к температуре t (температура опыта) имеет вид

$$\mu_0=\frac{E_0}{2(1+\nu_0)}, \qquad \mu_t=\frac{E_t}{2(1+\nu_t)}, \qquad \frac{\mu_0}{\mu_t}=\frac{E_0}{E_t}\frac{(1+\nu_t)}{(1+\nu_0)}. \tag{а}$$

Вводя взаимосвязи между μ_t и μ_0 и отдельно между E_t и E_0:

$$\frac{\mu_t}{\mu_0}=1-\beta_t, \qquad \frac{E_t}{E_0}=1-\alpha_t, \tag{б}$$

и подставляя (б) в (а), получаем

$$\frac{1}{1-\beta_t}=\frac{1}{1-\alpha_t}\frac{1+\nu_t}{1+\nu_0}, \qquad 1+\nu_t=(1+\nu_0)\frac{1-\alpha_t}{1-\beta_t},$$

т. е. формулу (3.10). (*К стр. 372.*)

3.26. Исчерпывающее изучение Штраубелем эксперимента Корню по непосредственному определению коэффициента Пуассона (1899).

[1] Здесь имеется типичная терминологическая ошибка, которую иногда допускают в связи с эффектом Пуассона. Так же как нет растяжения в поперечном направлении при сжатии призматического образца, а имеется просто увеличение ширины образца без возникновения напряжений на площадках, параллельных сжимающему усилию, так и здесь,— никакого поперечного изгиба при чистом изгибе в плоскости, проходящей через ось образца, нет, а имеется поперечное искривление, вовсе не связанное с возникновением поперечных изгибающих моментов, которых на самом деле нет. При изгибе же такие моменты должны были бы возникнуть. В рассматриваемом случае следовало сказать о стеснении поперечного искривления. (*К стр. 375.*)

3.27. Эксперименты Грюнайзена по проверке теоретической зависимости между постоянными упругости изотропного тела посредством независимого определения значений E, μ и ν.

[1] По-видимому, смысл, который автор книги предполагал передать данной фразой, изложен не совсем удачно. Действительно, использование длинных образцов в XIX веке преследовало цель повысить разрешающую способность при определении продольных деформаций при заданном уровне разрешающей способности измерения удлинений. Длина базы прибора для измерения изменения поперечных размеров образца здесь ни при чем, если не указывать на увеличение поперечных размеров, пропорциональное увеличению длины образца. Для отыскания же коэффициента Пуассона с достаточной точностью непосредственно как абсолютного значения отношения поперечной и продольной деформации, при условии малости базы прибора для измерения изменения поперечного размера образца, требовало повышения разрешающей способности прибора, выполняющего именно это измерение, с целью повышения разрешающей способности при определении поперечной деформации. Этого и добился Баушингер, введя в практику эксперимента свой рычажный зеркальный экстензометр. (*К стр. 380.*)

[2] См. примечание редактора перевода к разделу 3.18 на стр. 127. (*К стр. 385.*)

3.28. Повторение эксперимента Кирхгофа по определению значения коэффициента Пуассона, выполненное в середине XX века.

[1] См. примечание [1] редактора перевода к стр. 127. (*К стр. 387.*)

3.31. Использование Грюнайзеном метода Мэллока для сравнения постоянных упругости изотропных тел (1910).

[1] См. примечание [1] редактора перевода к стр. 127. (*К стр. 403.*)

3.34. Осевое соударение стержней в предположении линейности функции отклика: эксперименты Больцмана (1881 и последующие годы) и сопоставление их результатов с теорией Сен-Венана (1867).

[1] Очевидное несоответствие — весá при одинаковых поперечных сечениях не пропорциональны длинам и даже более короткий стержень имеет больший вес — объясняется, по-видимому, тем, что в них включены и силы тяжести наконечников, которые у разных стержней, должно быть, были разными. (*К стр. 412.*)

[2] Следует иметь в виду выражение для P: $\frac{H-S}{H} \cdot 100\%$. (*К стр. 412.*)

3.35. Использование Хаузманингером (1884) методики Пуйе (1844) измерения продолжительности контакта при ударе в эксперименте Больцмана и в аналогичных экспериментах, выполнявшихся на протяжении полустолетия (1884—1936).

[1] Судя по рис. 3.55, кривая $t = t(L)$ асимптотически приближается к прямой E при уменьшении L и, возможно, за пределами обследованной области приближается асимптотически к прямой B при увеличении L. Прямую же C кривая $t = t(L)$ пересекает, нигде не приближаясь к ней асимптотически. (*К стр. 423.*)

3.37. Использование Дэвисом (1948) техники электрической емкости при определении перемещений во впервые выполненном сравнении профиля волны в стержне с предсказываемым на основе трехмерной теории Похгаммера для цилиндрических брусьев (1876).

[1] Английская аббревиатура от слов chemical explosive (обычное взрывчатое вещество; в отличие от ядерного) или, по-другому — composition exploding (взрывчатая смесь). (*К стр. 432.*)

3.41. О зависимости постоянных упругости от температуры (1843—1910).

[1] По-видимому, это опечатка и следует читать: «...уменьшение модуля с повышением температуры». (*К стр. 461.*)

3.43. Об исследованиях температурной зависимости постоянных упругости и декремента колебаний, выполненных после 1910 г.

Дебай Питер Иозеф Вильгельм (1884—1966) ученый физик-химик, голландец по происхождению, работавшнй в Германии и США. Известен как один из авторов так называемой Дебай — Хюкелевской полуфеноменологической теории (1923), учитывающей эффект электростатических сил в таких средах как ионизированные растворы или плазмы. Наряду с Борном, Карманом и Эйнштейном уточнил квантовую теорию теплоемкости. Вместе с П. Шеррером разработал новую методику рентгеновского анализа кристаллов в порошке, получившую широкое распространение в рентгеноструктурном анализе. Независимо от А. Комптоиа дал теорию «Эффекта Комптона», вместе с Комптоном получил формулу для изменения длины волны рассеяния излучения, самостоятельно Дебай дал упрощенный вариант этой формулы, способствующий укреплению представления о кванте света как о частнце (фотон). С именем Дебая связаны также дебаевская энергия, дебаевское уравнение дисперсии диэлектрической постоянной, дебаевское уравнение состояния твердого тела, дебаевское уравнение теплоемкости молекулы, содержащие так называемую дебаевскую функцию, дебаевская длина, дебаевский T^3 закон, дебаевская теория колебаний кристалла, дебаевская единица, Дебая — Валлера уравнение н др.

Дебаевская температура — параметр Θ, имеющий размерность температуры (используется в дебаевской теории удельиой теплоемкости) и являющийся

характеристикой твердого тела

$$\Theta = \frac{h\nu_0}{k},$$

где h — постоянная Планка, k — постояиная Больцмана и ν_0 — дебаевская частота.

В трактовке Дебая колебания атома представляются как упругие волны. Тело кристаллической структуры трактуется Дебаем как одиородиое изотропное тело, к которому примеиимы классические законы колебаний, иа основе которых можно иайти частоту колебаний, заключеииую между ν и $\nu+d\nu$. Атомиая природа структуры кристалла учитывается постулированием максимальной частоты ν_0, имеющей порядок частоты колебаний атома. Частота ν_0 может быть связана со скоростью волн в твердом теле зависимостью

$$\nu_0^3 = \frac{9N}{4\pi V} \Big/ \left(\frac{2}{c_2^3} + \frac{1}{c_1^3}\right).$$

Здесь c_1 и c_2 — соответственно скорости продольных и поперечных упругих воли, V — объем кристалла и N — общее число атомов в кристалле. (*К стр. 487.*)

2 Точка Кюри — температура, выше которой ферромагнитные материалы обнаруживают только парамагиетизм. (*К стр. 495.*)

3.45. Анизотропия.

1 В оригииале допущена опечатка в знаке иеравенства в (3.31) в третьем случае. (*К стр 522.*)

2 Фоиои — в физике твердого тела частица (кваит), соответствующая звуковой волне или колебаниям в атомиой решетке, играет большую роль в теплопроводности электрических изоляторов. (*К стр. 523.*)

3.47. Вязкоупругость.

1 В переводах иа русский язык трудов этого автора примеиялась разная транскрипция его фамилии: в 1953 г. издательством ИЛ была издаиа киига «Физика упругости каучука» (Трелоар) и в 1973 — издательством «Мир» книга «Введение в науку о полимерах» (Трилор). (*К стр. 533.*)

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Звездочкой отмечены страницы, на кототых имена упоминаются редактором перевода (в некоторых случаях имена упоминались и в оригинале книги, но не были включены там в именной указатель).

Абрамсон Х. Норман (Abramson, H. Norman) 431, 561
Авербах Бенжамен Льюис (Averbach, Benjamin Lewis) 4, 193—195, 562
Адамс Джон Куинси (Adams, John Quincy) 537, 539
Алерс Г. А. (Alers, G. A.) 504
Амага, Эмиль Илэр (Amagat, Émile Hilaire) 5, 346, 362—364, 366—368, 374, 386, 389, 399, 400, 462, 549—552
Ампер Андре Мари (Ampère, André Marie) 135*
Амслер (Amsler) 489*
Анвин Уильям Кауторн (Unwin, William Cawthorne) 155, 185, 551, 556
Андерсон Артур Роланд (Anderson, Arthur Roland) 184, 187, 559
Андраде Эдвард Невиль да Коста (Andrade, Edward Neville da Costa) 200, 555
Ардан (Ardant) 279—283, 397
Ауэрбах Феликс (Auerbach, Felix) 378, 553

Бабедж Чарльз (Babbage, Charles) 540
Бабине Жак (Babinet, Jacques) 291, 542
Байиль Ж. Б. (Baille, J. B.) 394, 549
Баламус Льюис (Balamuth, Lewis) 453—455, 557
Баркер Л. (Barker, Lynn B.) 568
Барлоу Питер (Barlow, Peter) 15*, 45, 51—55, 67—69, 224, 266, 271, 288, 539, 541
Барлоу, мл. (Barlow, Jr.) 15*, 53, 54
Басински З. С. (Basinski Z. S.) 563
Бассет У. В. (Bassett, W. V.) 6, 428—431, 558
Батчелор Георг К. (Batchelor, George K.) 561
Бауман Рихард Вильгельм (Baumann, Richard Wilhelm) 388, 489, 556
Баумгартен Г. (Baumgarten, G.) 518, 549
Баушингер Иоганн (Bauschinger, Johann) 3, 15*, 16*, 70, 95, 124—127, 129—132, 135—138, 143, 175, 176, 191, 194, 202, 212, 223, 242, 243, 274, 289, 290, 300, 325, 347, 350, 356, 362, 379—381, 384, 387, 549—551
Бах Карл фон (Bach, Carl von) 4, 111, 147, 154, 156, 158—161, 163—166, 168, 169, 171, 178, 179, 290, 388, 489, 550, 551, 553, 554, 556, 571
Беван Бенжамен (Bevan, Benjamin) 253—255, 257, 540
Бейкер Унльфред Е. (Baker, Wilfred) 533, 563
Беккерель Антуан Цезар (Becquerel, Antoin Césare) 134
Бекман О. (Beckman, O.) 504
Белидор Бернар Форест де (Belidor, Bernard Forest de) 538
Белл Джеймс Фредерик (Bell, James Frederick) 1, 2, 6, 7*—10*, 15*, 17*, 54, 74, 77, 125, 173, 185, 204—207, 234, 244, 248, 272, 390, 405, 406, 411, 447—450, 484—486, 503—508, 510—518, 522, 560—564
Бендер Оттмар (Bender, Ottmar) 497, 558
Бентои Джон Роберт (Benton, John Robert) 381, 463, 554
Бенценберг Д. (Benzenberg, D.) 262, 539
Бергман Людвиг (Bergmann, Ludwig) 353, 452, 557, 558
Бернулли Даниил (Bernoulli, Daniel) 52, 221, 222, 337, 538
Бернулли Иоганн (Bernoulli, Johannes (Johann, John, Jean)) 52, 88, 224
Бернулли Яков (Bernoulli, Jacobus (James, Jakob, Jacques)) 4, 35, 39, 40, 47, 49, 50, 52, 87—90, 92, 111, 159, 162, 163, 165, 169, 171, 178, 211, 255, 557, 571*
Бёрнштейн Ричард (Börnstein, Richard) 185, 453, 456, 458, 519—522, 556, 563, 564
Бертолле Клод Луи, граф (Berthollet, Claude Louis, Le Comte) 539
Бертран Жозеф Луи (Bertrand, Joseph Louis) 51, 279, 549, 552
Берри Денис Стенли (Berry, Denis Shanley) 567*, 568*
Бехман Р. (Bechmann, R.) 452, 453, 456, 519, 564
Билелло Джон (Bilello, John) 4, 193—195, 564
Био Жан Батист (Biot, Jean Baptiste) 4, 14*, 16*, 24, 177, 246—248, 250, 257—264, 268, 272, 273, 278, 337, 404, 405, 411, 515, 516, 538, 539, 546
Бир Томас Хьюдсон (Beare, Thomas Hudson) 154, 155, 552
Бланше (Blanchet) 568*
Блек Адам (Black, Adam) 549, 550
Блинд Август (Blind, August) 538, 554
Бодмер Георг Рудольф (Bodmer, George Rudolph) 552
Бодримон А. (Baudrimont, A.) 300, 542, 544
Бойль Роберт (Boyle, Robert) 214
Бок Адальберт Михель (Bock, Adalbert Michael) 5, 368—372, 378, 386, 390, 480, 481, 553, 576*
Больцман Людвиг (Boltzmann, Ludwig) 5, 6, 411—414, 418, 420, 428, 431, 451, 529, 531, 550, 578*
Бонди Х. (Bondi, H.) 561
Боннэ Ф., мл. (Bonnet, F., Jr.) 555
Борн Макс (Born, Max) 49, 554, 577*
Борне (Bornet) 280, 283
Боувард (Bouvard) 258, 259
Бреге Луи Франсуа Клеман (Breguet, Louis François Chément) 5, 246, 261, 262, 403—405, 515, 516, 544
Брэммер Дж. А. (Brammer, J. A.) 459, 564

Бренан Дж. Б. (Brennan, J. B.) 560
Бриджмен Перси Уильям (Bridgman, Percy Williams) 11*, 31, 32, 137, 365, 399, 486, 487, 497, 557, 559, 563
Бриллюэн Марсель (Brillouin, Marcel) 164, 553
Бринк Ф. Н. (Brink, F. N.) 555
Броун Норман (Brown, Norman) 70, 562
Броункер, лорд, виконт (Brounker, Lord Viscount) 214
Броутон, лорд (Broughton, Lord) 249
Бруйер (Bruyere) 270
Брухем Пегги (Brougham, Peggy) 34*
Брюстер, сэр Давид (Brewster, Sir David) 53, 324, 539
Буббе (Bubbé) 154, 155
Булгаков Б. В. 557*
Буссинеск Жозеф Валентэн (Boussinesq, Joseph Valentin) 568*
Буше (Busche) 544
Бюльфингер Георг Бернард (Bülffinger, Georg Bernhard) 40, 153, 161—163, 169, 537
Бюффон Георг Лун Леклерк, граф де (Buffon, Georges Louis Leclerc, Comte de) 3, 11*, 43—45, 52, 55, 223, 290, 518, 538, 569*
Бюханен Джон Янг (Buchanen, John Young) 386, 399, 540, 554

Ван Вагиер Р. В. (Van Wagner, R. W.) 184, 185, 194, 559
Валентинер Зигфрид (Valentiner, Siegfried) 417, 555
Валлер Ивар (Valler, Ivar) 577*
Валлин Дж. (Vallin, J.) 504
Вариньон Пьер (Varignon, Pierre) 43, 161
Варшауэр Дуглас М. (Warschauer, Douglas M.) 563
Вебер Вильгельм (Weber, Wilhelm) 3, 21, 61, 69, 75, 77—87, 90, 96, 101, 104, 105, 109, 115, 119, 122, 124, 144, 146—148, 150, 183, 195, 196, 199, 200, 230, 255, 302, 394, 398, 525, 527, 528, 532, 540, 541, 543, 570*
Вейраух Якоб Иоганн, фон (Weyrauch, Jacob Johann von) 154, 551
Верде Марсель-Эмиль (Verdet, Marcel-Émile) 94, 328, 334, 336, 340, 341, 518, 547
Вертгейм Гийом (Wertheim, Guillaume) 3—5, 15*, 16*, 21, 23—26, 31, 68, 83, 92—105, 114, 124—127, 132—135, 137, 138, 140, 141, 149, 150, 162, 163, 176, 179, 185, 194—196, 202, 230, 234, 240, 241, 246, 247, 255, 257, 261—263, 265—267, 272—274, 278, 279, 283, 284, 288—309, 311—315, 317—347, 351, 352, 356, 357, 360, 361, 363—366, 368, 369, 374, 378, 380—383, 386, 389, 391, 395—399, 403—406, 411, 420, 438, 439, 456, 460—462, 464—475, 482, 492, 499, 501, 503, 505, 515—518, 526, 530, 535, 541—547, 553, 568*, 570*, 574*, 575*
Видеман Густав Генрих (Wiedemann, Gustav Heinrich) 131, 346, 530, 538, 546, 550
Вика Луи-Жозеф (Vicat, Louis-Joseph) 3, 21, 23, 63—70, 72, 75, 83, 95, 162, 216, 281, 284, 288, 398, 534, 541
Винкельман Адольф Август (Winkelmann, Adolf August) 376—378, 462, 553
Винклер Эмиль (Winkler, Emil) 157, 547, 549
Вольтера Энрико (Volterra, Enrico) 433
Вуд Д. С. (Wood, D. S.) 368, 369, 372
Вудфорд (Woodford) 533
Вулем Уильям Е. (Woolam, William E.) 533, 563
Вундт Вильгельм Макс (Wundt, Wilhelm Max) 3, 101, 103—109, 115, 179, 195, 196, 230, 543, 546, 570*
Вунш (Wunsch) 257

Галилей Галилео (Galilei, Galileo) 9*, 45 52, 224, 568*
Галт Джон Киркланд (Galt, John Kirkland) 485, 559
Гамбургер Макс (Hamburger, Max) 413, 418—420, 425, 551
Гарафало Франк (Garafalo, Frank) 373, 387, 389—391, 464, 488, 560
Гарланд К. В. (Garland, C. W.) 504
Гарнье (Garnier) 545
Гартон Мортон Е. (Gurton, Morton E.) 568*
Гаусс Карл Фридрих (Gauss, Karl Friedrich) 69, 82, 119, 200, 344, 389
Гауфф Е. (Hauff, E.) 551
Гаф Джон (Gough, John) 3, 77, 78, 406, 525, 538, 570*
Гей-Люссак Жозеф Луи (Gay-Lussac, Joseph Louis) 134, 256, 257, 261, 289
Гейрингер Хильда (Geiringer, Hilda) 567*, 568*
Геклер Люси (Geckler, Lucie) 34*
Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд фон (Helmholtz, Herman Ludwig Ferdinand von) 115
Герстнер Франц Антон фон (Gerstner, Franz Anton (Ritter) von) 62, 126, 541
Герстнер Франц Иосиф фон (Gerstner, Franz Joseph von) 3, 12*, 59, 62, 63, 73, 75, 82, 83, 85, 113, 155, 156, 163, 169, 171, 180, 211, 284, 298, 304, 540, 541, 568*
Герц Генрих Рудольф (Hertz, Heinrich Rudolph) 414, 417—419, 421—426, 437, 550
Гехман (Gechmann) 533
Гийлет Леон (Guillet, Léon) 499, 558, 559
Гильберт Людвиг Вильгельм (Gilbert, Ludwig Wilhelm) 263
Гино (Guinaud) 358
Гипп (Hipp) 407
Гопкинс Уильям (Hopkins, William) 337, 340, 543
Гопкинсон Бертрам (Hopkins, Bertram) 95, 423—425, 431, 433, 548, 556
Гопкинсон Джон (Hopkinson, John) 22, 71, 548
Госселин (Gosselin) 279
Готэ Эмилан Мари (Gauthey, Emiland Marie) 3, 43, 45, 46, 223, 538, 569*
Гоэнс Е. (Карл Антон Эрих) (Goens, E. (Karl Anton Erich)) 241, 304, 491—493, 504, 557, 558
Гравесанд Вильгельм Якоб Шторм (s'Gravesande, Wilhelm Jakob Storm) 4, 148, 219, 224—226, 537, 572*, 573*
Григолюк Э. И. 568*
Грин Георг (Green, George) 12*
Гровер С. Ф. (Grover, S. F.) 192, 193, 559
Гротриан (Grotrian) 465
Грошуф (Groschuff) 383
Грюнайзеи Эдуард Август (Grüneisen, Eduard August) 4, 5, 21, 68, 70, 140, 147, 149, 150, 154, 162, 165—176, 178, 180, 199, 202, 210—212, 225, 241, 242, 244, 290, 303, 304, 369, 380—386, 400—403, 415, 420, 438, 456, 457, 464, 475—484, 486, 487, 491, 497, 499, 516, 517, 528, 554, 555, 571*
Губбит Уильям (Gubbitt, William) 544
Гуггенбергер (Huggenberger) 192
Гук Роберт (Hooke, Robert) 3, 4, 9*, 13*, 30, 33, 37—41, 51, 78, 82, 88, 89, 92, 103,

105, 109, 112, 113, 138, 139, 147, 148, 158, 159, 162—164, 166, 169, 173, 174, 179, 185, 188, 195, 199, 203, 211, 212, 214—219, **224**, 241, 250, 369, 394, 395, 521, 534, 537, 553, 570*, 572*
Гьютон-Морво Луи Бериар (Guyton-Morveau, Louis Bernard) 292
Гэффней Джон (Gaffney, John) 504
Гюйгенс Христиан (Huygens, Christian) 92, 215, 415

Да Винчи Леонардо (Da Vinci, Leonardo) 30, 223
Даво Е. (Davaux, E.) 555
Д'Арки Патрик (D'Arcy, Patrick) 538
Дальтон Джон (Dalton, John) 52, 60
Дамои Ричард У. (Damon, Richard W.) 455, 456, 521, 564
Даниэль (Daniele) 407, 415
Дебай Петер Йозеф Вильгельм (Debai, Peter Joseph Wilhelm) 577*, 578*
Дезорме Шарль-Бернар (Desormes, Charles-Bernard) 262, 539
Деспре Цёзар (Desprets, César) 340
Деш Ц. Х. (Desch) 38, 556
Джеймс Генри (James, Henri) 544
Джессон Х. Т. (Jessop, H. T.) 350, 352, 357, 378, 379, 556, 564
Джонс Паул Г. (Jones, Paul G.) 558
Джоуль Джеймс Прескотт (Joule, James Prescott) 150, 357, 406—408, 525—527, 546
Джулио Карло Игнацио (Giulio, Carlo Ignazio) 333, 542
Диллон Оскар В., мл. (Dillon, Oscar W., Jr.) 74, 77, 525, 562, 563
Дирихле Густав Петер Лежен (Dirichlet, Gustav Peter Lejeune) 93, 341
Драйвестейн М. Дж. (Druyvesteyn, M. J.) 497
Дрисколл Давид Е. (Driscoll, David E.) 561
Дудзинский Н. (Dudzinski, N.) 192, 559
Дьюар Джеймс (Dewar, Sir James) 463, 529, 530, 553, 554
Дэвис Р. М. (Davies, R. M.) 6, 431—435, 437, 438, 444, 446, 447, 559, 561, 577*
Дэтунлер Г. (Datwyler, G.) 429, 558
Дюамель дю-Моисо Анри Луи (Duhamel du-Monceau, Henri Louis) 3, 43, 44, 55, 223, 538, 569
Дюамель Жан Мари Коистаи (Duhamel Jean Marie Constant) 291, 292, 295, 302, 303, 336, 340, 545
Дюве Поль Е. (Duwez, Pol E.) 559
Дюгем Пьер Морис Мари (Duhem, Pierre Maurice Marie) 331, 336, 554
Дюло Альфонс Жаи Клод Буржиньон (Duleau, Alphonse Jean Claude Bourgingnon) 4, 16*, 21, 26, 30, 39, 46, 54, 95, 131, 177, 220, 250, 254, 255, 264—278, 281, 283—287, 333, 386, 397, 405, 515, 516, 534, 539, 574*
Дюлон Пьер Луи (Duhlong, Pierre Louis) 81, 540
Дюпен Пьер Шарль (Dupin, Pierre Charles) 3, 21, 24, 28, 41—43, 45—52, 55, 61, 63, 70, 78, 155, 163, 169, 176, 180, 211, 223, 250, 274, 278, 539, 569*

Жермен Софи (Germain, Sophie) 568*
Жирар П. С. (Girard, P. S.) 46, 263, 266—268, 272, 539, 540, 568*

Захсе Вольфганг (Sachs, Wolfgang) 457, 564
Зиглершмидт Х. (Sieglerschmidt, H.) 497
Зихель Фердинанд И. М. (Sichel, Ferdinand J. M.) 4, 195—197, 558

Игучи С. (Iguchi, S.) 573*
Ирвин Георг Р. (Irwin, George R.) 567*
Итон Эрик К. (Eaton, Erik C.) 428, 557

Кавиль-Колл (Caville-Coll) 547
Камм Г. Н. (Kamm, G. N.) 504
Кантоне Мишель (Cantone, Michele) 170, 252, 253, 256, 350, 366, 374, 383, 393, 400, 466, 551
Каньяр де Латур, барон Шарль (Gagniard de Latour, Baron Charles) 21, 126, 127, 141, 289, 325, 349, 351, 363, 540
Карл II, король Англии 215
Карлсон Дональд Е. (Carlson, Donald E.) 568*
Карлсон К. Е. (Carlson, C. E.) 507
Карлсон Рой Вашингтон (Carlson, Roy Washington) 428, 557
Кármán Теодор фон (Kármán, Theodore von) 31, 577*
Кармарш Карл (Karmarsch, Karl) 3, 87—91, 111, 541, 546, 570*
Карстен Карл Иоганн Бернард (Karsten, Karl Johann Berhard) 540
Картис Чарльз Уильям (Curtis, Charles William) 439—442, 444, 446, 451, 452, 561, 562
Каценельсои Н. (Katzenelsohn, N.) 481
Квини Х. (Quinney, H.) 525, 557
Келлер Катрии (Keller, Catherine) 34*
Кельвин, см. Томсон, сэр Уильям
Кеннеди Александер Блекки Уильям (Kennedy, Alexander Blackie William) 154, 155, 551
Кёстер Вернер (Köster Werner) 241, 342, 343, 484, 486—488, 492—505, 532, 558—560
Квинт Иогани (Kiewiet, Johann) 463
Киркальди Давид (Kirkaldy, David) 15*, 53, 54, 290
Киркальди Уильям Г. (Kirkaldy, William G.) 53, 552
Кирхгоф Густав Роберт (Kirchhoff, Gustav Robert) 5, 26, 31, 183—185, 328, 331, 333, 337, 344—349, 351, 354, 357, 360, 362, 369, 380, 386—389, 544, 546, 576*, 577*
Кланг Герман (Klang, Hermann) 519, 520, 550
Клапейрон Бенуа Поль Эмиль (Clapeyron, Benoit Paul Émile) 266, 546, 568*
Кларк Дональд Шерман (Clark Donald Sherman) 429, 558, 559
Клаузиус Рудольф Юлиус Эммануэль (Clausius, Rudolph Julius Emmanuel) 83, 140, 302, 341, 382, 527, 543
Клеман Николас (Clément, Nicolas) 262, 539
Клеменчич Игнац (Klemenčič Ignac) 529, 530
Кнопс Р. (Knops, R. J.) 568*
Ковальски Йозеф фои (Kowalski, Joseph von) 374, 462, 552
Кокер Эрнест Георг (Coker, Ernest George) 324, 461, 557
Кокс Хомерсем (Cox, Homersham) 110—112, 163, 545
Колладон Жан Даниэль (Colladon, Jean Daniel) 256, 288, 318, 334—336, 541, 542
Коллонетти Густав (Colonnetti, Gustavo) 38, 556

Колски (Кольский — в русских переводах) Герберт (Kolsky, Gerbert) 432, 445—447, 459, 532, 533, 560—563
Кольрауш Р. (Kohlrausch, R.) 115
Кольрауш Фридрих Вильгельм Георг (Kohlrausch, Friedrich Wilhelm Georg) 3, 21, 114—124, 148, 149, 165, 166, 169, 172, 225, 241, 378, 382, 383, 394, 462, 465, 466, 528, 532, 547, 548, 551, 554, 570*
Комптон Артур Холли (Compton Arthur Holly) 577*
Кондорсе Мари Жан Антуан Николас Карите (Condorcet, Marie Jean Antoine Nicolas Caritat) 537, 538
Коннелли Ф. М. (Connelly, F. M.) 537, 557
Консидер Армаи Габриэль (Considère, Armand Gabriel) 154, 155, 550, 551
Контовт В. И. 10*, 56*, 568*
Кориолис Густав Гаспар (Coriolis, Gustave Gaspard) 3, 64, 77, 78, 130, 540
Корномилас С. А. (Cornomilas S. A.) 519
Корню Мари Альфред (Cornu, Marie Alfred) 5, 12*, 170, 331, 346, 349—354, 357, 358, 363, 365, 366, 372—374, 378, 379, 394, 452, 466, 467, 548, 549, 556, 576*
Коттрелл Алан Говард (Cottrell, Alan Howard) 507
Коши Огюстен-Луи (Cauchy, Augustin-Louis) 5, 17*, 21, 22, 45, 46, 83, 93, 127, 131, 132, 134, 183, 184, 187, 266—268, 272, 273, 278, 292, 303, 324—328, 330—332, 334, 336—340, 342, 344, 349, 350, 356, 358, 360, 363, 365—367, 391, 392, 411, 412, 519, 539, 540, 545, 568*, 574*
Красантович Ю. Ф. 561*
Кри Чврльз (Chree, Charles) 431, 433, 436, 439, 446, 552, 554
Кроусер О. Х. (Crowther, O. H.) 488, 556
Крылов А. Н. 570*
Кулон Шарль Огюстен (Coulomb, Charles Augustin) 4, 14*—16*, 21, 24, 30, 33, 38, 63, 78, 81, 124, 141—143, 177, 202, 219, 221, 224—240, 242, 250, 254, 272—274, 278, 284, 286, 288, 289, 293, 303, 311, 333, 393, 394, 464, 465, 470, 515, 517, 528, 529, 533, 534, 538, 550, 572*, 573*
Кульман Ф. И. (Culmann, F. J.) 540
Кундт Август Адольф (Kundt August Adolph) 382
Купфер Адольф Теодор (Фёдор) 5, 15*, 22, 241, 255, 290, 337, 346, 391—396, 398, 461, 463, 466, 523, 533, 545—547
Кюри Пьер (Curie, Pierre) 495*, 578*

Лагерхельм Пер (Lagerhjelm, Pehr) 266, 281, 286, 311, 397, 540
Лагранж Жак-Луи (Lagrange, Jacques-Louis) 52
Лазарус Давид (Lazarus, David) 411, 456, 522, 560
Ламб Горас (Lamb, Horace) 303
Ламе Габриэль (Lamé, Gabriel) 131, 328, 341, 360, 364, 568*
Ландольт Ганс Генрих (Landolt, Hans Heinrich) 185, 453, 456. 458, 519, 520—522, 556, 563, 564
Лаплас Пьер Симон, маркиз де (Laplace, Pierre Simon, Marquis de) 254, 257, 539
Ларсен Эгои (Larsen, Egon) 38, 562
Лауриент Майкл (Lauriente, Michael) 4, 176, 200—203, 210, 561
Лебер Е. (Leber, E.) 555
Леблан Феликс (Leblanc, Félix) 3, 70—73, 76, 541, 570*
Леви Анри Мишель (Lévy, Henri Michel) 554
Лего К. Ж. (Léhot, C. J.) 262, 539
Лейбниц Готфрид Вильгельм (Leibniz, Gottfried Wilhelm) 35, 39, 40, 43, 88, 92, 111, 153, 211, 215, 537
Лемале Алекс Гийеи (Lemale, Alex Guislain) 537, 549
Лесли, сэр Джои (Leslie, Sir John) 52, 539
Ле Шателье Андре (Le Chatelier, André) 3, 12*, 30, 39, 73, 74, 211, 287, 305, 462, 552, 556, 563
Ли Фредерик Чарльз (Lea, Frederick Charles) 461, 488—490, 556
Липовец (Lipowitz) 369*, 372*
Лисковиус К. Фридрих (Liskovious, K. Friedrich) 337
Лиссажу Жюль Антуаи (Lissajous, Jules Antoine) 576*
Лоомис Ф. Е. (Loomis, F. E.) 462, 465, 466, 548
Лудлоф Хаифрид (Ludloff Hanfried) 353, 558
Лью Джон Мэйю (Liu, John Moyu) 452—454, 564
Лэиг (Lang) 163*
Людвик Пауль (Ludwik, Paul) 22
Ляв Август Эдвард (Love, Augustus Edward) 148, 155, 250, 341, 521, 522, 557

Магуер Джон Р. (Maguire, John R.) 564
Майер А. (Mayer, A.) 463
МакГрегор К. У. (MacGregor, C. W.) 559
МакКолм Бертои (McCollum, Burton) 428, 556
МакРейнольдс Эидрю Везерби (McReynolds, Andrew Wetherbee) 74, 560
Максвелл Джеймс Клэрк (Maxwell, James Clerk) 4, 15*, 94, 290, 326, 328, 336, 341, 346, 357
МакФарлэйи Дональд (MacFarlane, Donald) 162, 529
Маленок П. Р. (Malenock, P. R.) 373, 388—391, 464, 488, 560
Малу (Malus) 259
Манжуаи Михаэл Жозеф (Manjoine, Michael Joseph) 373, 461, 489, 559
Мариотт Эдме (Mariotte, Edmé) 4, 36, 39, 40, 43, 45, 78, 214, 215, 218, 219, 223, 224, 241, 403, 537, 572*
Мартеис Адольф (Martens, Adolf) 462, 463, 552
Мартин (Martin) 259, 260, 264, 537
Массои Антуаи Филибер (Masson, Antoine Philibert) 3, 30, 73—76, 83, 95, 211, 255, 286—290, 305, 505, 541
Массу П. (Massuet, P.) 538*
Маттеуччи Карло (Matteucci, Carlo) 135
Матье Е. (Mathieu, E.) 331
Мейссер Отто Франц (Meisser, Otto Franz) 190, 558
Меллоии Мачедонио (Mellonl, Macedonio) 451*
Мемке Рудольф (Mehmke, Rudolf) 40, 110, 111, 147, 160—165, 215, 553
Меркадье Эрнест Жюль (Mercadier, Ernest Jules) 5, 360—362, 551, 552
Мерсеиие Марии (Mersenne, Marin) 36, 337, 528, 537
Метцгер Марвин (Metzger, Marvin) 4, 193—195, 564
Микловитц Юлиус (Miklowitz, Julius) 387—391, 442—444, 488, 559, 561
Миллер Андреас (Miller, Andreas) 149, 550
Миллер Дж. А. (Miller J. A.) 70, 176, 186—188, 191
Мимс Р. Л. (Mims, R. L.) 444—446, 455, 460
Миндлин Раймонд Давид (Mindlin, Raymond David) 26, 444, 560

Митиский А. Н. 10*, 561*, 568*
Михлин С. Г. 568*
Моккель Ф. Ф. П. (Moeckel, Faith Farchione Pacquet) 34
Моиги М. (Mongy, M.) 504
Морей сэр Роберт (Morey, Sir Robert) 214*
Морзе Самюэл (Morse, Samuel) 69
Морроу Дж. (Morrow, J.) 381, 554
Морэн Артур Жюль (Morin, Arthur Jules) 58, 112—114, 254, 282, 283, 546, 547
Мотт Б. У. (Mott, B. W.) 192, 559
Муленбрух Карл В. (Muhlenbruch, Carl W.) 187—190, 560
Мунке Георг Вильгельм (Munke, Georg Wilhelm) 262, 263, 539
Мунро У. (Munro, W.) 192, 193, 559
Мурнагаи Франсис Д. (Murnaghan, Francis D.) 558
Мусхелишвили Н. И. 570*
Мусшенбрук Питер ваи (Musschenbroek, Pieter van) 4, 26, 36, 37, 219, 221—224, 227, 272, 538, 572*
Мэллок Ариульф (Mallock, Arnulph) 5, 346, 354—356, 380, 386, 399—401, 476, 479, 483, 484, 519, 554, 577
Мюллер Эрнст (Müller, Ernst) 3, 144—147, 550
Мюнтц (Müntz) 381*
Мюррей Дж. Р. (Murray, J. R.) 192, 559

Навье Клод-Луи-Мари-Анри (Navier, Claude-Louis-Marie-Henri) 46, 64, 185, 266, 269, 270, 278, 281, 322, 374, 540, 541, 544, 547, 568*
Нагди Пауль М. (Naghdi, Paul M.) 568*
Надаи Арпад Людвиг (Nadai, Arpad Ludwig) 373, 461, 489, 559
Найбоурз Дж. Р. (Neighbonrs, J. R.) 504
Найзваигер К. Р. (Nisewanger, C. R.) 442—444, 561
Наполеон I, император Франции (Napoléon) 131*
Натанзои В. Я. 557*
Неймаи Франц Е. (Neumann, Franz E.) 133, 324, 358, 412, 519, 520
Нелькенбрехер Иоганн Христиан (Nelkenbrecher, Johann Christian) 537, 539
Нельсои Харлей А. (Nelson, Harley A.) 4, 178, 179, 556
Нойес Мари Хилтои (Noyes, Mary Chilton) 463, 471—474, 553
Нунциато Ж. (Nunziato, Jace W.) 568*
Ньютои Исаак (Newton, Isaac) 254

Обермайер А. фон (Obermayer, A. von) 529, 530, 549
Обре (Aubrey) 266
Овертои У. К. (Overton, W. C.) 504
Окатов М. Ф. 346—349, 386, 389, 547

Паганн (Paggani) 568*
Пальмер К. Харвей (Palmer, C. Harvey) 211, 564
Папирио Ральф (Papirno, Ralph) 562
Пареи Антуан (Parent, Antonie) 36, 43
Паркинс Р. Н. (Parkins, R. N.) 304, 564
Партиигтон Джеймс Реддик (Partington, James Reddick) 83, 185, 305, 560
Паул Уильям (Paul, William) 563
Пауэлл Баден (Powell, Baden) 134
Пауэрс Тривал Клиффорд (Powers, Treval Clifford) 4, 197, 558
Пелисосанс (Pellisosans) 337
Пелоуз Теофил Жюль (Pelouze, Théophile Jules) 291
Перо А. (Perot, A.) 554
Персиваль К. М. (Percival, C. M.) 459, 460, 564
Персои К. К. (Person, C. C.) 526, 527, 543
Петерс О. С. (Peters, O. S.) 428, 556
Пизати Джузеппе (Pisati, Giuseppe) 463
Пикте (Pictet) 272
Пииар (Pinard) 337
Пиола Г. (Piola G.) 183*, 184*
Пирсон Карл (Pearson, Karl) 9*, 10*, 15*, 22, 33, 43, 94, 241, 249, 266, 328, 341, 391, 392, 394, 395, 398, 462, 466, 551, 552, 562, 568*
Писаренко Г. С. 17*
Планк Макс (Planck, Max) 578*
Поггендорф Иогани Христиан (Poggendorff, Johann Christian) 62, 94, 291, 324, 540, 541, 543, 547—549
Пойитинг Дж. Генри (Poynting, J. Henry) 23, 147, 381, 468, 470, 555, 556
Понд Роберт Барретт (Pond, Robert Barrett) 4, 176, 201—203, 210, 561
Пондрём Уолтер Льюис (Pondrom, Walter Lewis) 444—446, 455, 560
Понселе Жан-Виктор (Poncelet Jean-Victor) 12*, 131, 163, 185, 266, 279—281, 283, 284, 291, 292, 397, 540, 541, 549
Портвен Альберт (Portevin, Albert) 3, 12*, 30, 39, 73, 74, 211, 287, 305, 556, 563
Потье Альфред (Potier, Alfred) 234
Поххаммер Лео (Pochhammer, Leo) 6, 431, 433, 436, 439, 446, 549
Прагер В. (Prager, W.) 157, 558, 559
Прасад С. К. (Prasad, S. C.) 504
Прейсс А. К. 561*
Пригоровский Н. И. 561*
Проктор Генри Ричардсои (Proctor Henry Richardson) 551*
Проуз У. А. (Prowse W. A.) 427, 428, 558
Пуассон Симеои-Дени (Poisson, Siméon Denis) 5, 12, 21, 22, 45, 46, 83, 93, 125—129, 136, 187, 188, 205, 242, 243, 266—268, 272, 278, 292, 325—332, 334, 336—340, 342—347, 349—383, 386—393, 399, 411, 412, 419, 426, 433, 464, 475, 479—481, 483, 484, 486, 492, 502, 519, 535, 539—541, 543, 550, 553, 554, 559, 565*, 568*, 571*, 574*, 576*, 577*
Пуйе Клод Сервэ Матэ Мари Ролаи (Pouillet, Claude Servais Mathais Marie Roland) 5, 66, 414, 415, 417, 418, 420, 425, 539, 542
Пульфрих Карл (Pulfrich, Carl) 346, 373, 375, 551, 553
Пьобер Гийом (Piobert, Guillaume) 131

Рандл Георг У. (Rundle, George W.) 556
Раушер Вальтер (Rauscher, Walter) 311, 484, 486, 500, 560
Рейнер Макс (Reiner, Max) 567*
Рен Кристофер (Wren, Sir Christopher) 215
Ренни Джордж (Rennie, George) 51, 52, 254, 292, 544
Рено Анри Виктор (Regnault, Henri Victor) 31, 303, 326, 327, 331, 332, 334, 336, 340, 344, 363—365, 374, 399, 542, 543, 545
Реомюр Рене Антуан Фершо (Réaumur, René Antoine Ferchot) 72*, 462*
Ривлин Рональд С. (Rivlin, Ronald S.) 32
Рикерт П. фон (Riekert, P. von) 379*, 557
Риккати Джакопо (Riccati, Jacopo (James)) 40, 89—92, 163, 220, 283, 537, 572

Риккати Джордано (Riccati, Giordano (Jordan)) 40, 177, 219—221, 224, 234, 248, 256, 278, 534, 538, 572
Риппергер Юджин Эштон (Ripperger, Eugene Ashton) 431, 437—439, 560, 561
Рис Н. Дж. (Rees, N. J.) 434
Ричардс Дж. Т. (Richards, John T.) 4, 36, 185—191, 212, 386—388, 560
Ричардс Теодор Уильям (Richards, Theodore William) 486, 502, 503, 555, 556
Рихарт Франк Эдвин (Richart, Frank Edwin) 558
Робертс Джон Мельвиль (Roberts, John Melville) 70, 562
Робизон Джон (Robison, John) 53—55, 88, 89, 249, 256, 266, 539
Розе Фред К. (Rose, Fred C.) 454, 455, 558
Ройш (Reusch) 143, 144
Ронделе Жан (Rondelet, Jean) 282, 397
Ронки Васко (Ronchi, Vasko) 211*
Руже Артур К. (Ruge, Arthur C.) 429
Рэлей, лорд (см. Стрэтт Джон Уильям)
Рэнкин Уильям Джон (Rankine, William John) 51, 52, 255, 546

Савар Феликс (Savart, Felix) 3, 26, 30, 73, 75, 76, 95, 211, 235, 246, 248, 255, 261, 263, 266, 273, 274, 286—288, 318, 333, 337—339, 345, 346, 382, 383, 391, 397, 539—541
Саимото (Saimoto) 563
Салама К. (Salama, K.) 504
Сато Х. (Sato, H.) 504
Сен-Венан Адемар-Жан-Клод Барре де (Saint-Venant, Adhémard-Jean-Claude Barré de) 5, 9, 21, 43, 54, 63, 131, 132, 135, 185, 265, 266, 270, 273—275, 292, 322, 340, 341, 350, 352, 354, 356—358, 362, 411—414, 417—421, 425, 426, 428, 430, 431, 451, 519, 535, 545—549, 568
Симмонс Эдвард Е., мл. (Simmons, Edward E., Jr.) 429
Сирл Джордж Фредерик Чарльз (Searle, George Frederick Charles) 38, 173, 174, 180, 210, 242, 379, 380, 554—556
Сирс Дж. Е. (Sears, J. E.) 419—422, 425—427, 430, 555
Скэлак Ричард (Skalák, Richard) 436, 439, 442, 446, 451, 561
Слутски Л. Дж. (Slutsky, L. J.) 504
Смирнов А. И. 568*
Смит Алан Б. (Smith, Alan B.) 455, 521, 564
Смит Г. В. (Smith, G. V.) 373, 388—391, 464, 488, 560
Смит Дж. Ф. (Smith J. F.) 507
Смит Сирил Стенли (Smith, Cyril Stanley) 4, 70, 176, 180, 181, 183—185, 187, 194, 195, 559
Снеддон Дж. Нейсмит (Sneddon, Jan Naismith) 567*, 568*
Сондаус Карл (Sondhauss, Carl) 337
Соре Ж. Луи (Soret, J. Louis) 545
Спеддлинг Ф. Х. (Speddling, F. H.) 507
Стайнхарт Руфь (Stinehart, Ruth) 34*
Стрэдлинг Георг (Stradling, Georg) 148, 149, 180, 225, 226, 552
Стрейтц Х. (Streintz, H.) 463
Стрэтт Джон Уильям (Strutt, John William (3rd Baron Rayleigh)) 26, 235, 249, 355, 553, 564
Стокс Георг Габриэль (Stokes, George Gabriel) 110, 368, 378, 568*
Стюлл У. Н. (Stull, W. N.) 555
Сулливан Уильям (Sullivan, William) 543
Сэгюэн М. (Seguin, M.) 280, 283
Сэйр Мартимер Фримен (Sayre, Mortimer, Freeman) 4, 70, 176, 180—184, 212, 557—559

Таке Эдуард (Tacke, Eduard) 552
Такерман Луи Брайант (Tuckerman, Louis Bryant) 70, 176, 183, 184, 186, 559
Танака Т. (Tanaka T.) 497
Тарстон Роберт Генри (Thurston, Robert Henry) 131, 142, 154, 155, 354, 549, 568*
Тезар Чарльз (Tesar, Charles) 108
Темплин Р. Л. (Templin, R. L.) 497
Терквем О. (Terquem, O.) 94
Тиизеи Макс Фердинаид (Thiesen, Max Ferdinand) 476—478, 555
Тимошенко С. П. 10*, 15*, 34, 40, 46, 52, 165, 169, 216, 391, 395, 466, 489, 491, 556, 557, 561, 568*, 571*
Тиндол Джон (Tyndall, John) 249, 549
Тодхантер Исаак (Todhunter, Isaac) 9*, 10*, 15*, 33, 43, 94, 241, 249, 266, 341, 391, 462, 551, 552, 562, 568*
Томас Д. А. (Thomas, D. A.) 4, 193—195, 562
Томас Д. Е. (Thomas, D. E.) 435
Томас П. А. (Thomas, P. A.) 463
Томлинсон Герберт (Tomlinson, Herbert) 3, 12*, 70, 84, 137—140, 148, 149, 158, 159, 171, 172, 174, 176, 180, 216, 241, 305, 356, 379, 428, 463, 467, 471, 474, 528—530, 550, 551
Томпсон Джозеф Осгуд (Thompson, Joseph Osgood) 4, 70, 84, 87, 147—153, 156, 158, 159, 163, 165, 171, 172, 176, 180, 199, 202, 209, 216, 225, 528, 552, 571*
Томсен Джон С. (Thomsen, John S.) 81
Томсон, сэр Уильям (лорд Кельвин) (Thomson, Sir William (Lord Kelvin)) 3, 6, 9, 20, 94, 113, 123—125, 136—142, 148—150, 162, 174, 180, 181, 202, 205, 234, 241, 254, 255, 290, 346, 354, 357, 406, 462, 465, 466, 505, 517, 526, 528, 529, 532, 546, 547, 549, 550, 568*
Тредгольд Томас (Tredgold, Thomas) 51, 55, 254, 266, 281, 282, 284—286, 292, 311, 397, 539, 540, 542, 543
Трелоар (Трилор) Л. Р. Ж. (Treloar, L. R. G.) 533, 562, 578*
Треска Анри Эдуард (Tresca, Henri Édouard) 21, 22, 31, 114, 530, 546—549
Трусделл Клиффорд Амброуз (Truesdell, Clifford Ambrose) 2, 7*, 30, 33—35, 40, 91, 92, 157, 161, 215, 219, 220—222, 224—226, 250, 528, 537, 560—562, 564, 567*
Тсуан Ву Тинг (Tsuan Wu Ting) 568*
Турсунов Б. С. 19*
Тэйлор Д. Б. К. (Taylor, D. B. C.) 560
Тэйлор, сэр Джеффри Инграм (Taylor, Sir Geoffrey Ingram) 525, 557, 562
Тэйт Уильям (Tate, William) 537, 542

Уагстаф Джон Эдвард Претти (Wagstaff, John Edward Pretty) 425—427, 557
Уалш Эдвард К. (Walsh, Edward K.) 568*
Уарнок Ф. В. (Warnock, F. V.) 560
Уассмут (Wassmuth) 463
Уиллер М. А. (Wheeler, M. A.) 75, 551, 557
Уилкес Е. У. (Wilkes, E. W.) 568*
Уиллис Роберт (Willis, Robert) 544
Уиртс Дж. (Weerts, J.) 491, 557
Уиттмор Х. Л. (Whittemore, H. L.) 556
Уокер Генри (Walker, Henry) 318, 461, 472—474, 476, 555, 556
Уостер У. А. (Wooster, W. A.) 504
Урайт С. Дж. (Wright, S. J.) 497
Урен Кристофер (Wren, Sir Christopher) 215
Уроттеслей Джон (Wrottesley, John) 544

Файерстоуи Флойд Обурн (Firestone, Floyd Auburn) 455, 559
Файлои Луи Наполеон Георг (Filon, Louis Napoleon George) 324, 461, 557
Фаннинг Р. (Fanning, R.) 6, 428—431, 558
Фарадей Михаил (Faraday, Michael) 4, 15*, 290, 546
Фареигейт Габриэль Даниэль (Fahrenheit, Gabriel Daniel) 20
Фарреи У. С. (Farren, W. C.) 525, 557
Фаулер Джон (Fowler, John) 54
Фейербейри Уильям (Fairbairn, Willlam) 51, 55, 57, 58, 544
Фёрстер Фритц (Förster, Fritz) 493—495, 532, 558
Физо Ипполит Луи (Fizeau, Hippolyte Louis) 170, 349, 547, 555
Фикера Гаэтано (Fichera, Gaetano) 568*
Фнлби Гордои Лютер (Fllbey, Gordon Luther) 513
Фнтцджеральд Эдвии Р. (Fitzgerald, Edwin R.) 533, 563
Фишер Георг М. К. (Fischer, George M. C.) 568*
Фишер (Фридрих) Хуго Роберт (Fischer, (Friedrich) Hugo Robert) 3, 137, 142—144, 146, 147, 156, 550, 559
Флини Пол Д. (Flynn, Paul D.) 439, 561, 563
Флюгге С. (Flügge, S.) 2*, 7*, 10*, 567*
Фокс Георг (Fox, George) 441, 561
Фолькмаин Альфред Вильгельм (Volkmann, Alfred Wilhelm) 3, 101—103, 105, 108, 115, 179, 195—197, 230, 546, 570
Фохт (Фойгт) Вольдемар (Voigt, Woldemar) 5, 15*, 132, 162, 172, 241, 289, 290, 305, 331, 338, 356—359, 363, 368, 374, 412—414, 418, 423, 454, 455, 462, 463, 477, 503, 517—525, 529—533, 549—554, 556
Фраикевиль, граф де (Franqueville, Comte de) 553
Фраиклин Бенджамин (Franklin, Benjamin) 256
Фраунгофер Йозеф (Fraunhofer, Joseph) 453*
Фредерик Джулиаи Р. (Frederick, Julian R.) 455, 559
Фрейденталь Альфред М. (Freidenthal, Alfred M.) 567*, 568*
Френель Огюстеи Жаи (Fresnel, Augustin Jean) 453*, 454*
Фридель И. (Friedel, J.) 399
Фрохт М. М. (Frocht, M. M.) 439, 561
Фурье Жан Батист Жозеф (Fourier, Jean Baptiste Joseph) 442*
Фусс Пауль Генрих (Fuss, Paul Heinrich) 537
Фухс Клаус (Fuchs, Klaus) 491, 492, 558
Фуэс Эрвин (Fues, Erwin) 353, 558

Хаббард Марта (Hubbard, Martha) 34*
Хамель Георг (Hamel, Georg) 337
Хаммер (Hammer) 412
Хан Актар (Khan, Akhtar) 34*
Хансон Даниел (Hanson, Daniel) 75, 557
Хантингтон Хиллард Белл (Huntington, Hillard Bell) 455, 559
Хантсман (Hunstman) 286*, 347*
Харди Д. (Hardie, D.) 304, 564
Харт С. (Hart, S.) 304, 564
Хартиг Эрнст Карл (Hartig, Ernst Karl) 4, 135, 147, 153—158, 163, 165, 166, 169—172, 178, 180—182, 184, 190—192, 198, 199, 212, 552, 571*
Хартман Уильям Френсис (Hartman, William Francis) 34, 129, 206, 208, 512, 517, 563, 564
Хассенфратц (Hassenfratz) 257*
Хаузманиигер Виктор (Hausmaninger, Victor) 5, 413, 414, 417, 418, 420, 550
Хвольсои Орест Даиилович 33, 349, 368, 405, 462—464, 555
Хейзе Вильгельм (Heuse, Wilhelm) 477, 555
Хейнрихс Йозеф (Heinrichs, Joseph A.) 562
Хеиеман Фред (Heneman, Fred) 98
Хеииинг Фритц (Henning, Fritz) 477, 555
Херрмани Георг (Herrmann, George) 444, 560
Хирмон Р. Ф. С. (Hearmon R. F. S.) 185, 452, 456, 507, 519—522, 562—564
Хладии Эрист Флоренс (Chladni Ernst Florens) 4, 14*, 16*, 21, 26, 38, 78, 177, 224, 234, 235, 245—248, 250, 251, 256—259, 261—263, 268, 272, 278, 292, 295, 318, 337—339, 382, 383, 391, 401, 405, 406, 515, 516, 534, 538, 539, 573*
Ходкинсои Итои (Hodgkinson, Eaton) 3, 4, 22, 26, 43, 51—61, 63, 68, 70, 75, 82, 83, 110, 112, 113, 126, 154, 163, 164, 169, 176, 179, 180, 191—194, 202, 212, 223, 266, 271, 274, 298, 300, 395, 398, 539—545
Холбори Людвиг (Holborn, Ludwig) 477, 555
Холлман Брюс Ц. (Hollmann, Bruce Z.) 211, 564
Хонда К. (Honda, K.) 497
Хонеггер Е. (Honegger, E.) 489, 557
Хортон Франк (Horton, Frank) 463, 470, 554
Хьюджес Даррелл Стивен (Hughes, Darrell Stephen) 444—446, 455, 560
Хэвис Хью Реджинальд (Haweis, Hugh Reginald) 88, 553
Хэдфильд Роберт Асхольт (Hadfield, Robert Asholt) 463, 554

Цамминер (Zamminer) 546*
Цвиккер Корнелис (Zwikker, Cornelis) 343, 344, 561
Цельсий Андерс (Celsius, Anders) 20*, 72*, 478*, 483*
Ценер Кларенс (Zener, Clarence) 532, 560
Цёпприц Карл (Zöppritz, Karl) 395—398, 462, 547
Цуккер Чарльз (Zucker, Charls) 482—487, 504, 507, 561

Чалмерс Брюс (Chalmers, Bruce) 4, 70, 176, 192, 193, 199, 200, 557—559
Чиней Джеймс А. (Cheney, James A.) 459, 460, 564

Шарп Уильям Н. (Sharpe, William N.) 74, 563
Шевандье Жан Пьер (Chevandier, Jean Pierre) 318—323, 518, 543
Шеель Карл Франц Фредерик Христиан (Scheel, Karl Franz Friedrich Christian) 477, 555, 557
Шекспир Гильберт Ардеи (Shakespear, Gilbert Arden) 170, 389, 464, 466—469, 471, 474, 553
Шёттер Антон (Schötter, Anton) 94*
Шефер Клеменс (Schaefer, Clemens) 353, 368, 372, 373, 452, 463, 481, 554, 557, 558

Шимановски В. Т. (Szymanowski, W. T.) 352, 353, 559
Шлиереи (Schlieren) 453*, 454*
Шмидт П. (Schmidt, P.) 530
Шмулевич Якоб (Schmulewitsch, Jacob) 406—409, 547
Шнеебели Генрих (Schneebeli, Heinrich) 349, 414—418, 548
Шотт Фридрих Отто (Schott, Friedrich Otto) 376, 553
Штамбауг (Stambaugh) 533*
Штейи Альберт (Stein, Albert) 77, 562
Штейнер Якоб (Steiner, Jacob) 93*, 341*
Штрайнц Х. (Streintz, H.) 530
Штраубель Константин Рудольф (Straubel, Constantin Rudolph) 5, 21, 170, 372—379, 399, 466, 467, 554, 576*
Штромейер К. Е. (Stromeyer, C. E.) 381, 553
Штурм Жак Шарль Франсуа (Sturm, Jacques Charles François) 288, 318, 334—336, 541
Шулер Карл В. (Schuler, Karl W.) 568*
Шультц А. Б. (Schultz, A. B.) 564
Шюле Вильгельм (Schüle, Wilhelm) 4, 159—161, 163—166, 169, 554, 571*

Эверетт Джозеф Давид (Everett, Joseph David) 185, 234, 345, 346, 355, 357, 374, 387, 390, 488, 489, 547—549, 552
Эверетт Франклин Л. (Everett, Franklin L.) 387—391, 488, 489, 557, 559
Эдлуид Эрик (Edlund, Erik) 150, 527, 528, 547
Эйзенхарт Аделаида (Eisenhart, Adelaide) 34*
Эйиштейи Альберт (Einstein, Albert) 577*
Эксиер Франц (Exner, Franz) 5, 406—411, 549
Эйлер Леонард (Euler, Leonhard) 4, 26, 47, 49, 50, 52, 113, 189, 219, 220, 224, 250, 251, 255, 265, 268, 272, 273, 337, 562, 572*, 574*
Элбо Аниемари (Albaugh, Annemarie) 34*
Эмбер А. (Imbert, A.) 70, 157, 163, 550
Эриксеи-Джеральд (Ericksen, Jerald) 34*
д'Эстингсхаузен (d'Estingshausen) 291

Юнг Томас (Young, Thomas) 4, 15*, 16*, 82, 96, 113, 139, 144, 177, 192, 197, 218, 220, 249—257, 261, 267, 268, 278, 284, 285, 304, 318, 336, 343, 453, 454, 538—540, 553, 557, 558, 563, 574*

Якоби Карл Густав Яков (Jacobi, Karl Gustav Jacob) 93, 341
Яиг Дейна (Young, Dana) 533

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алюминий, первое определение модуля *E*. Aluminum, first measurement of the *E* modulus. *Aluminium, erste Messung des E-Moduls* 113

Аналогия между жидкостью и твердым телом. Fluid-solid analogy. *Analogie zwischen Flussigkeit und Festkorper* 332—336

Анизотропность. Anisotropy. *Anisotropie* 44, 305, 307, 321, 322, 328, 329, 337, 338, 341, 355, 454—458, 504, 505, 518—525

Аномалия Вертгейма. Wertheim's anomaly. *Wertheimsche Anomalie* 302, 303, 461, 469—474

— температурная растянутой резины, эффект Гафа. Thermal anomaly of stretched rubber, the Gough effect. *Thermische Anomalie von gedehntem Gummi, Goughsche effekt* 76, 77, 405—407, 411, 525

Аппарат Тредгольда. Tredgold's apparatus. *Tredgoldscher Apparat* 283—285

— экспериментальный Мусшенбрука. Musschenbroek, experimental apparatus of. *Musschenbroek, experimentelle Anordnungen von* 221—225

Аппроксимация линейная. Linear approximation. *Lineare Naherung* 214, 215

Арагонит. Aragonite. *Aragonit* 520, 521

Балка с поперечным сечением в виде равностороннего треугольника. Equilateral triangle beam. *Gleichseitiger Dreiecksbalke* 270, 271

— деревянная. Wooden beam. *Holzbalke* 43, 49—57

Барит. Baryta. *Scherspat* 518, 520

Бетон. Concrete. *Beton.* 196, 197

Бронза. Bronze. *Bronze* 142—144, 364, 365, 523—525

— фосфористая. Phosphor bronze. *Phosphorbronze* 142, 181, 182

Вена (cava) быка. Vena cava of an ox. *Vena cava einen Ochsen* 106, 109

Вес атомный и упругость. Atomic weight, elasticity and. *Atomgewicht, Elastizitat und* 289, 290, 305, 503, 504

Вибрация пластины, вторая и третья собственные формы колебаний. Vibrating plate, first and second mode frequencies of. *Schwingende Platte, erste und zweite Eigenfrequenzen der* 337, 338, 358, 360, 361

— стержней, глубокий тон. Deep tone of vibrating rods. *Tiefer Ton von schwingenden Stäben* 338—340.

—, теория Поххаммера — Кри. Vibrations, Pochhammer — Chree theory. *Swingungen Pochhamer—, Chreesche Theorie* 433, 435, 436, 439, 440

Вибрация, эксперимент Хладни. —, Chladni's experiment.—, *Chladnisches Experiment* 245, 246, 259—295, 338—340, 513—517

Висмут, вибрационный метод определения модуля упругости. Bismuth, modulus measured by vibration. *Wismut, Modulmessung durch Schwingung* 295, 296

Возврат упругий. Elastic recovery. *Elastische Erholung* 61—63, 108, 109, 123, 124, 148, 149, 166—170, 300, 302, 303, 369, 370, 393—395

Волна изгибная. Wave, flexural. *Welle, Biegungs* 435, 436

— нарастающая малой амплитуды в предварительно напряженном теле. Incremental wave in prestressed solids. *Überlagerte Well kleiner Amplitude in vorgespannten Festkörpern* 405, 406, 455—457, 521, 522

— отраженная. Wave, reflected. *Welle, reflektierte* 430, 431

— сдвиговая в воде. —, shear, in water. —, *scherungs, in Wasser* 335, 336

Волны стоячие в столбе жидкости. Standing waves in a liquid column. *Stehende Wellen in einer flussigen Säule* 332—334

Волос. Hair. *Haar* 101, 103, 105, 106, 108, 109, 228, 229

Вязкоупругость. Viscoelasticity. *Viscoelastizitat* 82, 114, 115, 233—240, 527—533

— нелинейная, —, nonlinear. —, *nichtlineare* 114, 115

Гипербола Дюпена для упругой линии в деревянной балке. Dupin's hyperbola for elastic line in wooden beam. *Dupinsche Hyperbel für die neutrale linie in Holzbalken* 49, 50

Гипотеза Стокса — Бока о зависимости коэффициента Пуассона от температуры. Stokes — Bock hypothesis on the temperature dependence of Poisson's ratio. *Stokes — Bocksche Hypothese zur Temperaturabhängigkeit vom Poissonschen Verhaltnis* 368—374, 378, 379

— упругого слоя при изучении удара стержней. Elastic layer hypothesis in impact of bars. *Hypothese der elastischen Grenzschlucht im Aufprall von Stäben* 412—414, 418, 419, 422, 423

Данные, относящиеся к низкой температуре. Low temperature data. *Tieftemperaturdaten* 479, 480, 491, 492, 504—509

Датчик тензометрический электрического сопротивления. Electric resistance strain gage. *Dehnungsmesser durch elektrischen*

Widerstand 428, 429, 433, 442—444, 446, 447
Декремент логарифмический колебаний. Logarithmic decrement and attenuation. *Logarithmische Dekrement und Dampfung* 237, 470, 471, 493—495, 502, 530—533
Демпфирование воздушное. Damping, air. *Dampfung durch Luft* 237—240, 393—395, 412—414, 533, 534
Дерево (древесина). Wood. *Holz.* 41, 42, 44, 45, 51, 54—57, 246—319
Дефект упругости. Elastic defect. *Elastischer Defekt* 57, 58, 94, 95, 110, 111, 139, 140, 173, 174, 192—194, 200—203
Деформация, измерение при помощи пьезокристалла. Piezo-crystal measurement of strain. *Piezokristall, Dehnungsmessungen mit* 437, 439, 440
— инфинитезимальная. Deformation infinitesimal. *Deformation infinitesimal* 69, 69, 164—176, 200, 210, 211, 457, 458
— конечная, прерывистая. Finite deformation, discontinuous. *Endliche Deformation, unstetig* 72—77
— микропластическая. Deformation microplastic. *Deformation microplastische* 51, 52, 55—59, 192—194, 200—203, 296—300
— неоднородная. — inhomogeneous. — *inhomogene* 340, 341, 523—525
— остаточная, ранние наблюдения. Permanent set early measurement of. *Bleibende Deformation, fruhe Messung der* 236, 237, 297, 299, 300, 301
— ползучести. Creep deformation. *Kriech-Deformation* 63—65
Диаграмма напряжение — деформация, первая количественная. Stress — strain behavior, first quantitative diagrams of. *Spannungs — Dehnungsverhalten, erste quantitative Diagramme des* 283
Диспергирование волны. Dispersion, wave. *Dispersion, Welle* 430, 431, 437, 440, 441, 444—447
Древесина, свойства упругости Elastic properties of wood. *Elastische Eigenschaften von Holz* 41—51, 54, 55, 215, 216, 246, 323

Единица измерения, имеющая местную, локальную, в географическом смысле область использования. Local units. *Lokale Einheiten* 91

Железо. Iron. *Eisen* 51, 52, 55—61, 63—69, 108—112, 124, 125, 133, 134, 138, 139, 151, 154, 164, 166, 169, 170, 180, 237, 246, 258, 259, 264—266, 272—274, 283—287, 358, 360, 361, 465—480
—, изотропность.— isotropy of.— *Isotropie von* 337, 338, 383—385, 523—525

Зависимость линейная параметров, характеризующих упругость, от процентного содержания компонентов, составляющих сплав. Linear relation between elasticity and composition of alloys. *Beziehung zwischen Elastizitat und Zusammensetzung von Legierungen* 311
— температурная постоянных упругости. Temperature depends of elastic constants. *Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten* 288—291, 368, 369, 386—391, 401, 402, 409—411, 460—505
Задача краевая, Boundary value problems. *Randwertprobleme* 26—28
Закон атомный Вертгейма. Wertheim's atomic law. *Wertheimsches Atomgesetz* 305—310, 501—503
— — Бюле. Bach — Schule law. *Bach — Schulesches Gesetz* 158—164, 166—170
— Вертгейма в фотоупругости. Wertheim's law in photoelasticity. *Wertheimsche Gesets in der Photoelastizität* 323—325
— Герстнера. Gerstner's law. *Gerstnersches Gesetz* 61—63, 156
— гиперболический. Hyperbolic law. *Hyperbolischer Gesetz* 47—49, 110, 164
— Гука. Hooke's law. *Hookesche Gesetz* 37—39, 108, 109, 138, 139, 214, 215
— —, его введение. — —, introduced. — —, *eigefuhrt* 214, 215
— —, неприменимость во всех случаях. — —, defect of. — —, *Unvollkommenheit* 139, 140, 173, 174
— —, опровержение его. — —, conteste. — —, *Bestreitung des* 63—65, 148, 149, 158, 159, 162—164, 166—170, 173, 174
— —, «отмена его».— —, «repeal» of. — —, *Widerruf des* 108, 109
— нелинейный Дюпена для дерева. Dupin's nonlinear law for wood. *Dupinsches nichtlineares Gesetz für Holz* 42—44, 47—49
— — Сэйра. Sayre's nonlinear law. *Sayresches nichtlineares Gesetz* 180
— Нельсена для красок и лаков. Nelson's law for paints and varnish. *Nelsonsches Gesetz fur Farben und Lacke* 177—180
— параболический Бернулли. Bernoulli's parabolic law. *Bernoullisches parabolisches Gesetz* 39, 40, 86—93, 110—112, 159, 160, 164, 166—173, 177—179
— показательный (см. Закон параболический Бернулли)
— Хартига. Hartig's law. *Hartigsches Gesets* 135—137, 152, 153, 155, 166—172, 180, 183—185, 190, 191, 200—203
— Ходкинсона нелинейный при растяжении и сжатии. Hodgkinson's nonlinear law for tension and compression. *Hodgkinsonsches nichtlineares Gesetz fur Zugspannung und Kompression* 57, 58, 110, 164, 191—194, 254
Затухание (колебаний). Attenuation. *Dampfung* 123, 124, 237, 393—395, 495, 502, 503, 527—534

Изгиб балок, квазистатический. Flexure of beams, quasi-static. *Balkenbiegung, quasistatisch* 45—63, 237—240, 251—256, 270—272, 283—287, 349—351, 373, 374
— —, теория Сен-Венана. — — —, Saint-Venant's theory of.—, *Saint-Venantsche Theorie der* 349—351
Изменение объема полых труб при растяжении. Volume change of hollow tubes in tension. *Volumänderung hohler Röhren und Zug* 326—328
— — при пластической деформации. — — in plastic deformation.— *in plastischer Deformation* 124, 125, 129, 130
Измерение перемещений, изменяющихся во времени. Displacementtime measurement. *Verschiebung-Zeit-Messungen* 431, 432, 444—451

Изотропность стекла. Isotropy of glass. *Isotropie von Glas* 337, 338, 356, 357
—, экспериментальное установление. —, measurement of. —, *Messung der* 337, 338, 357, 358, 383—385, 523—525
Импульс термический. Thermal pulse. *Thermischer Puls* 458, 459
Инерция поворота сечений при изгибе балок. Rotary inertia in flexure of beams. *Rotationsträgheit bei Biegung von Balken* 491, 492
Интерференция оптическая, использование в экспериментах Interference optics, experiments employing. *Inteferenzoptik, Experiment mit* 94, 95, 164—166, 199, 349—351, 371—375, 381—383, 451—453, 466—468
— —, картина колец, первое использование ее фотографирования. Interference ring pattern, first use of photography for. *Interferenz-Ringmuster, erste Benutzung der Photographie* 351
Интерферометр. Interferometer. *Interferometer* 164—170, 199, 373, 374, 381—383, 466—468
Испытание на растяжение с переходом в сжатие через нулевое значение напряжения. Tension test through zero stress to compression. *Dehnung-spannungsfreier Zustand-Kompression, Test mit* 191, 192
Испытательная машина Тарстона с автоматическим изображением диаграммы напряжений. Thurston's autographic testing machine. *Thurstons selbstschreibende Testmaschine* 142, 143, 153, 154
История нагружения кратковременного. Loading histories, short time. *Belastungsgeschichte, kurzzeitig* 457, 458
— термическая в процессе деформирования. Thermal histories during deformation. *Thermische Geschichte wärend einer Deformation* 76—81, 129, 130, 150, 526, 527
Источники литературные и иные. Sources. *Quellen* 33, 34

Камень. Stone. *Stein.* 45—47, 51, 52, 60, 129, 130, 196, 197, 225, 226
Канат пеньковый. Hamp rope. *Hanfseil* 91, 92
Капиллярность. Capillarity. *Kapillarität* 328, 329
Кишка, деформирование. Gut, deformation of. *Darm, Deformation von* 39, 40, 86—93
Колебания, определение при их помощи модуля висмута. Vibrations, modulus of bismuth measured by. *Vibrations, Modul von Wismut, gemessen mit* 295, 296
— пластин.— of plates. — *von Platten* 337, 338
— продольные и поперечные —, longitudinal vs transverse. —, *longitudinale und transversale* 295, 296
Комиссия королевская по железу. Royal Iron Commission. *Königlische Eisen-Kommission* 108, 109
Константы упругости анизотропных твердых тел. Elastic constants of anisotropic solids. *Elastische Konstanten von anisotropen Festkörpern* 305, 307
— —, зависимость их значений от температуры. — —, temperature dependence of. — —, *Temperaturabhängigkeit der* 460—505
— — и атомные объемы. — — and atomic volume. — — *und Atom volumen* 289—291, 305, 307, 388
— —, их определение. — —, measurement of. — —, *Messung der* 241, 242
Константы упругости, квантованное распределение значений. — —, quantized distribution of. — —, *gequantelte Verteilung der* 203—207, 505—518
— —, коэффициент зависимости от уровня давления. Pressure coefficients of elastic constants. *Druckkoeffizienten von elastischen Konstanten* 455—457, 521, 522
— —, коэффициенты сжатия. Elastic constants, pressure coefficients of. *Elastische Konstanten, Druckkoeffizienten* 455—457, 521, 522
— —, определение их ультразвуковым методом. — —, ultrasonic determination. — —, *Ultraschallbestimmung* 445, 451—458, 482—487
— —, — — значений Фухсом. Fuchs' calculation of elastic constants. *Fuchssche Berechnung der elastischen Konstanten* 492, 493.
— —, первое изучение зависимости от температуры. Elastic constants, first study of the temperature dependence of. *Elastische Konstanten, erste Untersuchung der Temperaturabhängigkeit* 289—291, 300
— —, сравнительное изучение. — —, comparative study of. — —, *vergleichende Untersuchung von* 289—291, 383—386, 400, 401, 480, 492, 493, 503—518, 523—525
— — третьего порядка (элементы тензоров третьего ранга). — —, third order. — —, *dritter Ordnung* 215, 216, 521—525
Кость, деформация. Bone, deformation of. Knochen, Devormation von 96, 98, 246
Коэффициент восстановления (упругости). Coefficient of restitution. *Erholungskoeffizient* 411, 412, 420, 421
— демпфирования. Damping coefficients. *Dämpfungskoeffizienten* 234, 237, 411—417, 493—495, 502
— линейного расширения. Coefficient of Expansion. *Ausdehnungskoeffizient* 476, 477
— Пуассона. Poisson's ratio. *Poissonsches Verhaltnis.* 127—129, 135—137, 187—190, 242, 243, 328, 329, 342—347, 349, 351—355, 358—363, 371—375, 379—384, 386, 387, 484, 485, 501, 503
— —, гипотеза Стокса — Бока. — —, Stokes — Bock hypothesis. — —, *Stokes — Bocksche Hypothese* 368—374, 378, 379
— —, зависимость от температуры. — —, temperature dependence of. — —, *Temperaturabhängigkeit* 368, 369, 386—392
— —, значение согласно теории Пуассона — Коши. — —, Poisson — Cauchy theory for. — —, *Poisson — Cauchysche Theorie für* 326, 328, 330, 331, 337, 338, 340, 349—351, 355—358, 360, 361
— —, метод Корню непосредственного определения. — —, Cornu's direct measurement. — —, *Cornus direkte Messung von* 278, 279, 349—353, 371—375
— —, связь этого понятия с работами Коши. — —, Cauchy relations. — —, *Cauchysche Beziehungen* 325, 326, 344, 362, 363
— —, эксперимент Кирхгофа. — —, Kirchhoff's experiment. — —, *Kirchhoffs Experiment* 344, 369, 386, 387
— температурного расширения. Thermal expansion coefficient of. *Thermische Ausdehnung, Koeffizienten der* 476, 477
Коэффициенты температурные, определение при помощи ультразвука. Themperature coefficients from ultrasonic measurement. *Temperaturkoeffizienten aus Ultraschallmessungen* 521, 522

Краски. Paints. *Farben* 177—179
Кривая упругая балок. Elastic curve of beams. *Elastische Kurve von Balken* 47—49, 55—57
Кривизна, главные радиусы. Curvature, principal radii of. *Hauptradien der Krummung* 349—355, 371—375, 378, 379
Кручение. Torsion. *Torsion.* 114, 115, 130—137, 141, 142, 227—240, 272—274, 332—334, 383—385, 392—393
—, исследование Кулона. —, studies of Coulomb. *Torsionstudien von Coulomb* 227—240
—, первая нелинейная зависимость между крутящим моментом и углом закручивания. —, first nonlinear relation between torque and twist. *Torsion, erste nichtlineare Beziehung zwischen Drehmoment und Drehwinkel* 274, 278
— труб прямоугольного поперечного сечения. — of rectangular tubes. — *rechteckiger Röhren* 133, 134, 272—274
— шелка. — of silk. — *von Seide* 230, 231

Лак. Varnish. *Lack* 177—179
Латунь. Brass. *Messing* 150—153, 170—172, 205—207, 231—237, 246, 255, 256, 311—315, 398, 400, 401, 418, 419, 506
—, изотропность. —, isotropy of. —, *Isotropie von* 337, 338, 525
—, коэффициент Пуассона. —, Poisson's ratio for. —, *Poissonsches Verhältnis für* 345, 346
Лед. Ice. *Eis* 251—253
Линия нейтральная. Invariable line (neutral line). *Unveranderliche Linie (neutrale Linie)* 42—44, 52—55, 264—266
Луч лазера. Laser beam. *Laserstrahl* 451—453, 458, 459

Машины испытательные жесткие. Hard testing machines. *Hartetest Maschinen* 176, 177
Медь. Copper. *Kupfer* 64, 65, 76, 77, 110—112, 150, 205—207
— бериллиевая, Beryllium copper. *Beryllium Kupfer* 185—187
Метод Мэллока определения модуля объемной деформации. Mallock's method for determining the bulk modulus. *Mallocksche Methode zur Bestimmung des Volumenmodul* 398—403
Методика Дэвиса определения перемещений при помощи электроемкостной техники. Davies capacitance displacement technique. *Davissche Kapazitätsverschiebungstechnik* 430—436, 445—451
Микродеформации, первое обнаружение. Microstrain, first resolution of. *Mikrodehnung, erste Auflösung von* 65—67
Микропластичность. Microplasticity. *Mikroplastizität* 51, 52, 55—59, 193—194, 200—202, 296, 298, 300
Микросейсмология. Microseismology. *Mikroseismologie* 444—451, 455—457
Модули адиабатический и изотермический. Moduli, adiabatic vs isothermal. *Moduln adiabetische und isoterme* 172, 173, 300, 302—304, 319—321, 381—383, 420, 421, 437—439, 454, 455, 484, 485
—, линейная зависимость от температуры. —, linear temperature dependence of. —, *lineare Temperaturabhängigkeit von* 300, 388, 391, 392, 468—476, 480, 485—487, 499, 500, 504, 505
— материала, начальный период экспериментального изучения. Material moduli, initial experimental study of. *Materialmoduln ursprüngliche experimentale Untersuchungen der* 220, 221
—, отношение по Риккати. *E* moduli, Riccati's ratio of. *E-Moduln Riccatisches Verhältnis der* 220, 221, 256, 257
—, уменьшение с ростом остаточной деформации. Moduli, decrease of with permanenter Deformation. *Moduln, Abnahme von, mit permanenter Deformation* 134, 135, 137, 138, 183—185
— *E* для 31 элемента как функции окружающей температуры. *E* moduli for 31 elements as a function of ambient temperature. *E-Moduln für* 31 *Elemente als Funktion der Umgebungstemperature* 495, 497—500, 501, 503
Модуль *E*, его вес. *E* modulus, weight of the. *E-Modul, Gewicht des* 250, 251
— —, — высота. — —, height of the. — —, *Höhe des* 82, 96, 143, 144, 250, 251
— —, определение понятия. — —, definition of. — —, *Definition des* 114, 115
— *касательный. Tangent modulus. Tangentenmodul* 134—137, 150, 152—154, 166, 169, 170, 180—183, 190
— —, определение понятия. — —, definition of. —, *Definition des* 152, 153
— —, переход второго порядка в его значении. — —, second-order transition in. —, *Übergänge zweiter Ordnung in* 509—518
— крутильной жесткости кварцевой нити. Modulus of torsional rigidity of quartz fibers. *Modul der Torsionssteifheit von Quarzfibern* 468—470
— объемной деформации. —, bulk. *Volumenmodul* 398—402, 477—479
— сдвига, квантованное распределение значений. Shear modulus quantized distribution of. *Schermodul, gequantelte Verteilung des* 203, 204, 485, 505—518
— — μ (0), зависимость значения от атомного номера. — — $\mu(0)$ vs atomic number. $\mu(0)$ *und Atomgewicht* 503, 504
— —, определение понятия. — —, definition of. — *Definition des* 124, 125
— —, открытие его Кулоном. — —, Coulomb's discovery of. — *Coulombsche Entdeckung des* 220, 221
— секущий, определение понятия. Modulus secant, definition of. *Sekanten modul, Definition des* 152, 153, 191
—, сравнение значений, определенных при продольных и поперечных колебаниях, —, comparison on longitudinal and transverse, measured by vibrations. *Modul, Vergleich von longitudinalem und transversalem gemessen mit Schwingungen* 295, 296
— упругости и когезия, влияние на них электрического и магнитного полей. Elastic modulus and cohesion, effect of electric current and magnetic fields upon. *Elastizitätsmodul und Kohäsion, Wirkung des elektrischen Stroms und der magnetischen Felder auf* 133—135, 137, 138, 311—313, 428, 429
— —, первое определение значения μ, выполненное Кулоном. — —, first measurement of μ by Coulomb. —, *erste Messung von* μ *durch Coulomb* 233, 234
— — при сдвиге, зависимость значения от уровня напряжения. — shear moduli, variation with stress. *Elastischer Schermo-*

dul, Veränderung bei Spannung 134, 135, 139, 140, 180—185, 191
— — — —, квантованное распределение значений. — — —, quantized distribution of. — —, *gequantelte Verteilung des* 397—400, 406
— — — —, первое его определение. — —, first measurement of. — —, *erste Messung des* 233, 234
— Эйлера. Euler modulus. *Eulermodul* 220, 221, 251—253
— Юнга. Modulus, Young's *Modul, Youngsches* 249, 250
Монокристалл свинца. Single crystals, lead. *Einkristalle, Blei* 199
Монокристаллы, эксперименты с ними. — —, experiment on. —, *Experimente mit* 454, 455, 517—525
Мультимодульность из экспериментальных наблюдений XIX века. Multiple elasticities from the 19th century. *Multiple Elastizitaten aus dem* 19. *Jahrhundert* 513, 517
— (множественность значений одного и того же модуля) (мультиупругость). Multiple elasticities. *Multiple Elastizitäten* 205—207, 234, 235, 263, 264, 271, 272, 405, 406, 509—517
Мышца лягушки. Frog muscle. *Froschmuskel* 101—108, 194—196

Нагружение взрывное. Loading, explosive. *Belastung, explosive* 431, 432, 445, 446, 458, 459
— импульсом от взрыва. — — pulse. — *mit explosivem Impuls* 458, 459
— мертвой нагрузкой. —, dead weight. — — *Konstanten Gewicht* 176, 177, 203, 204, 244, 245, 509—513
— ударное давлением из трубы в результате разрушения диафрагмы в ней —, stock tube. —, *Stoßrohr* 440, 444
— циклическое. Cyclical loading. *Ziklische Belastung* 59—63, 107, 108, 143—146, 173, 174, 200, 205—207, 295, 296, 298, 300, 391, 392, 468—470
Намагничивание. Magnetisation. *Magnetisierung* 133, 134
Напряжение истинное. Stress true. *Spannung wahre* 187—190
— Кошн. —, Cauchy. —, *Cauchysche* 183
— номинальное. — nominal. — *nominale* 187—190
— переменное. — alternating. — *alternierende* 59, 60—63, 142—144, 296, 298, 300
— Пнола — Кирхгофа. —, Piola — Kirchhoff. —, *Piola — Kirchhoffsche* 183
Независимость при экспериментальном определении E, μ и ν. Independent measurement of E, μ and ν. *Unabhängige Messung von* E, μ *und* ν 379—386

Олово «плачущее». Weeping tin. *Kreischen von Zinn* 288, 289
Определение констант упругости при помощи ультразвукового метода. Ultrasonic determination of elastic constants. *Ultraschall bestimmung der elastischen Konstanten* 445, 451—453, 482—484, 521, 522
— коэффициента Пуассона при помощи ультразвуковой дифракции.— diffraction determination of Poisson's ratio. —, *Bestimmung des Poissonschen Verhaltnisses* 351—353
Опыты сейсмологического типа, раннее рассмотрение. Seismological measurement, early consideration. *Seismologische Messungen, fruhe Betrachtung von* 338—340
Отверстие концевое трубы. Embouchure. *Mündung* 336
Отклик волокна и всей мышцы. Response of fiber and whole muscle. *Antwortfunction von Fasern und Muskeln* 194—196
— по Ходкинсону, нелинейный при изгибе. Hodgkinson's nonlinear response in flexure. *Hodgkinsonsche nichtlineare Wirkung bei Biegung* 55—57
Отношение двух главных кривизн. Ratio of the two principal curvatures. *Verhaltnis der Hauptkrümmungen* 349—355, 371—375, 379, 380
— значений E модуля по Риккати. Riccati's ratio of E moduli. *Riccatisches Verhaltnis der E-Moduln* 220, 221, 256, 267
— постоянных Ламе. Lame constants, ratio of. *Lame-Konstanten Verhaltnis der* 358—361, 363—365

Парадокс Дюамеля. Duhamel's paradox. *Duhamelsches Paradoxen* 42—44
Перемещение, определение при помощи емкостной техники Дэвиса. Capacitance displacment technique of Davies. *Kapazitäts Verschiebungstechnik von Davis* 430—436, 445—450
Перемещения, вызванные сдвигом при поперечных колебаниях. Deflection due to shear in transverse vibration. *Ablenkung wegen Scherung in transversaler Schwingung* 491, 492
Переходы второго порядка. Transitions, second-order. *Übergänge, zweiter Ordnung* 205—207, 517, 519
Песчаник. Sandstone. *Sandstein* 124, 125, 129, 130
Петля гистерезиса. Hysteresis loops. *Hystereseschleifen* 143—146, 173, 174
Пирит. Pyrites. *Pyrite* 520, 521
Пластичность, эксперименты Кулона. Plasticity, Coulomb's experiments in. *Plastizitat, Colombsche Experimente zur* 234, 235
Платиновое серебро. Platinum-silver. *Platin-Silber* 138, 139
Поведение деформационное смесей. Mixtures, deformation behavior of. *Mischungen, Deformationsverhalten* 305, 307, 501, 503
Полемика Вертгейма. Wertheim controversy. *Wertheimsche Kontroverse* 340, 341.
Ползучесть обратная (восстановление). Creep, recoverable. *Kriechen, wiedergewinnbar* 199
Полимеры. Polymers. *Polymere* 532, 533
Последействие термическое. Thermal after-effekt. *Thermische Nachwirkungseffekt* 69—71, 148, 149, 169—172, 205—207, 525—529
— упругое. Elastic after-effekt. *Elastischer Nachwirkungseffekt* 69—71, 76, 77, 82—84, 105, 106, 108, 109, 117—120, 123, 124, 143—146, 148—160, 168, 169, 170, 199, 300—303, 369, 370, 378, 379, 393—395, 401, 402
Потеря устойчивости при сжатии. Compression buckling. *Kompression, Knicken bei* 221—224, 271, 272
Правило Галилея. Galileo's rule. *Galileoshe Regel* 44, 45, 51, 52
Превращения (переходы) полиморфные. Transitions, polymorphic. *Ü bergänge, po lymorphe* 495

Предел упругости. Elastic limit. *Elasctische Grenze* 130, 131, 234,235, 296—300, 303, 304
Предположение Шмулевича о природе эффекта Гафа. Schmulewitsch's conjecture on the Gough effect. *Schmulewitschs Verschlag zum Gougheffekt* 406—411
Предыстория термическая и механническая. Prior thermal and mechanical history. *Thermische und mechanische Vorbehandlung* 142, 143, 172, 203, 204, 237—242, 244, 245, 271, 272, 283, 284, 300, 318, 319, 346, 347, 349, 369, 370, 388, 464, 465
Прерывистость деформирования, эксперимент МакРейнольдса. Discontinuous deformation, McReynolds' experiment. *Unstetige Deformation, McReynoldssches Experiment* 72—74
Принцип Сен-Венана. Saint-Venant's principle. *Saint-Venantsche Prinzip* 349—351, 357, 358, 450, 451
Пробка. Cork. *Kork*, 158, 159
Проволока телеграфная, распространенне в ней волн. Telegraph wires, wave propagation in. *Telegraphendrahte, Wellenfortpflanzung in* 403
Прогнб балки, вызванный сдвигом. Shear, deflection due to, in flexure of beams. *Scherung, Ablenkung durch, in Balkenbiegung* 491, 492
Продолжнтельность контакта (см. также Удар, продолжительность контакта. Impact, duration of. *Aufprall, Dauer des*) 65—67, 422, 425—428
— —, методнка Пуйе. Time of contact, Pouillet's technique. *Kontaktzeit, Pouilletsche Methode* 414, 415, 417, 420, 421, 425, 426
— —, теория Герца. — — —, Hertz's theory of. —, *Hertzsche Theorie der* 164—166, 412—414, 418, 419
Профиль волны в опытах со стержнем Гопкинсона. Wave profiles from the Hopkinson bar experiment. *Wellenprofil aus Hopkinsonschem Stab-Experiment* 423—425
— — — эксперименте Больцмана. — — in the Boltzmann experiment. — *im Boltzmannschen Experiment* 428, 429
— (очертанне нмпульса). Pulse profiles. *Pulsprofile* 430, 431, 458, 459
Пружина часовая, Watch spring. *Uhrfeder* 214, 289
Пьезометр, нспользование для определення модуля объемной деформацни методом Мэллока. Piezometer, «Mallock method» for measuring the bulk modulus using. *Piezometer, Benutzung bei der «Mallockschen Methode» zur Volumen-Modul-Messung* 398—401, 477—479
— сферический. —, spherical. —, *kugelformig* 332, 363—369
— цилиндрический стеклянный. —, cylindrical glass. —, *zylindrisches Glas* 326—332, 398—403, 477—479

Размерность (проблемы). Dimensionality. *Dimensionszahl* 23—25
Разрушение. Rupture. *Bruch* 26—28, 36, 37, 44, 45, 96, 225, 250, 251, 308—310, 313, 318, 361, 362
—, сравнение его в условиях растяжения и сдвига, выполненное Кулоном в 1773 г. —, Coulomb's comparisons in 1773 of repture in tension with repture in shear. —, *Coulombscher Vergleich von Bruch in Zugversuch und Bruch im Scherversuch* 225, 226
Распределение квантованное значений констант упругости. Quantized distribution of elastic constants. *Quantisierte Verteilung der elastischen Konstanten* 205, 405, 406, 505—518
— — — модуля упругости при сдвиге. — — — — shear moduli. — — — — *Schermoduln* 505—511, 517, 518
Распространение волн в резине. Wave propagation in rubber. *Wellenfortpflanzung in Gummi* 405—411
— — одномерных. — —, one-dimensional. —, *eindimensional* 403—453
Раствор известковый. Mortar, *Mortel* 196, 197
Расширение. Dilatation. *Dilatation* 129, 130, 325, 326, 363—365, 385, 386, 398—400, 503, 504
Резина. Rubber. *Gummi* 76, 77, 88, 89, 157, 164, 325, 326, 362, 363, 405, 406
—, деформацня растяжения. —, tensile deformation.— *Zugdeformation von* 88, 89, 157, 164
— индийская, коэффицнент Пуассона. India rubber, Poisson's ratio for. —, *Poissonsches Verhältnis für* 325, 326, 362, 363
—, распространение в ней волн.— Rubber, wave propagation in. —, *Wellenfortpflanzung* 405, 412
—, сжнмаемость. —, compressibility of. —, *Kompressibilität von* 326, 362, 363
Резонанс материала. Material resonans. *Materielle Resonazen* 533, 534
Результаты экспериментов с алюминнем. Experimental results for aluminum. *Experimentelle Ergebnisse für aluminium* 72—76, 180—183, 192—194, 200, 205, 344, 383—386, 403, 422, 426, 428, 444—445, 450—451, 459, 460, 467—480, 485,—487, 492, 493, 495—500, 503—505, 517, 518, 525
— — барнем. — — — barlum. — — — *barlum* 496—500
— — — бернллиевой медью. — — — beryllium copper. — — — *Beryllium—Kupfer* 187, 190—192
— — — бернллием. — — — beryllium. — — — *Beryllium* 496, 498—500, 506
— — — бетоном. — — — concrete. — — — *Beton* 159—161, 198, 199
— — — бронзой. — — — Bronze. — — — *Bronze* 517, 518, 525
— — — ванадием. — — — vanadium. — — — *Vanadium* 496, 503, 504
— — — висмутом. — — — bismith. — — — *Wismut* 296—300, 344, 384, 386, 477—479, 495—498, 517, 518, 525
— — — волосом. — — — hair. — — — *Haar* 101, 108, 109, 229
— — — вольфрамом. — — — tungsten. — — — *Wolfram* 496, 498, 499, 506
— — — галлием. — — — gallium. — — — *Gallium* 406, 503, 504
— — — гафнием. — — — hafnium. — — — *Hafnium* 406, 503, 504
— — — германнем. — — — germanium. — — — *Germanium* 406, 503, 504
— — — двойными сплавамн. — — — binary alloys. — — — *binare Legierungen* 225, 226, 307, 311, 314—316
— — — дельта-металлом. — — — delta metal. — — — *Delta-metall* 366, 368
— — — древесиной. — — — wood. — — — *Holz* 47—51, 246, 250, 251, 323, 355
— — — железом. — — — iron. — — — *Eisen* 57—59, 61, 65—72, 79—81, 110, 129, 130, 134—139, 141—143, 153—155, 159—161, 170—173, 191, 192, 205, 225, 226, 231, 252, 236, 237, 246—251, 261, 270, 271,

274—276, 273, 283, 287, 295, 297, 299, 300, 306, 308, 309, 313—318, 332—334, 344, 370, 383—386, 398, 403, 465, 466, 479, 480, 489, 495, 496, 498, 499, 501, 511, 512, 517, 518, 525
— — — золотом. — — — gold. — — — *Gold* 141, 142, 300, 306, 308, 310, 313—318, 344, 383—386, 398, 492, 493, 495—500, 504, 505
— — — индием. — — — indium. — — — *Indium* 477—479, 498, 499, 506
— — — иридием. — — — iridium. — — — *Iridium* 477—479, 496, 498, 499, 506
— — — кадмием. — — — cadmium. — — — *Kadmium* 300, 306, 344, 385, 986, 495, 496, 506, 509, 517, 518, 525
— — — калием. — — — potassium. — — — *Potassium* 496, 504
— — — кальцием. — — — calcium. — — — *Kalzium* 496—500, 506—509
— — — каменной солью. — — — rock-salt. — — — *Steinsalz* 454, 455
— — — камнем (гранитом). — — — stone (granite). — — — *Stein (Granite)* 159, 160
— — — картоном. — — — cardboard. — — — *Pappe* 355
— — — кварцем. — — — quartz, — — — *Quartz* 246
— — — китовым усом. — — — whalebone. — — — *Walfischbein* 246
— — — кишкой. — — — gut. — — — *Darm* 40, 41, 89—91
— — — кобальтом. — — — cobalt. — — — *Kobalt* 344, 474, 496, 498, 499, 502, 506
— — — кожей. — — — leather. — — — *Leder* 157, 161
— — — константаном. — — — constantan. — — — *Konstantan* 383—386
— — — красками и лаками. — — — paints and varnishes. — — — *Farben und Lacke* 180
— — — лантаном. — — — lanthanium. — — — *Lanthan* 496—500, 506, 509
— — — латунью — — — brass. — — — *Messing* 123, 124, 142, 143, 150—153, 170—172, 183—185, 205—207, 225, 226, 231, 237, 246, 248—251, 283, 287, 296, 298, 300, 308—310, 328, 329, 332—334, 355, 366, 368, 383—386, 398, 400, 401, 417—421, 426, 428, 445, 465, 466, 517, 518, 525
— — — литием. — — — lithium. — — — *Lithium* 496, 503, 504
— — — льдом. — — — ice. — — — *Eis* 250, 251
— — — магнием. — — — magnesiu, — — — *Magnesium* 344, 439—444, 495, 498, 502, 504, 505, 517, 518, 525
— — — манганином. — — — manganin. — — — *Manganin* 383—386
— — — марганцем. — — — manganese. — *Mangan* 496—499, 502
— — — медью — — — copper. — — — *Kupfer* 79—81, 138, 139, 142, 143, 151—153, 159, 161, 170—174, 194, 205, 246, 248—251, 287, 295—297, 299, 300, 306, 308—310, 313, 317, 318, 344, 355, 366, 368, 383—385, 398, 400, 401, 403, 417, 422, 465, 466, 468, 470, 474—476, 479, 480, 492, 493, 495—505, 517, 518, 525
— — — молибденом. — — — molybdenu, — — — *Molubdan* 495, 498—500, 506
— — — натрием. — — — sodium. — — — *Natrium* 496, 503, 504
— — — никелем. — — — nickel. — — — *Nickel* 344, 383—386, 477—479, 495, 498, 499, 504, 505, 517, 518, 525
Результаты экспериментов с инобнем. — — — niobium. — — — *Niob* 496, 503, 504
— — — гипсом. — — — plaster of Paris. — — — *gebrannter Gips* 355
— — — оловом. — — — tin. — — — *Zinn* 246—251, 287, 300, 344, 385, 386, 403, 417, 479, 480, 495—500, 517, 518, 525
— — — палладием. — — — palladium. — — — *Palladium* 300, 306, 344, 383, 386, 477, 479, 496, 498—500
— — — платиной. — — — platinum. — — — *Platin* 79—81, 300, 306, 308—310, 383—385, 403, 479, 480, 496, 498—500
— — — плексигласом. — — — lucite. — — — *Lutetium* 445
— — — пробкой. — — — cork. — — — *Kork* 158, 365
— — — резиной (каучуком). — — — rubber. — — — *Kautschuk* 158, 180, 326, 355, 408—412
— — — рением. — — — rhenium. — — — *Rhenium* 496, 503, 504
— — — родием. — — — rhodium. — — — *Rhodium* 344
— — — ртутью. — — — mercury. — *Quecksilber* 250, 251, 496
— — — рубидием. — — — rubidium. — — — *Rubidium* 496, 498, 499
— — — рутением. — — — ruthenium. — — — *Ruthenium* 496, 503, 504
— — — свинцом. — — — lead. — — — *Blei* 199, 200, 283, 287, 300, 306, 344, 355, 366, 368, 385, 386, 403, 417, 477—480, 492, 493, 495—500, 503—505, 517
— — — серебром. — — — silver. — — — *Silber* 79, 81, 141, 142, 170—172, 246, 248—251, 295, 300, 306, 308—310, 314—316, 344, 371, 383—386, 398, 403, 417, 479, 480, 495—505, 517, 518, 525
— — — силицием. — — — silicon. — — — *Silizium* 496, 503, 504
— — — слоновой костью. — — — ivory. — — — *Elfenbein* 355
— — — сталью. — — — steel. — — — *Stahl* 63, 141, 142, 151—153, 170—172, 180—183, 240, 250, 251, 269—272, 283, 285, 287—289, 296—300, 306—311, 313—318, 332—334, 348, 355, 361—362, 366—370, 383—386, 388, 389, 391, 392, 398—401, 417, 420—422, 426—428, 435—439, 445, 471, 472, 489, 512, 513, 517, 518, 525
— — — стеклом. — — — glass. — — — *Glas* 115—117, 119—123, 246, 250, 251, 319, 321, 322, 330, 331, 351, 359, 366, 368, 375—378, 417, 418
— — — стронцием. — — — strontium. — — — *Strontium* 388, 395
— — — сурьмой. — — — antimony. — — — *Antimon* 296—298, 344, 495, 497, 498
— — — таллием. — — — thallium. — — — *Thallium* 496—498, 503, 504, 506, 509
— — — танталом. — — — tantalum. — — — *Tantal* 344, 496, 498—500, 506
— — — теллуром. — — — tellurium. — — — *Tellur* 344
— — — титаном. — — — titanum. — — — *Titan* 496, 498, 506
— — — тканями человеческого тела (артериями). — — — human body tissues (arteries). — — — *mensches Gewebe (Arterien)* 96, 98, 99, 101
— — — — — (венами). — — — — — (veins). — — — — — *(Adern)* 96, 101
— — — — — (костями). — — — — — (bones). — — — — — *(Knochen)* 96

Результаты экспериментов с тканями человеческого тела (мышцами). — — — — — — (muscles). — — — — — — *(Muskeln)* 96—101, 105—108, 196, 197
— — — — — — (нервами). — — — — — — (nerves). — — — — — — *(Nerven)* 96—103
— — — — — — (сухожилиями). — — — — — — (tendous). — — — — — — *(Sehnen)* 96—103
— — — топазом. — — — topaz. — — — *Topas* 454
— — — торием. — — — thorium. — — — *Thorium* 496, 499, 500, 506
— — — тройными сплавами. — — — tertiary alloys. — — — *tertiäre Legierungen* 308—310
— — — фосфористой бронзой. — — — phosphor bronze. — — — *Phosphorbronze* 143, 144, 156, 180
— — — хромом. — — — chromium. — — — *Chrom* 344, 496, 503, 504
— — — хрусталем. — — — crystal. — — — *Kristall* 319, 328, 329
— — — цезием. — — — cesium. — — — *Caesium* 496, 503, 504
— — — цементным раствором. — — — cement-plaster. — *Zementputz* 159, 160
— — — цементом. — — — cement. — — — *Zement* 159, 161
— — — цинком. — — — zinc. — — — *Zink* 287, 295, 296, 300, 306, 344, 355, 398, 417, 495, 500, 517, 518, 525
— — — цирконием. — — — zirconium. — — — *Zirkonium* 496, 498, 499, 506
— — — шелком. — — — silk. — — — *Seife* 82, 84—86, 101, 144—146
Релаксация напряжений. Stress relaxation. *Spannungsrelaxation* 114, 115
Рычаг Фейербейрна. Fairbairn's lever. *Fairbairnscher Hebel*, 57, 58

Свинец. Lead. *Blei* 63—65, 199, 258, 259, 300, 496, 509, 517
Селен. Selenium. *Selen* 371—373
Серебро. Silver. *Silber* 79, 150, 152, 153, 170—172, 250, 251, 295, 398, 479, 480, 495—498, 506
— немецкое. German silver. *Neusilber* 138, 139
Сжатие, опыты при одноосном растяжении, переходящем в одноосное сжатие через нулевое значение напряжения. Compression, axial test in tension through zero stress to compression. *Kompression, axialer Test: Zugspannung spannungsfreir Zustand-Kompression* 191, 192
— первый эксперимент. —, first experiment in. —, *erstes Experiment mit* 124, 125, 271, 272
Сжимаемость. Compressibility. *Kompressibilität* 124—130, 325, 326, 362—369, 398—400.
— абсолютная. —, absolute. —, *absolute* 365, 366
— жидкой ртути. Liquid mercury, compressibility of. *Flussiges Quecksilber, Kompressibilität des* 365, 366
— объемная. compressibility cubic. *Kompressibilität kubische* 363—365, 398—400
— при гидростатическом давлении в зависимости от атомного веса. —, hydrostatic, atomic dependence of. —, *hydrostatische, Abhängigkeit vom Atomgewicht* 503, 504
— твердых тел как функция температуры. — of solids as a function of temperature. — *von Festkörpern als Funktion der Temperatur* 477—480, 521, 522
Скорости фазовая и групповая. Velocities, phase and group. *Geschwindigkeiten, Phasen und Gruppen* 433
Скорость волны дилатационной. Wave speed, dilatational. *Wellengeschwindigkeit, einer Dilatationswelle* 300—303, 335, 336, 445, 451—453.
— звука в воде, эксперименты Кантоне.— Velocity of sound in water, Canton's experiment. *Geschwindigkeit des Schalls im Wasser, Cantonsche Experimente* 251—253
— — — столбе жидкости. — — — — a column of water. — — — *in einer Wassersäule* 334
— —, первое непосредственное определение при прохождении через твердое тело. — — —, first direct measurement in a solids. — — —, *erste direkte Messung in einem Festkörper* 258, 259
Соль каменная. Rocksalt. *Steinsalz* 454, 455, 518—520
Соударение осевое стержней. Axial collision of rods. *Axialer Aufprall von Stäben* 411—453.
— — стержня со сферой. — — — a bar with a sphere. — — *eines Stabes auf eine Kugel* 415—417, 437
Сплав Вуда. Wood's alloy. *Woodsche Legierung* 371—373
— Липовитца. Lipowitz's alloy. *Lipowitzsche Legierung* 371—373
Сплавы двойные. Alloys, binary. *Legierungen, binäre* 205—207, 305—313, 499, 500, 530—533
— медн. —, copper. —, *Kupfer* 183
—, первое исследование их деформации. —, first study of the deformation of. —, *erste Untersuchung der Deformation von* 305—313
— тройные. —, tertiary.—, *tertiäre* 305—313
Способность разрешающая при измерении осевой деформации. Strain resolution. *Dehnungsauflösung* 68, 69, 174, 175, 180, 200—203, 210, 211
Сталь. Steel. *Stahl* 61—63, 124, 125, 129, 130, 133, 134, 141, 142, 150—153, 170—172, 180—183, 237—240, 250, 251, 283, 289, 346—349, 358—361, 386—391, 400, 401, 420, 421, 426, 428, 435, 436, 512, 513
—, коэффициент Пуассона. —, Palsson's ratio for. —, *Poissonscher Verhältnis für* 345, 346, 361, 362, 386—391
— литая, поперечная и продольная вибрация образцов. Cast steel, longitudinal and transverse vibrations in. *Gußeisen, longitudinale und transversale Schwingungen in* 295—334
— Хантсмана. Huntsman steel. *Huntsman-Stahl* 285—287, 346—349
Стекло. Class. *Glas* 114, 115, 126, 127, 133, 134, 318, 319, 337, 338, 349—351, 356, 357, 373, 374, 417, 418
—, изотропность —, isotropy of. —, *Isotropie des* 337, 338, 356, 357
—, коэффициент Пуассона. —, Poisson's ratio. —, *Poissonsches Verhältnis für* 328, 329, 345, 346, 349—351, 365, 366, 375—378
— Сен Гобен. Saint-Gobain glass. *Saint-Gobain Glas* 349—351
Стержень Гопкинсона сжатый. Hopkinson pressure bar. *Hopkinsonscher Druckstab* 423—426, 431, 432

Струна виолончельная. Violoncello string. *Violoncellosaite* 91
— гитары. Guitar string. *Gittarrensaite* 91—93
— фортепианная стальная. Steel piano wire. *Stahlsaiten für Klaviere* 61—63
Сурьма, модуль, определенный в вибрационных опытах. Antimony, modulus measured by vibration. *Antimon, Modul gemessen durch Schwingungen* 295, 296

Тело твердое устойчивое. Stabile solids. *Stabile Festkörper* 205—207
Температура, зависимость от нее сжимаемости твердых тел. Temperature, compressibility of solids as a function of. *Temperatur, Kompressilbilität von Festkörpern als Funktion der* 477—480
—, первое исследование ее влияния на константы упругости. —, first study of effect upon elastic constants.—, *erste Untersuchung der Wirkung auf elastische Konstanten* 289—291, 300
— сходственная (гомологическая). Fractional melting point temperature. *Verhältnis der Umgebungstemperatur zur Schmelztemperatur* 484, 485, 501, 522
— — —, определение понятия. — — — —, definition of. — — — — — *Definition des* 505—508
Теория Сен-Венана кручения стержней. Saint-Venant's theory of torsion. *Saint-Venantsche Torsionstheorie* 131—133, 272—274
— — удара о стержень. — — — rod impact. — *Theorie des Aufpralls von Staben* 411—414, 418—421, 428
— Скэлака соударения стержней. Skalak theory of impacting rods. *Skalaksche Theorie von aufprallenden Stäben* 435, 436, 439—444
— смежная, конкурирующая. Adjacent theory. *Rivalisierende Theorie* 23—25
Теплоемкость удельная. Specific heats. *Spezifische Wärmen* 69—71, 79, 81, 124, 139, 140, 173, 300—304, 420, 421, 476, 477, 487—489
Теплота плавления скрытая. Latent heats of fusion. *Latente Wärme der Verschmelzung* 526, 527
Термопластичность. Thermoplasticity. *Thermoplastizität* 129, 130
Термоупругость. Thermoelasticity. *Thermoelastizität* 76, 77, 150, 525—529
—, эксперименты Джоуля. —, Joule's experiments. —, *Joulesche Experimente* 525
Ткани органические, деформация. Organic tissue, deformation of. *Organisches Gewebe, Deformation von* 93—109, 164, 194—196, 229
— —, закон Вертгейма. — —, Wertheim's law for. — —, *Wertheimsches Gesetz für* 96—105
— человека, упругие свойства. Human tissue, elastic properties of. *Menschliches Gewebe, elastische Eigenschaften des* 91—101, 323—325
Топаз. Topaz. *Topas* 518—520
Точка Кюри. Curie point. *Curie-Punkt* 495
— нейтральная термическая у резины. Neutral point, thermal, in rubber. *Neutraler Punkt, thermischer in Gummi* 406—411
Труба водопроводная, распространение волн в ней. Water pipes, wave propagation in. *Wasserrohren, Wellenfortpflanzung in* 258, 259

Удар, продолжительность. Impact, duration of. *Aufprall, Dauer des* 415—428
—, симметричный при свободном полете. —, symmetrical free flight. —, *symmetrisch in freien Flug* 417—430
— стержней, характер протекания как функция радиусов. — of bars as a function of the radius. — *von Stäben als Funktion des Radius* 418, 419, 426—428
— сферы о стержень. — of spheres on rods. — *von Kugeln auf Stäbe* 415—417, 431, 432, 437, 458, 459
—, теория Герца. —, Hertz's theory of. —, *Hertzsche Theorie des* 412—414, 417—423, 425, 426, 429, 430
Упругость, гиперболический закон. Elasticity, hyperbolic law of. *Elastizität, hyperbolisches Gesetz der* 110, 164
—, зависимость от плотности. —, density dependence of. —, *Dichteabhängigkeit von* 250, 251, 303, 304
— и атомный вес. — and atomic weight.— *und Atomgewicht* 289—291, 503, 504 (см. Константы упругости и атомный объем)
— квазистатическая линейная, первое экспериментальное кручение. Quasi-static linear elasticity, first experimental study of. *Quasi-statische lineare Elastizitätstheorie, erste experimentelle Untersuchung der* 266, 267
— конечная резины. Elasticity, finite, of rubber. *Elastizität, endliche, von Gummi* 164, 325, 326, 406, 407
— максимальная. —, maximum. — *maximale* 144—146
— несовершенная. —, imperfect. —, *imperfekte* 362, 363
—, первый нелинейный закон. —, first nonlinear law of. —, *erstes nichtlineares Gesetz der* 39, 40
Устойчивость остаточной деформации. Stability of permanent deformation. *Stabilität der permanenten Deformation* 63—65, 69—71, 76, 129, 130

Формула Эйлера для критической силы. Euler's buckling formula. *Eulersche Knickformel* 221—224, 264—268, 271, 272
Фотоупругость. Photoelasticity. *Photoelastizität* 94, 95, 133, 134, 323—325, 438, 439
Функция напряжение — деформация нелинейная, табулированная в конце XIX века. Stress — strain function, a nonlinear late 19th century tabulation of. *Spannungs — Dehnungsfunction, eine nichtlineare Tabulierung von spaten* 19. *Jahrhundert* 162—164
— отклика нелинейная: закон гиперболический Кокса для железа. Nonlinear response function. Cox's hyperbolic law for Iron. *Nichtlineare Antwortfunction: Coxsches hyperbolisches Gesetz für Eisen* 110, 164
— — — : — Баха — Шюле. — — — : Bach — Shule law. — — : *Bach — Schulesches Gesetz* 158, 159
— — — : — Вертгейма для органических тканей. — — — : Wertheim's law for organic tissues. — — : *Wertheimsche Gesetz für organisches Gewebe* 96, 164
— — — : — Герстнера. — — — : Gerstner's law. — — : *Gerstnersches Gesetz* 61—63, 156
— — — : — Дюпена для прогибов в деревянной балке. — — — : Dupin's law for

flexure of wood. — — : *Dupinsches Gesetz für Biegung von Holz* 42—44, 47—49.
— — — : — Нельсона для красок и лаков. — — — : Nelson's law for paints and varnish. — — : *Nelsonsches Gesetz für Farben und Lacke* 177—180
— — — : — параболический Бернулли для кишек. — — — : Bernoulli's parabolic law for gut. — — : *Bernoullisches parabolisches Gesetz für Darm* 39, 40, 110—112, 159, 160, 167—179
— — — : — Сэйра, — — — : Sayre's law. — — : *Sayresches Gesetz* 180
— — — : — Хартига. — — — : Hartig's law. — — : *Hartigsches Gesetz* 135—137, 152, 153, 155, 166—172, 180, 183—185, 190, 191
— — — Ходкинсона в случае изгиба. — — — : Hodgkinson's in flexure. — — : *Hodgkinsonsche in Biegung* 55—57
— — — — параболическая при растяжении и сжатии. — — — : Hodgkinson's parabolic in tension and compression. — —: *Hodgkinsche parabolische unter Zug und Druck* 57, 58, 205

Хладни-процесс (см. Вибрация, эксперимент Хладни)
Хрусталь, стекло. Crystal, glass. *Kristall, Glass* 318, 319
Цинк. Zinc. *Zink* 76, 77, 138, 139, 295, 296
Шелк. Silk. *Seide* 61—63, 79—84, 91—93, 101, 103, 143—148
Шпат плавиковый. Fluorspar. *Flußspat* 518—520

Эксперимент Баушингера. Bauschinger's experiments. *Bauschingersche Experimente* 124—131, 134, 135
— Больцмана на удар. Boltzmann impact experiment. *Boltzmannsches Aufprallexperiment* 411—431
— Галилея с балкой. Galileo's beam experiment. *Galileosches Balkenexperiment* 221—225
— Гравесанда. s'Gravesande experiment. *s'Gravesandsches Experiment* 146—148, 224—226
— Грюнайзена с использованием интерферометра. Gruneisen's experiments using an interferometer. *Gruneisensche Experiment mit Interferometer* 164—176, 381—386
— Кельвина с двумя проволоками. Kelvin's two wire experiment. *Kelvinsches Experiment mit zwei Drahten* 137, 138, 148, 149, 180—183, 164—176, 381—386
— Кирхгофа по определению коэффициента Пуассона. Kirchhoff's experiment for determining Poisson's ratio. *Kirchhoffsches Experiment zur Bestimmung von Poissonschen Verhältnis* 344—349, 368, 369, 385—391
— Корню с использованием оптической интерференции. Cornu's optical interference experiment. *Cornus optisches Interferenzexperiment* 349—353, 371—375, 378, 379
— — — — —, неоптическая версия Мэллока. — — — —, Mallock's nonoptical version. — — —, *Mallocksche nichtoptische Version* 353—355
— на осевую деформацию стержня с переходом через нулевое напряженне от растяжения к сжатию. Axial test from tension through zero stress to compression. *Axialer Test: Zugspannung spannungfreier Zustand — Kompression* 191, 192
— с нагружающим стержнем. Load bar experiment. *Stabexperiment* 423—425
— Фёрстера по поддержанию свободных колебаний. Förster's experiment for support free vibrations. *Förstresches Experiment für stützungsfreie Schwingung* 492—495.
Экспериментатор. Experimentist. *Experimetator* 22
Эксперименты высокотемпературные. High temperature test. *Hochtemperatur-Tests* 371—373, 386—391, 492—503
— Гука. Hooke's experiments. *Hookesche Experimentte* 214—218
— Джоуля. Joule's experiments. *Joulesche Experimente* 405, 406, 525
— Кулона по пластичности и вязкости. Coulomb's experiments on plasticity and viscosity. *Coulombsche Experimente zur Plastizität und Viscosität* 234, 235
— Купфера. Cupffer's experiments. *Kupffersche Experimente* 389—400, 465, 466
— Мариотта. Mariotte's experiments. *Mariottesche Experiment* 218, 219
Экстензометр зеркальный Баушингера. Bauschinger's mirror extensometer. *Bauschingersche Spiegeldehnungsmesser* 124, 125
— механический. Extensometer, mechanical. *Ausdehnungsmesser, mechanischer* 59, 60, 65—69, 174—176, 180, 192, 215, 216, 285, 328, 329
— оптический. —, optical. —, *optischer* 126, 127, 148, 149, 166, 183, 187, 199, 381—385, 466—468
— — Таккермана. Tuckerman optical extensometer. *Tuckermanscher optischer Ausdehnungsmesser* 183, 187
Электроупругость, поведение тела. Electroelastic behavior. *Elektroelastisches Verhalten* 133—135, 311—313, 470—476
Эмаль. Enamels. *Emaille* 177—179
Эффект Баушингера. Bauschinger effect. *Bauschinger Effekt* 130, 131
— Гафа в резине. Gough effect in rubber. *Goughscher Effekt in Gummi* 76, 77, 405, 406, 525
— —, объяснение его Шмулевичем. — —, Schmulewitsch's conjecture. — —, *Schmulewitschscher Vorschlag* 406—411
— Пойнтинга. Poynting effect. *Pointing Effekt* 22, 23, 131—134
— Портвена — Ле Шателье (см. эффект Савара — Массона). Portevin — le Chatelier effect. *Portevin — le Chateliescher Effekt* 72—74, 305—307
— пьезоэлектрический Piezo-electric effect. *Piezoelektrischer Effekt* 451—458.
— Савара — Массона. Savart — Masson effect. *Savart — Massonscher Effekt* 72—74, 305—307

Джеймс Фредерик Белл

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Часть 1

Малые деформации

Редактор *Н. П. Рябенькая.*

Технические редакторы *В. Н. Кондакова, С. Я. Шкляр.*

Корректор *И. Я. Кришталь.*

ИБ № 12165

Сдано в набор 11.11.83. Подписано к печати 25.06.84. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 37,5. Усл. кр.-отт. 37,5. Уч.-изд. л. 47,85. Тираж 5500 экз. Заказ № 2352. Цена 6 р. 60 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Набрано в Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано во 2-й типографии изд-ва «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 10. Зак. 383